

辩证无限观与第三次数学危机

张洪

(中国银行, 江苏省泰州市, 225300)

摘要: 本文基于以下哲学观点开展讨论: 反对唯心主义, 接收辩证唯物主义, 在这样的大前提下讨论“有限无限问题”。本文基于黑格尔的辩证无限观, 对实无限思想进行了全面的批判。自黑格尔辩证无限思想科学地解释了微积分中的极限概念之后, 由无穷小量矛盾引起的第二次数学危机得到了彻底的解决, 然而数学界并没有吸取历史上的经验教训, 一直坚持唯心主义的实无限思想与方法论, 这种思想最终给数学带来了第三次危机。在本文最后, 基于辩证唯物主义无限观, 作者对概括原则、最大序数悖论进行了分析, 指出概括原则本质是一种实无限思想, 只有将概括原则限定在潜无限之内, 我们才能彻底解决第三次数学危机。

关键词: 实无限; 真无限; 辩证唯物主义无限观; 无限交换悖论; 概括原则

中图分类号: (字号: 楷体小五黑体) **文献标识码:** (字号: 楷体小五)

一、无限交换悖论揭示了一个“皇帝的新装”: 无限从没有完成过

所谓“无限交换悖论”是指我们使用实无限思想——也就是认为无限过程可以完成的思想, 我们可以将两个等价(具有“一一映射”关系)的无限变换成相互不等价的无限。这深刻的揭露了实无限思想存在的内在缺陷, 它将矛盾推移到无限远处, 可是矛盾从没有消失。也就是说无限过程根本不可能完成, 从而进一步佐证了辩证唯物主义无限观。

欲知无限交换悖论的详细描述请阅读《哲学无限与数学无限》一文的第二节(参见 Zhang Hong, Zhuang Yan, 2019)。

二、黑格尔(Hegel)的辩证无限观。无限存在而不能完成

伟大的哲学家黑格尔对“无限性、无限物”从哲学和数学等多个方面进行了深入细致的研究, 其核心思想是: 承认恶无限的存在, 认为恶无限不是真正的无限; 认为应该放弃、超越这个“无限进展”, 进而认识“无限”的本质, 即通过扬弃“恶无限”而认识“真正的无限(真无限)”。与此同时, 他也认为这两种无限是相互转化的, 具有统一性; 认为“无限物”具有两种无限属性。然而, 黑格尔的“真无限”与数学中的“实无限”有着本质的区别。因此, 黑格尔的无限观本质上就是一种辩证无限观。

(一)、黑格尔恶无限、真无限思想的本质

对黑格尔无限思想的详细阐述已发表在我文《哲学无限与数学无限》一文的第三节(参见 Zhang Hong, Zhuang Yan, 2019)。

关于黑格尔的辩证无限思想, 我们归纳如下: 有限概念的相互规定构成无限(即“真无限”), 无限是“恶无限”与“真无限”的统一, 是一个自在自为的存在; “真无限”离不开“恶无限”, 自为存在离不开自在存在。人类对无限的认识, 由可能到现实、由抽象到具

体，完成从“恶无限”到“真无限”的转变。“真无限”是现实的、具体的、完成的无限，是自为的存在和理性的存在，是完成了的质；而“恶无限”是可能的、抽象的、不可完成的无限，是自在的存在和知性的存在。真无限与恶无限的区别反映了辩证法的理解与形而上学的理解之间的对立。真无限、恶无限都是无限性的基本形式，黑格尔提出真无限包含并扬弃恶无限的这一深刻辩证结论，力求具体地、现实地把握无限性，反对对它作抽象的推论。从恶无限到真无限，就是从知性到理性的转变，是人类对无限认识的巨大飞跃，也是黑格尔哲学的最高任务。

（二）、恩格斯对黑格尔的恶无限、真无限思想给予了高度的肯定。

恩格斯认为无限客观存在，认为无限纯粹是由有限组成的，并认为这种矛盾不会消灭，也就是“无限过程”不可能完成。这是对“实无限”的直接否定，也是对黑格尔“恶无限”的直接肯定。

恩格斯认为无限的东西既可以认识，又不可以认识。即“真无限”（作为无限物之间的普遍联系、内在关联）可以认识、完成的，而“恶无限”不可以认识、不可以完成。

详细内容请参见我文《哲学无限与数学无限》一文的第四节（参见 Zhang Hong, Zhuang Yan, 2019）。

（三）、实无限思想与黑格尔辩证无限思想的区别

1、黑格尔的恶无限、真无限的主要特点与关系：

- 黑格尔的辩证无限观：无限客观存在，无限可以认识，无限进展不可以完成。“恶无限”、“真无限”是同一无限物的两个方面、两个属性，谁也离不开谁；恶无限是真无限的载体，恶无限蕴含着真无限，真无限是无限的内在本质，恶无限是无限的外在表象。
- 无限物是客观存在的。客观物质世界中的空间、时间就是典型的无限物或无限客体。
- 恶无限：认为无限进程不可以完成，从而是一种恶的无限；
- 真无限：认为无限是“在别物中达到的自我联系”，是对“恶无限”的扬弃，是无限物之间的共同本质、内在联系或普遍性。因而认为无限是可认识、可完成。它本身是质量互变的结果，是“恶无限”的否定、扬弃，是“恶无限”的彼岸，因而是一个肯定，从而是一个更高层次上的有限事物。

2、恶无限与潜无限的主要差异：

虽然人们常常把两者视为同一个东西，但是从哲学上讲，这两者有着根本的质的区别。“潜无限”认为无限并不客观存在，而是一种潜在，因为无限进展完成不了；而“恶无限”认为无限客观存在，但同时承认无限进展完成不了。所以它们具有相同点：无限进展完成不了。因此，潜无限可以看成是恶无限的一个片段，一个不断发展变化、前进的片段，一个运动变化的量，一个不断将恶无限“显化”的量。

3、“潜无限”与“实无限”的异同点：

结合朱梧楨先生对这两种无限观的数学和哲学分析，归纳它们的不同点如下：

- 关于“无限”的客观存在性：“实无限”认为无限客观存在，而“潜无限”认为无限不是一种实在，因而否认无限客观存在；

- 关于无限是否可以完成：“实无限”认为无限可以完成，反之，“潜无限”认为无限肯定不能完成。

在“潜无限”观者那里，“无限”是一种潜在，处于不断构造之中，因而不是一种实在，这显然是用主观世界对无限的认识的不可能性来否定无限的客观存在性。而“无限物”作为客观事物是真实存在的，不以人类的意志为转移，因而“潜无限”观犯了主观主义的错误，从而是一种唯心主义的无限观。

4、黑格尔的真无限与实无限的主要差异：

认真研究黑格尔的无限理论之后，显而易见，黑格尔的“真无限”与数学中的“实无限”是完全不同的两个概念。

- 数学中的“实无限”：认为无限客观存在，“无限进展”可以完成，与黑格尔的恶无限直接对立，不存在辩证的统一关系，承认“实无限”就直接否定“恶无限”；
- 黑格尔的“真无限”：是指“无限物”的内在联系、共同本质、规律性，而不是“无限进展”是否可以完成。“真无限”是对“恶无限”的扬弃，而不是对“恶无限”的抛弃。“恶无限”、“真无限”是无限物的不同属性，是辩证统一的，缺一不可；承认其中一个就必然要承认另外一个。因而承认“真无限”也必然承认无限的客观存在、承认无限不可能完成。
- 两者的共同点：都承认无限对象的客观存在性；都是一种有限。
- 两者的不同点：“实无限”认为无限进展可以完成，而“真无限”认为无限进展不可能完成；前者是一种唯心主义的认识论，而后者则是一种辩证的唯物主义的认识论。

由此可见，数学中的“实无限”观认为“无限进展”可以完成，这与黑格尔的“恶无限、真无限”思想是完全背道而驰的。

综上所述，“实无限”、“潜无限”都是将有限、无限对立起来，却未能将之统一起来，实际上是延续了康德的先验的“二律背反”思想，而黑格尔的无限观则是将对立的有限、无限辩证地统一起来，把量的无限和质的无限结合起来考察无限，从而形成辩证的无限观，因而是辩证唯物主义的无限观。

（四）、实无限思想的哲学本质——对实无限思想的全面批判

“实无限”抛弃了“有限无限矛盾”，人为假设它纯粹在无限过程的彼岸，人为割断“有限”与“无限”的联系，因而它是一个彻头彻尾的唯心主义的无限观，本质上是一个有限观。无限的存在性不等于无限的完成性，不可完成性是无限的根本属性。

1、实无限将有限、无限对立起来，让自己与无限过程没有联系，因而是一个虚假的无限。

“实无限”直接对“潜无限”进行否定并且没有肯定，这样，“有限无限矛盾”（无限过程）在它那里就消失了；而矛盾消灭了，那就是无限的终结。黑格尔早就从辩证的角度对“有限无限矛盾”给予了阐明：“不过，无限进展只是这种矛盾的表现，不是这种矛盾的解决”（参见黑格尔，1974年，第243页）。黑格尔还同时有力地驳斥了有限、无限对立的“二元论”，并认为这种对立的无限并不是真正的无限，而只是有限，而数学上的“实无限”

就是属于这种对立的无限，因而“实无限”不是真正的无限，而只是一个有限。我们在“实无限”这儿找不到“潜无限”（无限进展或者“恶无限”）的任何影子，而只有有限物。这种完完全全抛弃了“无限过程”的“无限”，与其说它是一个“无限”，倒不如说是一个实实在在的“有限”；因为，它抛弃了“无限过程”，也就抛弃了“有限无限矛盾”，从而让自己变成一个彻头彻尾的有限。

2、黑格尔强调有限和无限的统一，而“实无限”观没有把量的无限与质的无限结合起来，它在对“量”进行否定的同时没有从量的否定中发现质的东西，而是把“质”的东西一同进行了否定，甚至走向了“有限的存在”的对立面，变成了一个抽象物，人为割断“有限”与“无限”的联系，最终让自己陷入虚无主义，让自己变成与“无限过程”没有内在联系的他物，也就是说，“实无限”与“无限过程”完全是两回事。

在黑格尔看来，真正的无限，就是“在别物中达到的自我联系”，就是无限物之间的共同本质、相互规定、内在联系或普遍性，是否定之否定，从而是一种肯定，是一种自为存在；同时，“有限的存在”是具有质的规定性，既是有限的又是可变的，既包含有肯定又包含有否定，而这种“质的规定性”（即相互规定、共同本质）是联系“有限”和“无限”的纽带，即联系恶无限和真无限的纽带。在“希尔伯特旅馆”问题中，“实无限”者在否定“无限进展”的同时把“无限物之间的相互规定（内在联系）”——“没有空余房间”这一本质——进行了否定，而得出“存在空余房间”这一完全相反、对立的结论。这完全违背了有限与无限的统一性，违背了恶无限与真无限的统一性。“实无限”观认为这种纽带并不存在，否认自身的回归（即全盘否定而非辩证否定），把自己视为纯粹在有限万物彼岸的东西，与无限进展（恶无限）没有内在的联系，从而人为地割断了“有限”与“无限”的联系，最终导致了质的不统一（“实无限”的质与无限进展的质没有统一性）、导致自身的量与自身的质的不统一，而让“实无限”变成一个与“无限进展”、“潜无限”毫无联系的一个事物，变成了一个抽象物、一个他物。黑格尔分别用“直线”、“圆”来形容“恶无限”、“真无限”，而“实无限”既不是“直线”（恶无限），也不是“圆”（真无限），而是指存在一个“终极目标”（或绝对真理），并且这个“终极目标”是经历、完成了一个“无限进展”之后可到达的目标；因而其对“无限进展”（即恶无限）不是辩证的扬弃，而是机械的、形而上学的、人为的抛弃，人为割断了与“无限进展”的联系，从而让自己成为纯粹在有限万物彼岸的东西。事物的质变并不是要与原事物完全没有联系、完全割断，相反，辩证的否定是联系的环节，没有联系的质变是不存在的。人们常用“有限空间”的可达性来说明“无限过程的完成性”，如用坐标轴 X 上的 1 可达 0 来证明 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 这一无限过程可完成，其本质是抛弃了

“无限进展”，用“有限性”代替“无限性”，把无限简单地视同有限对待，将人类思维产物强加于客观物质身上，人为地造成不可调和的对立，而无限进展 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 仍然独立地存在着；

这种想象的无限性（即实无限）并不是“无限进展”本身，与“无限进展”没有任何内在的联系，它只是一个“旁观者”，一个“他物”而已。

黑格尔要求把量的无限和质的无限结合起来考察无限，认为无限的定量并不是单纯量的

无穷进展，而是对自身的质的规定性（所谓“定量”就是是具有规定性的、具有界限的量，这个规定性就是界限）。而数学上的这种“实无限”没有将量和质结合起来考察，因此其思想是遵循了康德的先验的、主观的、形而上学的无限思想，而不是黑格尔的辩证的无限思想。因而，黑格尔坚决批判了这种“实无限”，认为这种“实无限”是虚无的“抽象物”，错误地把客观存在的无限当成了完成了的、已经认识了无限，把无限简单地视同有限对待。他在剖析康德的二律背反思想时指出了这种“实无限”的本质：“那种理解的错误，在于把这样的思想物，抽象物，如无限多的部分，当作某种真的、现实的东西；但是这种感性的意识却不会超出经验而达到思想的。康德对二律背反的解决，同样只在于：理性不应该飞越到感性的知觉之上，应当如实地看待现象。这种解决把二律背反本身的内容搁在一边，没有到达二律背反的规定的概念的本性；这些规定，假如每一个都自身孤立起来，便都是虚无的，并且在它本身那里，只有到它的他物的过渡，而量则是它们的统一，它们的真理也就在这种统一之中。”（参见黑格尔，1974年，第210页）。这样一来，“实无限”就变成了一个抽象物，它不仅越过了“无限进展（恶无限）”，也同时越过了“真无限”，从而让自己变成了一个实实在在的“无”；因为在黑格尔看来，越过了极限就会成了无（参见黑格尔，1974年，第278页）。

3、无限存在而不能完成

实无限以“主观世界产物”完全代替“客观物质世界”本身，或者将“主观世界产物”完全等同于、强加于“客观物质世界”，这就从根本上否定了主观世界与客观世界之间的差异、矛盾。“实无限”抛弃了“有限无限矛盾”，也就抛弃了真实的无限；它将人类的思维产物强加于客观物质无限世界身上，并与客观物质世界相对立，因而“实无限”观犯了与黑格尔一样的错误，它又是一个彻头彻尾的唯心主义无限观。

“无限可以完成”这是一种主观世界的认识，“实无限”观认为这就是客观物质世界本身。恩格斯早就对这种唯心主义认识进行了无情的批判。他说到：“企图以思维和存在的同一性去证明任何思维产物的现实性，这正是一个叫做黑格尔的人所说的最荒唐的热昏的胡话之一”（参见恩格斯，1970年，第39-40页）。上述论述说明，我们不能因为“有限主观世界”与“客观物质世界”存在“同一性”而去证明我们的思维产物——“无限过程可以完成”——现实性，这实际上指出了“实无限”观存在的致命缺陷。也就是说，“思维的无限可超越性”并不表示“客观无限过程的可完成性”，而且“思维的无限可超越性”也从来没有真正“完成过”；“存在的无限”决不等于“认识了无限”。

“无限”作为“无限个对象本身”，即作为一个“无限过程”，作为“恶无限”，是不可能完成、不可能“结束”的。但是，这并不等于说“不可以将这无限个对象（既包括完成了的有限也包括未完成的无限）看成一个整体、一个集合”，而人类事实上总是自觉、不自觉地“无限个对象”看成是一个“整体”、一个“集合”；而这正是“无限可超越”的一面，也是“无限”在人类大脑思维中的自然的、必然的“思维结果、思维产物”，是“客观无限世界”在“主观有限世界”中的表象与反映，而真无限则是这种超越的结果。只是“无限”在“有限”的“人类意识”中是无法完全表达的，正由于无法“完全”表达，这才是“恶无限”或“潜无穷”的根本思想所在。

“实无限”观总是混淆了这两个概念——“无限过程”（即恶无限）与“无限整体”（是一种真无限），混淆有限与无限，混淆恶无限与真无限，并用“无限整体”（“思维的无限可超越性”）这一对客观无限世界的主体认识概念来替代“无限过程”这一认识无限物质世界的客观过程（即用“真无限”来代替“恶无限”），把“主观有限世界”对“无限客体”的超越性认识当成了“无限过程”本身，把“无限整体”的客观存在性当成“无限过程”的完成性，把思维的认识产物当成人类认识客观无限世界过程本身，用主观认识代替客观事物本身，从而将“有限无限矛盾”彻底否定、彻底抛弃、彻底消灭。在“实无限”观看来，有限无限矛盾消灭了，所以就可以完成、终结一个“无限过程”；可是有限无限矛盾从来也没有消灭过，而且永恒存在。正如恩格斯在《反杜林论》中一针见血指出的那样：“如果矛盾消灭了，那就是无限的终结。黑格尔已经完全正确的看到了这一点，所以他以应有的轻蔑态度来对待那些空谈这种矛盾的先生们”（参见恩格斯，1970年，第48-49页）。因此“实无限”观总是不断遇到致命的打击，不断遇到新的矛盾、新的悖论。这正是康托（Cantor）“无限观”的错误之所在。

正是基于这种唯心主义的错误认识，在“实无限”观看来，“无限”作为一群“客体”的“集合”时，即作为一个“整体”时它是可“完成”的，因为这时“无限”的本质内涵——“恶无限性”——“无限过程”已被完全抛弃，所以它是可以“完成”的（即“思维的无限可超越性”）。“实无限”观将这种完成性当成了“无限过程可完成”，将无限的客观存在等同于无限过程，将“真无限”的可完成性当成了“恶无限”的可完成性，用“真无限”完全替代“恶无限”，从而彻底抛弃“有限无限矛盾”，这就是“实无限”观的错误本质。“存在性”是一种客观，“完成性”是一种主观，“实无限”观将两者混为一谈，将恶无限的存在性等同于恶无限的完成性，因而必然走向唯物主义的反面，必然导致不可克服的矛盾。让我们进一步举例分析：“一条直线”作为一个“无限整体”是一种客观存在，因而是一个肯定，是自为的存在，是完成了的质，是一个有限（即一个“真无限”），但是其“无限延展性”却是一个“恶无限”，因而是抽象的、不可完成的，是自在的存在和知性的存在；而“实无限”观将前者等同于后者，并用前者来代替后者（用存在性代替完成性），从而让自己遭受致命的打击。

这种摒弃了“无限过程”、把思维的产物强加于客观物质世界身上的“无限观”必然是一种反辩证唯物主义的无限观，是一种实实在在的唯心观。而黑格尔的无限观正是既看到了“客观物质世界的普遍联系性（真无限）”，又看到了“无限过程不可完成（恶无限）”的客观实在性，所以它是一个科学的无限观，是一个辩证的无限观，因而也是一个马克思主义的无限观。因此，“无限”作为一个“无限过程”，是永恒不灭的，是绝对的，也是不可“完成”的；而当“无限”作为一个整体、作为一个真无限时，即摒弃了“无限过程”时，这个“无限”是可以完成的，因为此时，这个“无限”与其说是一个“无限”，倒不如说是一个实实在在的“有限”。如“自然数集 N ”这个概念，是一个“无限客体”，但是其摒弃了“元素之间无限过程”（恶无限性）。这种离开了“无限过程”的“无限客体”已经变成了一个单纯的“概念”或“名称”，已经完全变成了一个“有限”性的事物了，正如元语言中的一个有限对象。因此，罗素才如此肯定地说“我们必须承认有真实的无穷集合”，而事实上，

我们的数学家们就是这样干的，而且做得成绩辉煌。我们把自然数集的存在看成是人们的实际现实需要，而这正是辩证无限观的具体体现。

恩格斯在《反杜林论》中充分批判了像杜林先生那样将“思维产物强加于外在客观世界上”的荒诞观点，有效揭示了数学的本质，认为数学必须正确反映客观物质世界。他说，“但是在纯数学中悟性绝不能只处理自己的创造物和想象物。数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。……。和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。……。和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的……。但是，正如同在其他一切思维领域中一样，从现实世界抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西，作为世界必须适应的外来的规律而与现实世界相对立”（参见恩格斯，1970年，第35-36页）。

恩格斯对黑格尔的“绝对精神”这一唯心主义思想也进行了有力的批判。他说：“黑格尔的体系作为体系来说，是一次巨大的流产，但也是这类流产中的最后一次。就是说，它还包含着不可救药的内在矛盾：一方面，它以历史的观点作为基本前提，即把人类的历史看做一个发展过程，这个过程按其本性来说是不能通过发现所谓绝对真理来达到其智慧的顶峰的；但是另一方面，它又硬说自己是这个绝对真理的全部内容。包罗万象的、最终完成的关于自然和历史的认识的体系，是和辩证思维的基本规律相矛盾的；但是这决不排斥，反而肯定，对整个外部世界的有系统的认识是可以一代一代地得到巨大发展的。”（参见恩格斯，1970年，第22页）。在这儿，恩格斯深刻批判了黑格尔那种具有“实无限”性质的“绝对真理”的思想。

我们在这儿所反对的，正是恩格斯在《反杜林论》中所批评的杜林先生的“先验主义”的“终结真理”；而“实无限”观本质正是象“先验主义”一样的东西，它本质上是认为世界的发展、运动一定会有个“尽头”。而“无限”的本质从来就是指“无限的不可穷尽性”，“不可穷尽”即“无限”，“无限”即“不可穷尽”。实无限观认为“无限”能够“完成”，这与客观物质世界直接对立。

恩格斯在《反杜林论》中对这种观点进行了进一步的批判：“如果在人类发展的某一时期，这种包括世界所有联系——无论是物质的或是精神的和历史的——的最终完成的体系建立起来了，那么，人的认识的领域就从此完结，而且从社会按照这一体系来安排的时候起，未来的历史进展就中断了——这是荒唐的想法，是纯粹的胡说。这样人们就处于矛盾之中：一方面，要毫无遗漏地从所有的联系中去认识世界体系；另一方面，无论是从人们的本性或世界体系的本性来说，这个任务都是永远不能完成的。……。我们在前面已经看到，杜林先生是无所不在的——在一切可能的天体之上。现在我们又看到，他是无所不知的。他解决了科学的最终的任务，从而封闭了一切科学走向未来的道路。”（参见恩格斯，1970年，第34页）。

“存在的无限”不等于“认识了的无限”，客观的无限不等于主观的无限，“实无限”既不是恶无限更不是真无限。关于真无限和恶无限，我们可以打一个很形象的比喻：“恶无限”就像被幽禁在封闭盒子里面的一个“魔鬼”，如果我们不打开这个盒子，这个“魔鬼”就永远不能出来（即无限进展永远不能完成）。在这个比喻中，“魔鬼永远不能出来”是一

种“恶无限”，而“真无限”则是指这个事件的内在的“质的规定性”——“封闭的盒子中有一个魔鬼”；将两者结合起来表述整个事件就是：“封闭的盒子中有一个魔鬼，但是魔鬼永远不能出来”。前者表示事件的本质，后者表示事件运动、发展的可能，两者相互依存但两者并不等同。更形象的比喻，可以拿黑格尔用来形容“恶无限”的直线来具体说明：直线上的一点在直线上自由的运动。在这个事件中，“点在直线上”代表了事件的本质、内在的质的规定性，体现了“点”与“直线”的关系，是一个真无限，而“点在直线上自由运动”则是代表“恶无限”，表明这个“点”可以达到直线上的任意一个位置，但是无论如何自由运动都不可能摆脱这条直线、都不可能改变“点在直线上”这一内在的本质。如果说上述事件的表述还有点模糊，那么让我们把“直线”换成一个封闭的“圆”再来进行事件的描述，上述事件就转化为这样的一个事件：封闭圆上的一个点在圆上自由的运动。同样，“点在封闭的圆上”代表了事件的内在规定性，体现了“点”与“圆”的关系，代表了事件的拓扑属性，因而是一个真无限，而“点在圆上自由运动”则是代表了“恶无限”，表明这个“点”可以在圆上任意移动，但是无论如何自由运动都不可能摆脱这个圆。也就是说，“恶无限”的结果是“真无限”，而不是“实无限”；在这儿，我们找不到“实无限”的任何影子。“实无限”自认为自己已经摆脱了“恶无限”，但仍然在无限进展中；它不是从“质”上思考无限、扬弃无限进展，而是主观地、一厢情愿地中断无限进展，用主观代替客观，从而是一个自欺欺人的、唯心主义的认识论，是一种变相的“二律背反”。

我们可以处处看到恩格斯批评杜林、所要反对的正是杜林先生的“存在就是被认识了”的观点。假若说“存在的无限”一旦被“思考”，就被“思考”为“统一的东西”——“完成了的无限”（实无限），那也太滑稽了。恩格斯在《反杜林论》中继续论述：“……，杜林先生就借助‘我们的统一思想’，把存在的唯一性变为它的统一性了。因为一切思维的本质都在于把事物综合为一个统一体，所以，存在一旦被思考，就被思考为统一的东西，……”（参见恩格斯，1970年，第38页），“企图以思维和存在的同一性去证明任何思维产物的现实性，这正是一个叫黑格尔的人所说的最荒唐的热昏的胡话之一。”（参见恩格斯，1970年，第39-40页）。这儿已经说明：“存在着的无限”一旦被“思维”并不能得到这一“思维产物”——“完成了的无限”（实无限）——的现实性。在这儿，恩格斯无情地批驳了“实无限”观这种逃避“有限无限矛盾”的唯心主义的思想。

“实无限”观把自己对“无限”的认识当成了“真实的客观无限世界”本身，所以它必然走向了辩证唯物主义的对立面。因此，“实无限”本质是一个有限观，它摒弃了“客观无限世界”与“主观世界”的差异性，否定了“主观世界”与“客观世界”之间的“对立统一关系”——“有限无限矛盾”（无限进展），从而否定了“主观世界”的不断前进性。

（五）、无限是一个客观存在

主观世界与客观物质世界之间的矛盾就是一个有限无限矛盾，思维和存在的关系问题同时也是一个有限无限问题。有限无限矛盾是“主客体关系”的具体体现。

无限是一种客观存在。时间、空间是我们无法逃避的现实的无限客体。有限的人的存在，就决定了这是一种潜无限存在，一个永不停息的过程。柏拉图、亚里士多德都没有否定无限存在，只是亚里士多德认为对有限的人类意识来说，不能现实地认识无限。

主观世界是一个有限世界，“有限”是“主观世界”的一个天然属性。客观物质世界是一个无限世界。“有限无限矛盾”是人类在认识客观物质世界时所面临的一种矛盾，是此时此刻的“人类主观世界”不能完全了解、掌握“无穷无尽”的“客观物质世界”。

详细内容请参见我文《哲学无限与数学无限》一文的第六节（参见 Zhang Hong, Zhuang Yan, 2019）。

（六）、恶无限是一个根本问题

无论标准、还是非标准实数模型，都没有摆脱“恶无限问题”（有限无限矛盾问题），也就是说“恶无限”是一个根本问题。

实无限论者从来就离不开“恶无限”。其实，Cantor 先生在其集合论中，一直在使用恶无限，比如说超穷序数 ω 的生成过程，从任一普通自然数 n 出发，是到达不了 ω 的，这就是一个恶无限。也就是说，那些坚持“实无限观”的数学家，根本不可能离开恶无限过程。可以说，离开恶无限，就没有 Cantor 的集合论。根据“第二生产原则”（second principle of generation）所生成的新数 ω ，这本质就是恶无限。**而 ω 纯粹在无限进程的彼岸，它无法体现自然数集 N 的内在本质。**

恶无限总是存在着。在非标准模型内，从有限自然数 n 到无限大数 b 是不可达的、不连续的，因为 b 大于一切有限自然数，因而，这个过程就是恶无限过程。即使认为从有限自然数 n 到 b 可达的，它们之间存在一个“超有限链条”，可是 b 之后又是什么呢？这又是一个恶无限过程。这又变相的回到标准模型在无限远处的运动情况。所以，对于非标准模型，我们可以称之为无限远处、无限小处的标准模型。只是，在标准模型内，我们把“很大或巨大的自然数”或“充分大的数”看成是 b 。这也是为什么，人们证明了标准分析与非标准分析的等价性。

所以黑格尔坚决反对这样的“实无限”：有限坚持在这边，无限坚持在那边，与无限过程没有任何联系。 b 、 ω 就是这种典型的“实无限”，有限实数与无限大是不同的两个世界的产物，我们可以把 ω 看成是一条新直线的起点。

什么是“完成了的无穷”？从来就不是说要完成一个无限过程。在 Cantor 看来，这是将一个无限客体表示成一个“数”的形式，如用 ω 代表自然数集 $N=\{1, 2, 3, \dots\}$ 的多少。这是康托、鲁宾逊、莱布尼兹的思考，但是他们都没有离开过恶无限，而且也不可能离开恶无限。用一个数代表一个无限客体的“大小、多少”，这是他们的梦想，也是他们的良好的愿望或一厢情愿的理想，但总会遇到更大的无限，而且这个过程是没有止境的，这个过程本身就是一个新的“恶无限”。这种“完成了的无限”（即“实无限”）只会让我们得到片刻、暂时的安宁，仅仅是片刻的安宁，因为总有更大的无限等待着我们。这种观念的错误在于其强调静止而否定运动，但是有限无限矛盾永远存在，静止是相对的，而运动是绝对的、永恒的。

（七）、一一对应原则、Cantor-Hilbert 对角线法本质上是一种有限性的方法。

在 Cantor 的“超穷数理论”中有一个核心而基本的概念，就是“一一对应原则”，Cantor 对无限的划分就是根据“一一对应原则”作出的判断。可是“一一对应原则”本身在“有限无限问题”上就是一个需要解释清楚的概念，我们何以知道在有限范畴内正确的概念会在无

限范畴内也正确呢？“一一对应原则”在面对无限时，就必然遇到“恶无限”这个问题，而基于这个可疑概念的对无限的等级划分，本身就变得何其荒唐。“一一对应原则”是康托（Cantor）“实无限”思想的根基，因此基于“有限”的“一一对应原则”不能作为衡量“数学无限”间等价与否的根据。

“一一对应原则”或“一一映射”本质上是来自于、属于“有限”范畴内的东西，在将它推至无限范畴时，这只能是一种公理性的规定或假设，而不是事实上能“证明”或“推断”出来的“必然”，因为我们不可能穷尽一个无限对象。从而，依赖于“一一对应原则”而建立起来的“无限之间等价性”这一概念已经是问题的中心和最值得怀疑的东西。

有限与无限的一个重要区别还在于：**有限是一个“闭区间”，有始有终，而无限是一个“开区间”，有始无终。这深刻的反映了有限范畴与无限范畴的重大区别。**

朱梧楨先生在其著作《数学与无穷观的逻辑基础》中，也对将“一一对应原则”应用到无限集合上进行了质疑。他指出，“一一对应原则用在无穷集合上，也是一种枚举手续，而枚举手续在没有穷举该枚举手续之前，永远是一种现在进行式（going），从而它所面对和指称的必然是潜无限”（参见朱梧楨，2008年，P211）。在这篇著作的第七章的最后部分，又进一步强化了这一思想，他说，“事实上，在传统集合论中，对于势这一概念的建立，完全决定于‘一一对应原则’，而一一对应原则的使用，除了给出一个对应规则（或对应函数）之外，剩下的就只有对集合中元素的任意递归枚举了，但是任意递归枚举集合之元素至多只能是一个潜无限进程，从而至多只能适用于潜无限弹性集合。康托将基于任意递归枚举的一一对应原则任意应用到实无限刚性集合上是没有根据的，特别是任意应用到不可数集合上就更无根据了，因为即使在传统集合论观念下，也都承认任意递归枚举至多到可数无穷，既然如此，试问立足于任意递归的一一对应原则，又如何能去决定不可数实无穷集合的势呢？所以用一一对应原则来决定各种各样实无穷刚性集合的势是很有局限性的。”（见参考文献【16】P296。）

关于“Cantor-Hilbert 对角线法”这种具有“实无限”思想论证方法的有效性，朱梧楨先生也给出了旗帜鲜明的质疑（参见朱梧楨，2010年）。“Cantor-Hilbert 对角线法”本质上与“一一对应原则”相同，也是一种潜无限性、过程性的方法，是一种不可完成的方法，不可以用来证明“实无限”（整体无限）的整体性性质。我们在处理“Hilbert 旅馆问题”时，如果基于同样的实无限思想，我们将会得到“无限交换悖论”。把自然数集 N 作为一个整体的方法本质是一个有限性的方法，如同 N 的幂集定义一样，这都是有限性、整体性的方法。

（八）、第二次数学危机的哲学解释

第二次数学危机的解决，是数学家们无意中遵循了辩证法思想而给出了极限的科学定义。然而，黑格尔基于辩证法思想分析了数学中存在的形而上学困惑，对“极限”概念进行了正确的哲学阐述，从质量互变规律揭示了数学中的恶无限、真无限思想，让我们彻底认清了“极限”的本质。

黑格尔首先描述了形而上学导致的数学困惑。“数学的无限一方面是很有兴趣的，因为它将引入数学，导致了数学的扩张和伟大的结果；另一方面又是很奇怪的，因为这门科学还没有能够用概念（真正意义的概念）来论证无限物的使用。”（参见黑格尔，1974年，第

260 页)。

黑格尔肯定了无限小是一个过程，一个变量。黑格尔、康德反对将无限物看作为一个纯粹的定量(有界限的量)，看作一个最大限度，看作一定单位的已完成的数量，即反对作为一个实无限。“实无限”的本质是将无限仅仅看作为一个定量、一个限度，而不是变量。“现在无限大或无限小既然是这样一个不再能增加或减少的东西，那么，事实上它也就不再是定量本身了”(参见黑格尔，1974年，第263页)，“康德斥责把无限整体看作一个最大限度，看作一定单位的已完成的数量”(参见黑格尔，1974年，第264页)，也就是黑格尔和康德认为无限大、无限小是一个变量，这与现代数学的极限理论完全一致。无限作为过程是一个变量，无限的本质是运动、变化，因此黑格尔哲学本质上是运动哲学，这充分体现了无限物的恶无限性。无限大、无限小，都是一个变量、一个无限进展，黑格尔为此解释道：“无限的定量，作为无限大和无限小，本身就是无限的进展。作为大或小，它是定量，同时又是定量的非有。”(参见黑格尔，1974年，第257页)、“定量在它的他物中的连续，使两者的联合，表现为无限大或无限小。因为无限大和无限小在自身那里仍然有定量的规定，它们还是可变化的，没有达到可以是自为之有的那样绝对的规定性。”(参见黑格尔，1974年，第244页)。极限中的无限小量是一个变量，既不是很小的量，也不是任意小的量，而是以零为极限的变量，因而不过是正在消失中的量。无限小概念的辩证本质之所以长期认识不清，原因就在于无法正确理解量的无限里面出现的质的环节(或质的规定性)。黑格尔在无限性问题上的惊人壮举乃是其辩证法思想的卓越体现。

黑格尔认为“无限的定量”既包括量的规定性(即无限进展，恶无限)，又包括质的规定性(即真无限)。真无限是一个质的规定性； dx/dy 之所以属于真无限，是因为这里已不再具有单纯定量的意义。黑格尔指出，“无限的定量是一个在质的形式中的大小规定性；它的无限性必须是一个质的规定性。”(参见黑格尔，1974年，第265页)，这儿的数学无限就是真无限。所谓有限的表现形式(分数本身)恰恰是真无限的表现形式，而系列的无限才真正是有限的表现形式，因为它明显地属于无限进展之类的恶无限性。“一般地说，在变量的函数里所引用的无限，这是真的数学的、质的无限，也就是斯宾诺莎所想的无限。”(参见黑格尔，1974年，第273页)，所以 dx/dy 是一个真无限。恶无限仅是一种量的规定性，它表现为纯粹的定量与定量之间的矛盾运动和无限进展。而真无限，则是具有质的量规定性，它形成了量和质的矛盾运动；由于这种矛盾是内在的和必然的，所以它达到了有限和无限的真正统一(参见何建南，1983年)。所以，黑格尔得出结论：“无限的定量，作为质的规定性与量的规定性这两个环节的统一，就是比率。”(参见黑格尔，1974年，第340页)，这个比率就是真无限，而极限概念就是这儿的“无限的定量”。

无限小量是正在消失中的量(即变量)，既不是有(任何定量)，又不是无(纯粹的零)，而是有与无的统一。 dx, dy 作为无限小量，已不再是定量了，它们的意义只在于关系，仅仅意味着环节，即 dx/dy 微分系数的规定；因此它们既是零又不是零，在变化过程中不为零，但是其变化趋势是零。所以黑格尔阐述道，“ dx, dy 不再是定量了，也不应该有定量的意义，它们的意义只在于关系，仅仅意味着环节。它们不再是某物(被当作定量的某物)，不再是有限的差分；但也不是无，不是无规定的零。在比率之外，它们是纯粹的零，但是它们应该被认为仅仅是比率的环节，是 dx/dy 微分系数的规定”(参见黑格尔，1974年，第275页)。

黑格尔认为数学的无限是真无限（指极限或 dx/dy ），同时严肃批判了形而上学的无限（指恶无限）。黑格尔认为通常的形而上学的无限物就是恶无限，他指出：“通常的形而上学的无限物——这该是被了解为抽象的、坏的无限物”（参见黑格尔，1974年，第270页）。黑格尔提出：在变量的函数里的无限是一种真正的质的无限；而恶无限，是单纯的否定，缺乏肯定的质的意义。黑格尔的真无限思想有助于理解极限理论中关于结果与过程、无限与有限、静止与运动、量变与质变的辩证关系；现代微积分的极限理论，实质上体现了有限和无限的相互联系与转化，体现了无限的量与无限的质的统一，体现了定量与变量的统一，体现了真无限与恶无限的辩证统一。关于数学上的这种矛盾，黑格尔对数学的无限（真无限）与形而上学的无限（恶无限）进行了明确的区分，他指出：“但是从哲学的观点看来，这个数学的无限之所以重要，因为事实上它是以真正无限的概念为基础，比通常所谓形而上学的无限高得多，人们就是从形而上学的无限出发，对真无限作了许多责难。面对这些责难，数学常常只晓得用抛弃形而上学的权威来自救，认为只要它一贯在自己的地基上行动，就与形而上学这门科学毫不相干，也不用理睬形而上学的概念。……，形而上学在与数学的无限相矛盾的时候，无法否认或取消使用数学无限的辉煌结果，而数学也搞不清自己的概念的形而上学，因此也搞不清那种使无限物的使用成为必需的方法的由来”（参见黑格尔，1974年，第260-261页）。恩格斯在《自然辩证法》也阐述了数学无限（即真无限）的深刻作用，“只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程：运动”（参见恩格斯，1971年，第249页）。

黑格尔认为数学的无限在哲学上之所以重要，就在于它是建立在真正无限的基础上，比形而上学的无限高明得多。数学的无限与形而上学的无限之分别，是无限性理论中的重大问题。真的数学无限是真无限，而形而上学的无限则是坏的无限。形而上学的无限坚持着外在的否定性（恶无限），界限始终没有被扬弃；而真的无限坚持着内在的否定性，并且这种否定是向自身的回归，是自身的量与自身的质的统一。量的关系的极限与消失，并不意味着质的规定的消失。黑格尔之所以强调质的比例，因为这是从有限量转化为无限量的依据（参见温纯如，2003年）。因此，认真对待数学中的实无限观、潜无限观，对数学科学的健康发展至关重要。

然而正如黑格尔所说——“人类从历史中学到的唯一的教训，就是人类没有从历史中吸取任何教训”，人类总在不断地重复着相同的错误。自100多年之前康托发明了“无限数”（基数、序数）之后，人们对无限的认识又一次陷入了唯心主义的形而上学之中，从而导致了第三次数学危机的爆发。

（九）、无限的大小比较

关于“无限之间的大小问题”，黑格尔给出了明确的论述。黑格尔认为无限大小是可比較的，而且只有在真无限的意义上才可以比較大小，即在无限的质的规定性意义上比較大小。仅仅处于比例中的东西不再是定量，而是质的规定，“与此相反，质的东西恰恰只是在它与一个他物相区别那样的东西。因此，那些无限的大小不仅是可比較的，而且只有作为比較或比例的环节”（参见黑格尔，1974年，第276页）。比例中的两个无限，是两个无限进展，而它们的变化率就是一种真无限，体现了一个质的大小规定性。

两个不同的无限，除非我们事先知道它们之间的“关系”（即内在的质的联系），否则

我们将无法把它们区分。如自然数集 N 与它的幂集 $P(N)$ 存在着幂集关系，正是基于这种关系，我们才能区分它们、比较其大小。我们只能在“真无限”的意义上比较不同无限之间的大小，即在不同无限的内在质之间的联系上比较大小；也就是说，有内在联系的不同无限才可以比较大小，没有内在联系的不同无限不可以比较大小，正是基于这一点，我们才认为选择公理的正确性。

(十)、高度重视哲学大师维特根斯坦的无限思想

维特根斯坦是 20 世纪最有影响力的哲学家之一，特别是他的数学哲学思想引来了旷日持久的争论。他的无限思想主要是：他反对实无限，反对无限的客观存在，认为无限是一种以法则表示的无限可能性而不是现实性；他反对一个无限集合与自己的子集的一一对应，反对使用康托的“对角线法”，因而是一个典型的潜无限论者。

他否认无限的实际性。他认为无限的实际性是不能证实的，符号不能表述无限的实际性。正如他在《数学基础研究》中所说，“它说，实无限根本不能用数学的符号系统来把握，因此它只能被描述出来而不能被表现出来。这种描述或许是以类似于下面这样的方式将它把握住的：对于不能全部拿在手上的大量的东西，人们是通过将其打包放入箱子中的方式将其提起来的。”（参见维特根斯坦，2013 年，第 210 页）

他反对使用康托的“对角线法”，认为有限不能穷尽无限。“因为我们有如下正当的感觉：在能够谈论最后一个东西的地方，在那里便不能出现‘根本没有最后一个东西’。”（参见维特根斯坦，2013 年，第 207 页）；“（请不要忘记：数学家们有关无穷的思考毕竟都是有穷的思考。借此我想说的是这点：它们都有一个尽头。）”（参见维特根斯坦，2013 年，第 228 页）

他认为无限、有限是完全不同的范畴，无限是一种内在的规定性。他认为无限不是数字，无限不是一种同有限相角逐的量的大小，而是一种内在的规定性。他指出，“‘无穷集合’和‘有穷集合’是两个不同的逻辑范畴，可以有意义地表述给一个范畴的东西不能有意义地表述给另一个范畴。”（参见维特根斯坦，2013 年，第 206 页）。以数字 π 为例，数字 π 表达了一个与实际观察相伴随的无限的规律，即数字 π 是一个规则。这实质上就是黑格尔的“真无限”思想。

他认为无限是一种可能性。他认为有限与无限不是量的差别，而是一种逻辑上的区别；无限不是量也不是广延，无限是以法则表示的无限的可能性，无限本身不可比较大小，因而其认为的这种无限可能性实际上是一个变量、一个过程（恶无限）而不是结果。因此，维特根斯坦又是一个潜无限论者。

因此，维特根斯坦的无限思想基本遵循了黑格尔的辩证无限思想。他唯一的欠缺是否认无限的客观存在，并与直觉主义者为伍但是又超越了他们。然而，他的无限思想最终没有能够上升到黑格尔辩证无限观的层面，没能把握无限作为“自为无限”——“真无限”的哲学意义。

(十一)、坚持辩证唯物主义无限观

重新定义、认识“实无限”、“潜无限”，充分吸收黑格尔的辩证无限观思想，回归到科学的无限观上，即：无限客观存在，无限可以认识，但是无限过程不可以完成，而这就是

辩证唯物主义的无限观。

综上所述，我们全面介绍了黑格尔的辩证无限观，也介绍了恩格斯对黑格尔无限观的肯定，还介绍了四种无限观之间的区别，并全面分析了“实无限”观的错误，因此现在我们可以自然总结出辩证唯物主义无限观就是：**无限客观存在，无限可以认识，但是无限过程不可以完成；辩证唯物主义无限观的本质就是运动和变化，认为运动是绝对的而静止是相对的。**具体地讲就是：任何无限都是“恶无限”与“真无限”的辩证统一（统一体），它是一种客观存在，无限性本身包含了“有限无限矛盾”，无限的客观存在性并不代表无限过程能够结束、完成；“真无限”就是无限事物内在的质的规定性，就是内在联系、规律、真理，而“恶无限”就是无限进展，没有终止的重复、交替，深刻地体现了“有限无限矛盾”；“真无限”可以认识、完成，而“恶无限”不可以认识、不可以完成，“恶无限”（无限过程）是“有限无限矛盾”的具体表现而不是这种矛盾的解决，这就决定了“有限无限矛盾”永恒不灭（即运动是不灭的、绝对的）；“真无限”代表了无限的质（本质），而“恶无限”代表了无限的量（运动和变化）；“真无限”离不开“恶无限”，“恶无限”是“真无限”的载体，“真无限”是“恶无限”的目标和方向。“真无限”是现实的、具体的、肯定的、积极的、理性的、完成的无限，是自为的存在和理性的存在，是完成了的质；而“恶无限”是可能的、抽象的、否定的、消极的、不可完成的无限，是自在的存在和知性的存在。

无限存在而不可完成、不可穿越，无限是一个黑洞，但是无限可以扬弃、可以超越。过程（恶无限）永远，规律（真无限）永恒；过程是变量，规律是常量；无限不可穿越，但可以超越，超越的结果是一个真无限。无限的存在性与过程的不可完成性是完全不同的两个概念，它们是矛盾的两个方面，不可相互替代；正因为它们的存在，才有有限无限矛盾的存在；无限，就像一个黑洞一样，有进无出，无穷无尽，永远不能结束。辩证唯物主义无限观坚持这种矛盾的不灭性，认为无限客观存在、可以认识，但是无限过程却不可以完成，即有限无限矛盾永恒不灭（即坚持运动的绝对性和静止的相对性）；而实无限观则把无限的客观存在性当成无限过程的完成性，用客观代替主观，用真无限代替恶无限，彻底抛弃有限无限矛盾（即否定运动的绝对性和静止的相对性），从而认为这种矛盾是可以终结、可以解决，因而其思想是遵循了康德的先验的、主观的、形而上学的无限思想。

三、第三次数学危机的根源与解决

上述我们讨论了“实无限观”存在不可克服的内在矛盾，总是用有限性、机械性的“方法”去处理、对待一个个“无限性”的客体，从而带来了一个又一个更大、更坏的“矛盾”。我们认为第三次数学危机其本质就是“实无限”——这种“穷尽了无限”（穷尽了一个不可穷尽的东西）——所导致的危机。最大序数悖论、最大基数悖论、罗素悖论都集中体现了“实无限”观的内在矛盾。

无限作为一种存在，不能用一种限制性的概念去定义它，如“固定的无限大”这一概念，无法描述真实的无限客体；一旦给了一个“界限”，这种无限就成为了一种有限。有限制的无限不是真的无限，而是一个有限。“实无限”是这样的一种有限制的无限，“完成的无限”

是一个有限制的无限，如最大基数、最大序数、概括原则。

我们知道第三次数学危机是因为集合论含有悖论而导致的。其中，罗素悖论是核心。后来数学家们给出了公理化的解决方案（如 ZFC 集合论），但只是在形式上解决了危机，有没有彻底解决危机不得而知，这是因为数学界没有找准问题的症结，没有认识到“实无限思想”是危机的罪魁祸首，是它导致了循环判断。（由于 ZFC 系统本身的无矛盾性至今没有被证明，所以至今不能保证在这个系统中今后不会出现悖论，虽然在 ZFC 系统中能够排除已经出现的那些集合论的悖论，并且 ZFC 系统应用到今天，尚未出现过其他矛盾。但是 Poincaré 指出：我们设置栅栏，把羊群围住，免受狼的侵袭，但是很可能在围栅栏时就已经有一条狼被围在其中了。由于 ZFC 系统不能保证在这个系统中今后不会出现悖论，从这个意义上来说，第三次数学危机并没有彻底解决。）

杜国平先生在《罗素悖论研究进展》（参见杜国平，2012 年）一文中对罗素悖论的原因进行了系统分析，认为导致悖论的原因不在于逻辑系统，而可能是在概括原则或集合论的基本定义上。在文《集合论-泛逻辑悖论》（参见杜国平等，2009 年）指出，通常的有穷值逻辑、可数无穷值逻辑和不可数无穷值逻辑系统中，概括原则都将导致悖论。

然而问题的根源恰恰就发生在概括原则上，因为概括原则（作为构造集合的基本原则）所依赖的哲学思想就是实无限思想。对“所有对象”的判断就是对“完成的无限”的判断，从而是一种实无限思想。

什么是概括原则？概括原则(Principle of Comprehension)是古典集合论的基本原则，指古典集合论中用以构造集合的一个重要规定或公理，其内容为无条件承认任给一个性质 P，人们就能把所有满足该性质 P 的对象，且仅由这些具有性质 P 的对象汇集在一起而构成一个集合。用符号来表示就是 $G = \{x | P(x)\}$ ，其中“|”左边的 x 表示集合 G 的任一元素，而“|”右边的 P(x) 表示元素 x 具有性质 P，{} 表示把所有具有性质 P 的 x 汇集在一起而构成一集合。因此，概括原则的另一表达式为 $\forall x(x \in A \leftrightarrow P(x))$ ，亦即凡是集 A 之元素必具有性质 P，反之，凡具有性质 P 的对象必为集 A 之元素。所以，概括原则是一条集合存在性公理。

在概括原则之下，其判断对象域是没有任何限制的。正是这种无限制的“所有对象”（实无限）导致了悖论的出现。对这种“所有”有两种理解，一种是代表“已存在的”（实际上是一种潜无限），一种代表“已存在的”和“即将产生的”（这实际上是实无限）。显然，悖论的出现是由于后一种理解导致的。前一种理解，认为这个判断对象面向历史而不是面向未来，是一种潜无限，而后一种理解则是既面向历史又面向未来，这显然是一种实无限性质的判断。这涉及到确定一个判断对象的标准，是对存在的判断，还是对一个即将出现的“未来”的判断。所谓“完成的无限”（即无限进展）并不是一个确定的量，而是一个变化的量，我们又如何对之进行判断呢？所以这种对“所有对象”的判断都是不可能的，从而是无效的。

按照人类对客观世界认知的规律、时间单向性、判断的方向性的事实，说明我们人类思维只能对确切存在的对象进行判断，这是知识层次性、历史发展规律、世界是具有层次性规律确定的。这种认识规律、时间的单向性、判断的方向性，就是一种潜无限思想。ZFC 公

理系统中“分离公理”的运用，本质就是将我们判断的对象限制在“已存在的”范围之内，即把集合的定义限制在由已知对象（已给集合）、已给性质共同确定的范围之内。例如，它不允许一切集合的集合存在，这正是潜无限的体现。因而，ZFC 公理系统能够从根本上杜绝悖论的出现。可以说，ZFC 公理集合论是一个潜无限性质的集合论，它弥补了素朴集合论的不足。

反之，如果我们坚持后一种判断对象标准，即将“未来的”也列入我们判断的视野，这必然导致循环判断，即“现在”的判断是对“过去+未来”的判断，而“现在”判断的结果又必然属于“未来”这一范畴，从而导致循环判断、导致罗素悖论的出现。这既是一种实无限思想，又是一种违背时间单向性原则的做法，必然给我们的认识带来混乱。

下面我们对最大序数悖论进行详细分析。

最大序数悖论，又称布拉利·福尔蒂悖论(Burali-Forti's paradox)。它是集合论历史上的第一个悖论。设 W 为一切序数组成的集合，即 $W = \{1, 2, \dots, \omega, \dots\}$ 。 $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 是自然数集， N 的序数是 ω ， ω 大于任一自然数，并且 ω 不属于 N ——这一点非常重要。可以看出 W 按序数大小顺序成一良序集，按照良序集的定义，故 W 本身也对应着一个序数 Ω ，并且 Ω 是最大的序数，其大于 W 中的任一序数，但按照 W 的定义，我们知道 Ω 也出现在 W 中，从而将有 $\Omega > \Omega$ ，而这是矛盾的。1897 年 3 月 28 日在意大利巴洛摩数学会上，布拉利·福尔蒂(C. Burali-Forti)宣读了一篇论文，提出了上述悖论，揭开了数学基础第三次危机的序幕。实际上，德国数学家康托 (Cantor) 早在两年前就发现了这个悖论，只是没有公开。

我们知道序数定义的一般过程是一个潜无限过程，而且所有新的序数都不属于前列，如 ω 不属于 N ；然而人们想把这个定义序数的无限过程一劳永逸地完成、结束——**这正是**一种实无限思想，从而将所有的序数都定义出来，因而产生出由所有序数构成的良序集，而这个集合也对应着一个序数，那么就带来一个疑问：这个序数是否属于这个序数集，从而导致了矛盾。由此可见，这个无限过程是不可能结束的。因为无限就是运动和变化，没有限制、没有终结，这正是潜无限（恶无限）思想。由于序数是不断生长的，即我们不可能定义所有的序数，所谓所有序数构成的集合就成为空中楼阁，因而是不能存在的。

同样而言，关于罗素悖论，应该说集合的构造必须符合“潜无限原则”，即概括原则必须遵循潜无限原则。构造是对存在的判断（即对历史的判断），是面向历史、而不是面向未来；坚持这一原则，则我们就可以清晰地解决罗素悖论问题。

我们知道，在有限无限问题上数学基础还存在着内在的不可调和的矛盾，如：线段是由点构成，而“点”没有测度，而“线段”则存在测度；没有测度的点构成了有测度的线段，这显然是矛盾的、荒唐的。从某种程度上说，点是我们人类强加给线段的。正因为数学基础中存在着这个内在的矛盾，从而导致了数学中的很多奇怪、荒唐的结果，从而影响了数学确定性的形象。这个问题的根本还是在于对有限无限矛盾缺少一个辩证的认识。对于点和线段的关系，我们有两种可以接受的认识：一种是，认为“线段由点构成”，但必须承认点具有一个“无限小”（变量）的测度，即点具有既是零又不是零的测度；另一种认识是否认线段由点构成，即线段不是由点构成，线段本身是一个具有测度的、基本的数学抽象对象，点不属于线段，点是我们强加给线段的，点仅仅是测度、位置的描述工具。这两种解释都能很好

的解决连续、离散问题。

因此，正确理解和把握“有限无限矛盾”、坚持对无限的辩证认识，是我们数学界、哲学界彻底解决数学危机的本质所在，对于健全数学基础大厦也有着极大的指导意义。

综上所述，我们对无限思想进行了全面的分析，认为无限过程可以完成的“实无限”观存在着不可克服的内在矛盾。在哲学、数学层面，黑格尔给出了符合辩证唯物主义思想的“真无限”概念（马克思、恩格斯进一步澄清和发展了这种思想），它集中体现了无限对象内在的本质和联系，这是实无限思想这种较低层次的、形而上学的、主观的唯心主义的无限观所无法相比的。我们相信，坚持辩证唯物主义无限观，一定会给基础数学的研究带来更加光明的未来。

（备注：本文内容已在美国杂志 Journal of Research in Philosophy and History 2020 年第 2 期第 3 卷在线发表）

参考文献

- 【1】 杜国平，王洪光，李娜，朱梧楹，2009 年：《集合论-泛逻辑悖论》，北京航空航天大学学报，2009 年 3 月，第 35 卷第 3 期。
- 【2】 杜国平，2012 年：《罗素悖论研究进展》，湖北大学学报（哲学社会科学版），2012 年 9 月，第 39 卷第 5 期。
- 【3】 恩格斯，1970 年：《反杜林论》，人民出版社。
- 【4】 恩格斯，1971 年：《自然辩证法》，人民出版社。
- 【5】 黑格尔，1974 年：《逻辑学（上卷）》，商务印书馆。
- 【6】 黑格尔，1987 年：《小逻辑》，商务印书馆。
- 【7】 何建南，1983 年：《黑格尔的数学无限思想及其意义》，外国哲学（第 4 辑）。
- 【8】 凌鄂生，1992 年：《恶无限性造成三次数学危机》，华东交通大学学报第 9 卷第 1 期。
- 【9】 鲁滨逊，1980 年：《非标准分析》，科学出版社。
- 【10】 马克思，1975 年：《数学手稿》，人民出版社。
- 【11】 彭加勒，2008 年：《科学与方法》，商务印书馆。
- 【12】 彭加勒，2015 年：《最后的沉思》，商务印书馆。
- 【13】 温纯如，2003 年：《黑格尔关于量与数学的无限性思想》，安徽大学学报，2003 年第 3 期。
- 【14】 维特根斯坦，2013 年：《数学基础研究》，北京，商务印书馆。
- 【15】 徐利治，2000 年：《数学方法论选讲（第三版）》，华中理工大学出版社。
- 【16】 休谟，2015 年：《人性论》，北京，商务印书馆。
- 【17】 亚里士多德，2016 年：《物理学》，北京，商务印书馆。
- 【18】 亚里士多德，2016 年：《形而上学》，北京，商务印书馆。

- 【19】 朱梧櫨，1987年：《几何基础与数学基础》，辽宁教育出版社。
- 【20】 朱梧櫨，2008年：《数学与无穷观的逻辑基础》，大连理工大学出版社。
- 【21】 朱梧櫨，2010年：关于 Cantor-Hilbert 对角线论证方法的分析与研究，南京晓庄学院学报，2010年第3期。
- 【22】 张洪，庄严，2019年：哲学无限与数学无限，数学教育哲学杂志（英国），2019年第35卷。

Dialectical Infinity and Third Mathematical Crisis

----- On the fundamental error of Actual infinity

Zhang Hong

(Bank of China, Taizhou, JiangSu, 225300)

Abstract :This paper discusses the problem of finity and infinity based on the philosophical perspectives of opposing idealism and receiving dialectical materialism. Based on Hegel's dialectical infinity view, this paper makes a comprehensive criticism of the thought of *actual infinity*. After Hegel's dialectical infinite thought scientifically explained the limit concept in calculus, the Second Mathematical Crisis caused by the contradiction of infinitesimal quantity was solved thoroughly. However, the mathematics world has not learned the experience and lessons in history, has always adhered to the idealist thought and methodology of *actual infinity*, this thought finally brought the third crisis to mathematics. At the end of this paper, based on the infinite view of dialectical materialism, the author analyzes the Principle of Comprehension and the Paradox of Maximum Ordinal Number, and points out that the essence of the Principle of Comprehension is a kind of *actual infinity* thought. Only by limiting the Principle of Comprehension to a *potential infinity* can we solve the Third Mathematical Crisis completely.

Keywords : actual infinity ; real infinity (genuine infinity,true infinity) ; the infinite view of dialectical materialism ; Infinite Exchange Paradox ; the Principle of Comprehension