辩证唯物主义无限观与诸流派无限思想分析

张洪

（中国银行，江苏省泰州市，225300）

摘要：众所周知，有限无限问题是数学的基本问题，也是哲学的基本问题。本文基于辩证唯物主义无限观对诸流派无限思想进行了详细分析、评论，进一步理清无限思想的发展历程，以期对基础数学的健康发展贡献微薄之力。与此同时，本文作者还提出了无限交换悖论，对 Hilbert 旅馆问题中的实无限思想进行了强有力的质疑。

关键词：实无限；真无限；潜无限；恶无限； 辩证唯物主义无限观

中图分类号： **(字号:楷体小五黑体)**　　　　**文献标识码：(字号:楷体小五)**

众所周知，面对数学基础的危机与统一，希尔伯特（Hilbert）、罗素（Russell）、彭加勒（Henri Poincare）、布劳威尔（Brouwer）、维特根斯坦（Wittgenstein）等数学大师和哲学大师都曾殚精竭虑，提出了自己的哲学主张和解决方案，为此各学派之间展开了激烈的争论。但是真理越辩越明，各大学派数学思想都有可取之处，现在是应该去甄别、归纳、统一、提升各学派数学思想的时候了。为基础数学的发展指明方向，这正是本文目的所在。由于在文《论哲学无限与数学无限的异同点》中作者已经对黑格尔、恩格斯无限思想进行了详细的分析，因此本文不再赘述。

一、辩证唯物主义无限观

在文《论哲学无限与数学无限的异同点》（上[1]179−186、下[2]180−186）中，作者对哲学和数学中的四个无限概念（真无限、实无限、恶无限、潜无限）进行了详细的分析、比较，给出了辩证唯物主义无限观的定义，即：**无限客观存在，无限可以认识，但是无限过程不可以完成；辩证唯物主义无限观的本质就是运动和变化。同时作者还详细分析和批判了数学中的“实无限思想”，指出实无限观实际上是彻头彻尾的唯心主义的无限观。**关于辩证唯物主义无限观，作者进一步表述如下：

任何无限都是恶无限与真无限的辩证统一（统一体），它是一种客观存在，无限性本身包含了有限无限矛盾，无限的客观存在性并不代表无限过程能够结束、完成。真无限就是无限事物内在的质的规定性，就是内在联系、规律、真理，而恶无限就是无限进展，没有终止的重复、交替，深刻地体现了有限无限矛盾；真无限可以认识、完成，而恶无限不可以认识、不可以完成，恶无限（无限过程）是“有限无限矛盾”的具体表现而不是这种矛盾的解决，这就决定了有限无限矛盾永恒不灭；真无限代表了无限的质（本质），而恶无限代表了无限的量（运动和变化）；真无限离不开恶无限，恶无限是真无限的载体，真无限是恶无限的目标和方向。真无限是现实的、具体的、肯定的、积极的、理性的、完成的无限，是自为的存在和理性的存在，是完成了的质；而恶无限是可能的、抽象的、否定的、消极的、不可完成的无限，是自在的存在和知性的存在。

无限存在而不可完成、不可穿越，无限是一个黑洞，但是无限可以扬弃、可以超越。过程（恶无限）永远，规律（真无限）永恒；过程是变量，规律是常量；无限不可穿越，但可以超越，超越的结果是一个真无限。无限的存在性与过程的不可完成性是完全不同的两个概念，它们是矛盾的两个方面，不可相互替代；正因为它们的存在，才有有限无限矛盾的存在；无限，就像一个黑洞一样，有进无出，无穷无尽，永远不能结束。辩证唯物主义无限观坚持这种矛盾的不灭性，认为无限客观存在、可以认识，但是无限过程却不可以完成，即有限无限矛盾永恒不灭；而实无限观则把无限的客观存在性当成无限过程的完成性，用客观代替主观，用真无限代替恶无限，彻底抛弃有限无限矛盾，从而认为这种矛盾是可以终结、可以解决，因而其思想是遵循了康德的先验的、主观的、形而上学的无限思想。

二、亚里士多德的无限观

亚里士多德是古希腊哲学的集大成者，马克思称之为古希腊哲学家中最博学的人，恩格斯称之为“古代的黑格尔”。他的无限思想主要是：无限存在，但是无限不能以现实的方式存在，也就是说无限只能潜在；无限不能与感性事物分离，不能单独自身存在。

他承认无限存在。在《物理学》中，他指出：“但是，如果说根本没有无限，显然许多说不通的结论就会因而产生，例如，时间就会有开始和终结，量也就不能分成更小的量，数也不会是无限的。” [3]85 。他对“无限”的涵义进行了分析，认为无限的本质在于“此外永有”：“‘无限’的真正涵义正好与平常大家理解的相反，不是‘此外全无’，而是‘此外永有’。……,而‘此外再无’的东西是‘完成的’或‘完全的’。”[3]87 。在《形而上学》一书中，他认为无限的本意就是不可穷尽；他是这样描述无限的：“无限（无尽）或（甲）是不能达到尽处的，因为它的本性就是不可尽（这于声音总是看不到的有所类似）或（乙）是容许无尽地进行的，或是（丙）很难进行到尽处，或是（丁）虽则自然地可到尽处，却从未到过尽处。……。说无限是一个可分离的独立实是而又不可得见，这是不可能的。”[4]253

他认为无限不是一种现实存在，也就是说在人类主观世界中不可能有真实的无限。他指出：“没有现实的无限物体”[3]85 ；“事物被说成‘存在’，一种指潜能的存在，另一种是指现实的存在。……。现在，如我们已经说过的，量在现实上不是无限的，但分起来却是无限的（驳斥‘不能再分的线’是不难的），因此，只有潜能上的无限。……，但无限不是这样，不会有现实的无限。”[3]85 ；“因此，既然没有任何一个感性的量是无限的，也就不可能有一个超过一切已定量的量。”[3]89 ；“也很显然，无限不能作为一个实现了的事物、一个实体或根源。”[3]79 。

他认为无限是潜在的、无限不可穿越，无限不能与感性事物分离，不能单独自身存在。在亚里士多德看来，无限是一种关系或属性，是客体存在的表现形式，即客体的量的存在形式，因而也可以说是客体的一种属性，即客体的量的属性。如时间、空间具有无限属性，也因此称时间空间是无限的。他指出：“无限是一种脱离感性事物的自在的无限----这种说法是不可能的。”[3]79 ；“总的说来，不可能有感性物体是无限的。”[3]82 。他认为无限

是不可穿越的，“无限者一种是指不可能有‘穿越’的事物，……。另一种是指，虽可以谈得上穿越，但穿越不到尽头的（……）事物。”[3]78

数学中的实无限思想实际上起源于古希腊哲学家柏拉图（Plato）。“但这和‘无限是一个实现了的事物’的说法又有矛盾，因为后者必然是一个一定的量。因此，无限是作为属性属于实体的”[3]80 。在柏拉图看来，无限是一个可以完成、实现的事物，也就是无限过程是可以完成的。柏拉图认为无限是一种实在，“有些人，如毕达哥拉斯派和柏拉图，把无限看作为自在的实体，而非其它事物的属性。”[3]75 ；“可是柏拉图则主张有两个无限：大和小。”[3]76 ，但是柏拉图从来没有使用过这种无限大、无限小。

综上所述，亚里士多德的无限思想是一种朴素的、唯物主义的无限思想，仅仅从量的方面分析了无限，但是却深刻的揭露了恶无限的本质。

三、逻辑主义学派的无限观

其主要观点：认为能把全部数学化归为逻辑，承认实无限观点下的无限集理论，承认无限性对象的存在性，从而承认实无限性研究对象在数学领域中的合理性，因此，就无限观而言，逻辑主义学派是实无限论者，罗素是其典型的人物代表。就无限的存在性，这一点与辩证唯物主义无限观是完全一致的。辩证唯物主义无限观认为，无限是一种客观存在，它承认数学把无限性客体作为一个研究对象的合理性，它认为无限客体的整体性与无限客体内在的过程性是完全不同的两个概念（而逻辑主义学派却没能区分），它所反对的就是在具体的数学方法、步骤中涉及无限过程的完成性。然而，逻辑主义学派面临无穷公理、选择公理的挑战，为解决集合悖论而发展了“分支类型论”，从而变相地回归到潜无限思想上去。因此，逻辑主义学派最终没有能逃离恶无限，从某种程度上也可以说，他们回归到辩证唯物主义无限观的发展道路上。

四、形式主义学派的无限观

形式主义学派的本质是将系统形式化、公理化，认为数学是纯粹的符号游戏，认为数学的真理性在于形式系统的无矛盾性，他们根本不关心数学的客观实在性。以希尔伯特（Hilbert）为代表的形式主义派在“无限问题”上本身就是矛盾的，一方面他们承认无限集理论，因而承认“无限”的实在性，是典型的实无限论者，但是在另一方面，在具体的应用中又坚持“有限主义原则”，对实无限性的概念和方法的使用顾虑重重，几乎和直觉主义者一样认为可信性只能存在于有限之中，认为无限性对象是超越直觉而不可信的，因此又是一个“潜无限”论者。因此朱梧槚先生生动地把希尔伯特称之为“幕前的实无限论者”和幕后的“有穷主义者”[5]146 。这充分说明了希尔伯特在无限问题上的矛盾性，根本原因就在于其没有认识到无限问题的辩证性，没有看到无限是真无限与恶无限的矛盾统一体，也没有看到无限的“存在性”和“过程的完成性”是完全不同的两个概念。因此，在“无限性对象”存在性问题上，形式主义学派与逻辑主义学派是一致的，并与直觉主义学派相对立；在

具体的数学推理方法中希尔伯特（Hilbert）坚持有限性原则，这又与直觉主义学派站到了同一阵线上。因此可以讲，希尔伯特是一个不那么坚定的实无限论者、一个矛盾的实无限论者，他的无限思想更接近辩证唯物主义无限观。

五、直觉主义学派的无限观

其主要观点：坚持潜无限而排斥实无限，“存在必须被构造”是其口号，坚持从“可信性”考虑数学概念与方法，认为自然数集 N 永远处于构造之中，认为实无限性对象是不可构造的，它不承认无限作为一个客体的存在性，所以，其无限观是典型的潜无限，其哲学观属于典型的主观唯心论。其典型的人物代表有彭加勒、布劳威尔。彭加勒主张最基本的直观，无需再作进一步的分析就可认为是可信的，多次谴责实无限集合观念，主张潜无限概念；而布劳威尔则旗帜鲜明提出了“存在必须被构造”的观点，从而成为直觉主义的奠基人。

因此，直觉主义无限观与辩证唯物主义无限观是完全背道而驰的。辩证唯物主义无限观既坚持无限客体的存在性，又坚持无限过程的不可完成性，而直觉主义无限观只机械地看到无限过程不可完成（这一点与辩证唯物主义无限观一致）， 并由此否定无限客体的存在；它只看到量变，而看不到质变，只看到局部，而看不到整体，只看到人类思维的有限性，而看不到人类思维的能动性。因此，直觉主义者不能超越恶无限过程而发现无限事物的真谛(即真无限）。

关于“无限是否能被构造”问题，我们从辩证唯物主义无限观的角度来讨论。由于无限性包含了有限无限矛盾，因此无限的构造问题本质就是一个有限无限问题。所谓“构造”，首先是一个主观行为，因而也是一个有限性的概念，从这一点讲，任何“构造”必然陷入一个无限过程中、陷入恶无限中，因而不可能完成，从而我们自然得出这一结论：无限是不可能被构造的。任何一个“构造”，是对存在的判断，都是一种潜无限、一种无限过程，这充分体现了有限无限矛盾。如果说自然数集 N 是构造的，那就是不完全的、不可完成的；如果说 N“已构造出来”，那也仅仅是我们想象的完成的“无限”，而构造过程仍然独立存在着，所以自然数集 N 作为一个无限物是不可构造的。同样而言，关于罗素悖论，应该说集合的构造必须符合“潜无限原则”，构造是对存在的判断，是面向历史、而不是面向未来；坚持这一原则，则我们就可以清晰地解决罗素悖论问题。

上述，我们从过程的角度即从恶无限角度解释了无限是不可构造的。然而，由于无限既可以完成（共性、内在联系，作为真无限）、又不能完成（从过程看，作为恶无限），因此，从真无限的角度，无限又可以被构造。让我们从真无限的角度来构造这个集合。我们规定以下这一构造规则：令 n 的“后继” $n^{+}=n+1$。这一构造自然数集 N 的规则是一个真无限，它明确了任一元素与其“后继”的逻辑关系（前者是后者的条件），从而确定了所有自然数之间的内在联系和规定性。有了这样的规则，再加上一个“原点”，同时明确经此规则所生成的一切元素组成一个集合，这样一来，我们所需要的自然数集 N 也就构造出来了。这种构造方法，本质是通过“共性”（即内在联系、规律，一个真无限）来构造一个具有“序结构”的无限对象，因此这种构造与其叫做“构造”，不如称之为“定义、规定或公理”，

这样可能更恰当一点。因此，从真无限的角度，也就是说从内在的联系、逻辑关系的角度，自然数集 N 是可以被构造的，这也就承认了自然数集 N 作为一个无限客体存在的合理性。这正体现了人类思维的能动性，实现了人类对无限认识的飞跃。然而这种基于真无限思想对无限物的构造，并不表示我们可以完成一个无限过程，因为存在的无限不等于可以完成的无限。

六、哲学大师维特根斯坦的无限观

维特根斯坦是 20 世纪最有影响力的哲学家之一，特别是他的数学哲学思想引来了旷日持久的争论。他的无限思想主要是：他反对实无限，反对无限的客观存在，认为无限是一种以法则表示的无限可能性而不是现实性；他反对一个无限集合与自己的子集的一一对应，反对使用康托的“对角线法”，因而是一个典型的潜无限论者。

他否认无限的现实性。他认为无限的现实性是不能证实的，符号不能表述无限的现实性。正如他在《数学基础研究》中所说，“它说，实无限根本不能用数学的符号系统来把握，因此它只能被描述出来而不能被表现出来。这种描述或许是以类似于下面这样的方式将它把握住的：对于不能全部拿在手中的大量的东西，人们是通过将其打包放入箱子中的方式将其提起来的。”[6]210

他反对使用康托的“对角线法”，认为有限不能穷尽无限。“因为我们有如下正当的感觉：在能够谈论最后一个东西的地方，在那里便不能出现‘根本没有最后一个东西’。”[6]207；“（请不要忘记：数学家们有关无穷的思考毕竟都是有穷的思考。借此我想说的是这点：它们都有一个尽头。）”[6]228

他认为无限、有限是完全不同的范畴，无限是一种内在的规定性。他认为无限不是数字，无限不是一种同有限相竞逐的量的大小，而是一种内在的规定性。他指出，“‘无穷集合’和‘有穷集合’是两个不同的逻辑范畴，可以有意义地表述给一个范畴的东西不能有意义地表述给另一个范畴。”[6]206。**以数字π为例，数字π表达了一个与实际的观察相伴随的无限的规律，即数字π是一个规则。这实质上就是黑格尔的真无限思想。**

他认为无限是一种可能性。他认为有限与无限不是量的差别，而是一种逻辑上的区别；无限不是量也不是广延，无限是以法则表示的无限的可能性，无限本身不可比较大小，因而其认为的这种无限可能性实际上是一个变量、一个过程（恶无限）而不是结果。因此，维特根斯坦又是一个潜无限论者。

因此，维特根斯坦的无限思想基本遵循了黑格尔的辩证无限思想。他唯一的欠缺是否认无限的客观存在，并与直觉主义者为伍但是又超越了他们。然而，他的无限思想最终没有能够上升到黑格尔辩证无限观的层面，没能把握无限作为“自为无限”---真无限的哲学意义。

七、一一对应原则、Cantor-Hilbert 对角线法

在 Cantor 的“超穷数理论”中有一个核心而基本的概念，就是“一一对应原则”，Cantor 对无限的划分就是根据“一一对应原则”作出的判断。可是“一一对应原则”本身在“有限

无限问题”上就是一个需要解释清楚的概念，我们何以知道在有限范畴内正确的概念会在无限范畴内也正确呢？ “一一对应原则”在面对无限时，就必然遇到“恶无限”这个问题，而基于这个可疑概念的对无限的等级划分，本身就变得何其荒唐。“一一对应原则”是康托（Cantor）“实无限”思想的根基，因此基于“有限”的“一一对应原则”不能作为衡量“数学无限”间等价与否的根据。

“一一对应原则”或“一一映射”本质上是来自于、属于“有限”范畴内的东西， 在将它推至无限范畴时， 这只能是一种公理性的规定或假设， 而不是事实上能“证明”或“推断”出来的“必然”，因为我们不可能穷尽一个无限对象。从而，依赖于“一一对应原则”而建立起来的“无限之间等价性”这一概念已经是问题的中心和最值得怀疑的东西。

有限与无限的一个重要区别还在于：**有限是一个“闭区间”，有始有终，而无限是一个“开区间”，有始无终。这深刻的反映了有限范畴与无限范畴的重大区别。**

朱梧槚先生在其著作《数学与无穷观的逻辑基础》中，也对将“一一对应原则”应用到无限集合上进行了质疑。他指出，“一一对应原则用在无穷集合上，也是一种枚举手续，而枚举手续在没有穷举该枚举手续之前，永远是一种现在进行式（going），从而它所面对和指称的必然是潜无限”[5]211。在这篇著作的第七章的最后部分，又进一步强化了这一思想，他说，“事实上，在传统集合论中，对于势这一概念的建立，完全决定于‘一一对应原则’，而一一对应原则的使用，除了给出一个对应规则（或对应函数）之外，剩下的就只有对集合中元素的任意递归枚举了，但是任意递归枚举集合之元素至多只能是一个潜无限进程，从而至多只能适用于潜无限弹性集合。康托将基于任意递归枚举的一一对应原则任意应用到实无限刚性集合上是没有根据的，特别是任意应用到不可数集合上就更无根据了，因为即使在传统集合论观念下，也都承认任意递归枚举至多到可数无穷，既然如此，试问立足于任意递归的一一对应原则，又如何能去决定不可数实无穷集合的势呢？ 所以用一一对应原则来决定各种各样实无穷刚性集合的势是很有局限性的。”[5]296

关于“无限之间的大小问题”，黑格尔给出了明确的论述。**黑格尔认为无限大小是可比较的，而且只有在真无限的意义上才可以比较大小，即在无限的质的规定性意义上比较大小。**仅仅处于比例中的东西不再是定量，而是质的规定，“与此相反，质的东西恰恰只是在它与一个他物相区别那样的东西。因此，那些无限的大小不仅是可以比较的，而且只有作为比较或比例的环节”[7]276。比例中的两个无限，是两个无限进展，而它们的变化率就是一种真无限，体现了一个质的大小规定性。

关于“Cantor-Hilbert 对角线法”这种具有“实无限”思想论证方法的有效性，朱梧槚先生也给出了旗帜鲜明的质疑[9]。“Cantor-Hilbert 对角线法”本质上与“一一对应原则”相同，也是一种潜无限性、过程性的方法，是一种不可完成的方法，不可以用来证明“实无限”（整体无限）的整体性性质。我们在处理“Hilbert 旅馆问题”时，如果基于同样的实无限思想，我们将会得到“无限交换悖论”。把自然数集 N 作为一个整体的方法本质是一个有限性的方法，如同 N 的幂集定义一样，这都是有限性、整体性的方法。**两个不同的无限，除非我们事先知道它们之间的“关系”（即内在的质的联系），否则我们将无法把它们区分；**如自然数集 N 与它的幂集 P（N）存在着幂集关系，正是基于这种关系，我们才能

区分它们、比较其大小。**我们只能在"真无限"的意义上比较不同无限之间的大小，即在不同无限的内在质之间的联系上比较大小；也就是说，有内在联系的不同无限才可以比较大小，没有内在联系的不同无限不可以比较大小，正是基于这一点，我们才认为选择公理的正确性。**

八、无限交换悖论

所谓"无限交换悖论"是指我们使用实无限思想----也就是认为无限过程可以完成的思想，我们可以将两个等价（具有"一一映射"关系）的无限变换成相互不等价的无限。这深刻的揭露了实无限思想存在的内在缺陷，它将矛盾推移到无限远处，可是矛盾从没有消失。也就是说无限过程根本不可能完成，从而进一步佐证了辩证唯物主义无限观。

该悖论具体如下：

已知一一映射 $f:N\to W$，其中 N 为自然数集，$W=\{a_1,a_2,a_3,......\}$ 是一个可数无限集。对 $\forall n\in N$，有 $f(n)=a_n\in W$。

下面进行一系列连续的变换，并且我们认为这个无限过程可以完成、终结。令 T 代表变换，T(n)代表第 n 个变换 ：

T(1)： 将自然数 1、2 的"象"交换， 使得 1 对应于 a_2 ，而 2 对应于 a_1；

T(1)完成之后，进行变换 T(2)： 即将 2、3 的"象"交换，使得 2 对应着 a_3，而 3 对应于 a_1 ；……；

到变换 T(n) 时，它发生在变换 T(n-1)之后， 即将 n、 n+1 的"象"进行交换，使得 n 对应于 a_{n+1}，而 n+1 对应于 a_1； 以此类推，直到无限，并且我们认为这个无限过程可以完成。

在这无限个连续的变换结束之后，我们将会发现以下矛盾：即我们再也找不到哪一个自然数，使得它对应于 W 的元素 a_1 了。 这就是"无限交换悖论 "。

九、非标准分析

1、常量的无限大、无限小是非标准实数模型中的概念，不是标准模型下的实数，因此其存在性仅仅是相对的。这种存在性仅仅指其"理论存在性"，不同于客观存在性或物理存在性。在标准模型下，无限大、无限小不是一个实体，而只是一个变量。在哲学层面，固定的无限大、无限小是无法给予理性解释的，本身就具有内在矛盾性。所以，也可以说，常量的无限大、无限小都是数学的抽象，是非标准分析中的"想象的数量"。现实世界是第一性的，而数学抽象是第二性的。这种常量的无限小、无限大只有在非标准分析下才有意义。

2、无限大、无限小在标准分析、非标准分析下本质是相同的。在标准分析下，无限小 dx 是一个变量；在非标准分析下，无限小 dx 是一个常量，但实际上还是一个变量。正是基于这样的一种解释，才有标准分析与非标准分析作用等价一说。把"无限小"看成常量或变量，不改变数学的真无限的本质。

在非标准实数模型中，有无限多个无限大（无限小），无限大（无限小）实际上是一个相对的常量，代表了一群无限大（无限小），或者说是代表无限大（无限小）的变量，是一个相对的固定的变量（与其说是常量，不如说是变量）。在非标准分析中，没有最小的无限大（这不同于 Cantor 的超穷序数）。**因此，这种无限大数 a 是我们想象的、任意定义的、抽象的，不是具体的，正如恶无限是抽象的一样。**所以，这个 a 看似是一个“常量”，实际上代表一群数，代表了所有的无限大；a 仅仅是这些无限大中的一个代表，或者说它就是一个无限大的变量。这就是说 a 具有相对性（相对的静止），体现了运动和静止的辩证关系。所以 a 的物理实在性得不到可靠的证明，这与具体的标准模型下的实数、特别是自然数的实在性是根本不同的。前者是虚无缥缈的、相对的常量，而后者是真正的常量，或者说前者根本就不是一个常量。用相同的办法，我们还可以构造“二级无限大”、“二级无限小”、多级无限大和多级无限小。这就如同 Cantor（康托）所定义的超穷序数。**这就是为什么 A.Robinson 认为非标准分析中的无限大、无限小的实在性并不代表无限小量具有真实性或客观性，他认为引进无限小量的意义只在于使形式化的数学推演得以顺利进行，并不涉及无限小量是否真的存在这种本体论问题。**这是他非常科学而理性的思考，从辩证唯物观的角度看，无疑他比谁都看得更清楚。正如他所说，“我们这个理论，与其说是引进了新的数学的对象（entities），不如说是引进了新的演推过程”[8]326。

鲁滨逊（A.Robinson）继承和发展了莱布尼兹（Leibniz）的无限思想，他们的无限观点本质是一致的，因而他俩都是潜无限论者。A.Robinson 非常认同 Leibniz 对于无限大、无限小的评价：“它们只是一种虚构，但是有用的虚构”[8]325。在《非标准分析》中，A.Robinson 直接引用了 Leibniz 的原话：“老实说，我不十分相信，除了把无限大和无限小看作是理想的东西，看成确有根据的假定而外，还有什么必要去考虑它们。我相信，决没有什么生物凌驾于其他无限多的生物之上，但我决不相信有无限大，也不相信会有无限小，这我相信是能够证明的”[8]306；“我将向他们作证：我不相信会有真的无限大和真的无限小量；它们只是一种虚构，但对于缩短论证和在一般叙述中，是有用的虚构。”[8]306。

鲁滨逊最后这样分析，**“目前，大多数的数学家，都保持着 Cantor 的观点。但是，历史的回顾，也许给我们这样的启发：如果说在十八世纪中获得胜利的微积分，在它以后的一百年内，仍须另打基础，那末，未来世代里的数学家，即使承认集合论的形式结果，也许要抛弃它的柏拉图（Platonistic）色彩。”[8]325**。因此，从某种程度上，我们可以说莱布尼兹和鲁滨逊都是想抛弃 Cantor 集合论的“柏拉图色彩”，也就是说要抛弃 Cantor 自认为抓住了“实在的无限”的思想。

因此，可以说，鲁滨逊完全继承了莱布尼兹的无限思想，认为无限大、无限小（作为常量）是一个实用的工具、一种有用的虚构，而不是真实的存在。即使是集合论、超穷序数的创立者 Cantor 先生，一个典型的实无限论者，他也否认无限小数，并声称他能用他的理论证明无限小数不存在。**只是，他们承认了无限作为一个客体的存在，并想用一个“数”去表达这种存在性，因而才有了无限大、无限小作为一个存在的常量的设想。**

作为无限小量，dy/dx 仍是表示在无限小的一段区间内的均量，这与现代极限理论仍然是一致的，把“无限小”看成常量或变量，不改变数学的真无限的本质。

常量无限的哲学错误在于，把“无限整体”看成一个固定的数，把无限当成有限，抛弃了有限无限矛盾（恶无限），实际上是用静止而非运动的眼光来看待事物。a 和ω就像一个纯粹在有限彼岸的无限，与有限（无限进程）没有内在的联系，有限、无限分属于两个不同的世界，这正是黑格尔、康德所坚决反对的实无限。

3、 **无论标准、还是非标准实数模型，都没有摆脱“恶无限问题”（有限无限矛盾问题），也就是说恶无限是一个根本问题。**

实无限论者从来就离不开恶无限。其实，Cantor 先生在其集合论中，一直在使用恶无限，比如说超穷序数ω的生成过程，从任一普通自然数 n 出发，是到达不了ω的，这就是一个恶无限。也就是说，那些坚持“实无限观”的数学家，根本不可能离开恶无限过程。可以说，离开恶无限，就没有 Cantor 的集合论。根据“第二生产原则”（second principle of generation）所生成的新数ω，这本质就是恶无限。**而ω纯粹在无限进程的彼岸，它无法体现自然数集 N 的内在本质。**

恶无限总是存在着。在非标准模型内，从有限自然数 n 到无限大数 a 是不可达的、不连续的，因为 a 大于一切有限自然数，因而，这个过程就是恶无限过程。即使认为从有限自然数 n 到 a 可达的，它们之间存在一个“超有限链条”，可是 a 之后又是什么呢？ 这又是一个恶无限过程。这又变相的回到标准模型在无限远处的运动情况。所以，对于非标准模型，我们可以称之为无限远处、无限小处的标准模型。只是，在标准模型内，我们把“很大或巨大的自然数”或“充分大的数”看成是 a。这也是为什么，人们证明了标准分析与非标准分析的等价性。

所以黑格尔坚决反对这样的“实无限”：有限坚持在这边，无限坚持在那边，与无限过程没有任何联系。a、ω就是这种典型的“实无限”，有限实数与无限大是不同的两个世界的产物，我们可以把ω看成是一条新直线的起点。

什么是“完成了的无穷”？从来就不是说要完成一个无限过程。在康托看来，这是将一个无限客体表示成一个“数”的形式，如用ω代表自然数集 N={1,2,3，……}的多少。这是康托、鲁滨逊、莱布尼兹的思考，但是他们都没有离开过恶无限，而且也不可能离开恶无限。**用一个数代表一个无限客体的“大小、多少”，这是他们的梦想，也是他们的良好的愿望或一厢情愿的理想，但总会遇到更大的无限，**而且这个过程是没有止境的，这个过程本身就是一个新的“恶无限”。这种“完成了的无限”（即实无限）只会让我们得到片刻、暂时的安宁，仅仅是片刻的安宁，因为总有更大的无限等待着我们。这种观念的错误在于其强调静止而否定运动，但是有限无限矛盾永远存在，静止是相对的，而运动是绝对的、永恒的。

4、 **非标准分析是一个很好的数学工具，与标准分析本质是统一的。**

如果离开标准模型，单独研究非标准模型，我们将会遇到在标准分析中遇到的同样问题，如 dy/dx 的解释问题。另一方面，我们总是要从非标准分析回归到标准分析，才能解决我们所面临的实际问题，也就是说，必须从微观回归到宏观上来。在非标准实数模型中，无限大、无限小（作为常量）实际上一个“离散”工具，一个非常实用的离散工具。因此，非标准分析可以看作是一个离散方法，而标准分析是一个连续方法。

十、总结

综上所评，我们对各种流派无限思想进行了分析、评判，**认为无限过程可以完成的实无限观存在着不可克服的内在矛盾。**在哲学、数学层面，黑格尔给出了符合辩证唯物主义思想的“真无限”概念（极限是一种真无限），它集中体现了无限对象内在的本质和联系，这是实无限思想这种较低层次的、主观的唯心主义的无限观所无法相比的。我们相信，坚持辩证唯物主义无限观，一定会给基础数学的研究带来更加光明的未来。因此，正确理解和把握“有限无限矛盾”、正确认识真无限与恶无限，是我们数学界、哲学界彻底解决“第三次数学危机”的本质所在，对于彻底认识“罗素悖论”的哲学意义也有着极大的指导意义。

（备注：本文内容已于 2019 年在英国杂志 Philosophy of Mathematics Education Journal 第 35 卷在线发表）

参考文献

[1] 张洪、庄严. 论哲学无限与数学无限的异同点(上)[J]. 吉林省教育学院学报 ,2018(02) :179-186.

[2] 张洪、庄严. 论哲学无限与数学无限的异同点(下)[J]. 吉林省教育学院学报 ,2018(03) :180-186.

[3] 亚里士多德. 《物理学》[M]，张竹明 译，北京：商务印书馆, 2016。

[4] 亚里士多德. 《形而上学》[M]，吴寿彭 译，北京：商务印书馆, 2016。

[5] 朱梧槚. 《数学与无穷观的逻辑基础》[M]，大连：大连理工大学出版社, 2008。

[6] 维特根斯坦. 《数学基础研究》[M],韩林合 译， 北京：商务印书馆,2013。

[7] 黑格尔. 《逻辑学（上卷）》[M]，杨一之 译，北京：商务印书馆，1974。

[8] 鲁滨逊. 《非标准分析》[M]，申又枨 王世强 张锦文 译，北京：科学出版社， 1980。

[9] 朱梧槚 ,2010 年 :关于 Cantor-Hilbert 对角线论证方法的分析与研究[J]。南京晓庄学院学报 ,2010 年第 3 期。

An Analysis of the Infinite View of Dialectical Materialism and the Infinite Thoughts of Various Schools

Zhang Hong

(Bank of China, Taizhou, JiangSu, 225300)

Abstract：It is well known that the problem of finity and infinity is the basic problem of mathematics, and it is also the basic problem of Philosophy**.** Based on the infinite view of dialectical materialism, this paper makes a detailed analysis and comments on infinite thoughts of various schools, and further clarifies the development course of infinite thoughts in order to contribute to the healthy development of basic mathematics. At the same time, the author puts forward the *Infinite Exchange Paradox*, which strongly questions the idea of actual infinity in *Hilbert Hotel Problem*.

Keywords： actual infinity; real infinity; potential infinity; bad infinity; the infinite view of dialectical materialism