错误的连续复利法为什么能长期存在

高俊科

（河北广播电视大学， 050071）

摘要：错误的连续复利长期广泛存在于多门课程的教材中，其原因当是思维脱离实际生活，盲目崇信权威。

关键词：利率；复利；连续复利

[中图分类号] F830 **[文献标识码]** A

所谓连续复利的基本思路和叙述是[1-12]：设本金为A_0，年利率为r，则t年的本利和A为

$$A = A_0(1+r)^t \tag{1}$$

如果每年结算m次，每次计算利率为r/m，则有复利分期计算公式

$$A_m = A_0(1+r/m)^{mt} \tag{2}$$

令$m \to +\infty$，则得所谓连续复利计算公式

$$A(t) = A_0 e^{rt} \tag{3}$$

1988年北京科学出版社出版的远山启的中文翻译本《通俗数学》中对由（2）推导（3）说，“当还息的次数无限增多时，其结果就是要在瞬间还利息。即连续的还利息的复利法。由此，数学家雅科布·伯努利（1654—1705）把它称为“连续复利法””[2]，就是说，这种所谓的连续复利计算存在有300多年了。

我们批驳连续复利的文章《关于所谓增长率的连续计算问题》1988年发表在《数学的实践与认识》上[13]，30年过去了，这种所谓连续复利计算仍广泛存在于经济数学[1,4,9]、工程经济学[6]、金融学[7,10]、财务管理[8]、衍生工具[11]等课程教材中，有的书中把这种连续复利法用在化学反应[3]、树木生长[11]和国民经济增长[12]等问题的计算中去。普通利率本身就当是资金连续地复利的结果[14]，从各方面看连续复利都是错误的[15]，但这错误的连续复利至今为什么还能广泛存在？原因当是思维脱离实际和盲信权威的结果。

一、思维脱离实际生活当是连续复利能长期存在的一个重要原因

实际生活中资金使用权转让的时间、利率数值以及计息方法都是双方同意的，对同一个年利率r，从（1）式改变为（2）式计算，这就增大了本利和的数值，为资金出借方增大了收益，使资金借入方增大了支出，资金借入方是不会同意的，这种从（1）到（2）的所谓推导只能是资金出借方单方面的思维，是脱离实际生活的思维，许多教材中关于连续复利公式（3）的解释和应用也是非常脱离实际生活的。

例1　2006年立信会计出版社出版的《高等数学》（上册）说，计算次数$m \to +\infty$，得到连续复利公式（3），“这意味着资金运用率最大限度的提高”[5]。

在实际经济活动中，资金运用率的提高是在具体的资金调度、运转和使用中实现的，与公司自己使用什么公式单方面的计算无关，脱离开资金的具体运转，单靠这个公式不会“意

味着资金运用率最大限度的提高”；在关于资金出借方和借入方利息的计算中，在给出年利率r后，如果事先约定按连续复利公式（3）计算，这不存在谁的资金运用率提高的问题；在给出年利率r后，如果事先约定按复利公式（1）计算，后来再想改变成用公式（3）计算，这对资金出借方是资金运用率的一种“提高”，没有特别情况，资金借入方是不会同意的；即便是双方后来同意提高利息，运用（3）式也不“意味着资金运用率最大限度的提高”。因为双方同意提高利息的手段可以有很多，例如将原先的利率r高成$1.5r$，这就有可能大于不改变利率r而改与公式（3）计算所得A_0e^{rt}。所以，使用公式（3）“这意味着资金运用率最大限度的提高”是一句完全脱离实际生活的思维。

例 2 在讲述由公式（1）到公式（3）的推导过程中，极少有教材讲其应用背景，2007年清华大学出版社出版的一本《金融学》中以APR表示分期计算的名义年利率，以EFF表示有效年利率，给出二者有如下关系：

$$1+EFF=(1+APR/m)^m$$

然后以银行提供 A、B、C 三个贷款产品的例子接着的叙述是：

“运用上述公式，我们计算 A、B、C 三个贷款产品的有效年利率。计算结果见表 5-1。从表 5-1 中我们看到，C 产品的有效年利率最低，即该种贷款对借款人而言成本最低，所以应当选择 C 产品。

表 5-1　年度百分率（APR）与有效年利率(EFF)

贷款产品	计息次数	m	APR%	EFF%
A 产品	一月一次	12	12	12．68
B 产品	半年一次	2	12．2	12．57
C 产品	一年一次	1	12．5	12．5

当每年计息次数m趋向于无穷大时，即连续不断地进行复利时（连续金融概念），有：

$$1+EFF=\lim_{m\to\infty}(1+APR/m)^m=e^{APR} \quad (5\text{-}6)$$”[7]。

我们可以看到，这里所举银行提供不同期贷款的表 5-1 的例子不支持连续复利公式（5-6），也就是本文中（3）式的推导，表 5-1 中不同期的贷款的名义年利率APR随一年中计息次数增加而减小，而公式（5-6）也就是本文中（3）式的名义年利率是不变的。表 5-1 的例子实际正好说明了公式$1+EFF=(1+APR/m)^m$，也就是本文中的复利分期计算公式（2）不可用，这正好说明公式（5-6），也就是连续复利公式（3）的推导是背离实际生活的。还有就是，银行给出 A、B、C 三个贷款产品是针对了不同用款人的需要，人们在选择某种产品时，并不是把一年时间的有效年利率的大小作为唯一标准，还要考虑自己用款的时间。比如说，我需用 6 个月的贷款，就应当选择 B 产品了。该书不分情况地认为“应当选择 C 产品”，也是一种脱离实际生活的思维。

例 3　2010 年机械工业出版社出版的《衍生工具》（英文翻译本）在推出连续复利公式

（3）后说，“乍一看，连续利率似乎与现实不符，但恰恰相反。假设我们要对树的增长建模，树木并不是以离散的方式增长，其增长是连续的，如果假定树木的当前高度是 50 英尺，每年增长率为 5%，树木 6 个月后的高度将是 $50e^{0.05(0.05)} = 51.266$ 英尺”[11]。

连续复利公式（3）是错误的，应该说，该书也初步感受到了连续复利与事实不符，但反过来却试图用实际的树木生长来解释连续复利，用实际的树木生长解释公式（3），反而让我们更清楚地看到连续复利公式（3）的错误。按这种连续计算的方法，可得树木一年后的树高就是 $50e^{0.05} = 52.564$ 英尺。我们通过随后的例子可知，这当然是错误的。

假定当前树木的高度是 50 英尺，一年增长 5%，一年后树高是 $50(1+5\%) = 52.5$ 英尺；当前在树旁立下一根 50 英尺高的木头，一年末又给这根木头接高 5%，一年后这根木头高度也是 $50(1+5\%) = 52.5$ 英尺。求树木一年后的高度，这与树木离散增长，还是连续增长没有关系。树木没有跳跃着生长的，都是连续增长的，我们可计算树木 6 个月末的高度是 $50(1+5\%)^{0.5} = 51.235$ 英尺，而在树旁立下的木头 6 个月末的高度仍是 50 英尺。

二、盲目崇信权威当是连续复利能长期存在的又一重要原因

这种所谓连续复利计算由数学大家提出，又被许多大家认可，在 b-s 期权定价模型中也用到这种连续复利[16]，因创立和发展了 b-s 期权定价模型，1997 年诺贝尔经济学奖授予了罗伯特-莫顿和迈伦=斯科尔斯，这就使人们对这种连续复利计算深信不疑。由于对这种连续复利的盲目崇信，也就产生了对这种连续复利的牵强的解释和矛盾的应用。

例 4　2009 年化学工业出版社出版的《应用数学》在推导出（3）时说：

“采取连续复利，则 t 年后本息合计 $A(t) = A_0e^{rt}$

等式两边微分，得到 $dA(t)/dt = rA_0e^{rt} = rA(t)$

这表明利率连续复合时，总金额增长速度和本金数额成正比”[9]。

实际上，只根据 t 取自然数的约定，从（1）式我们即可求得资金 $A(t)$ 任何一年的增长量为:

$$A(n+1) - A(n) = A_0(1+r)^{n+1} - A_0(1+r)^n$$

$$= A_0(1+r)^n \bullet (1+r) - A_0(1+r)^n = A_0(1+r)^n \bullet (1+r-1) = A(n) \bullet r$$

这就同样有结论“总金额增长速度和本金数额成正比”。 由于盲信连续复利的正确性，于是就产生了对这种连续复利意义特别牵强的解释。

例 5　2003 年高等教育出版社出版的《微积分》（大专使用）中有习题：“设年利率 9%，现投资多少元，按连续复利计算，10 年之末可得 12000 元？”[4]。

年利率是 9%，就应按年利率 9% 计算；年利率是 9%，再要求按所谓连续复利 9% 去计算，也就是就按年利率 $e^{0.09} - 1 = 9.417\%$ 计算，这个习题的等价叙述就是“设年利率 9%，现投资多少元，按年利率 9.417% 计算，10 年之末可得 12000 元”。

盲信连续复利是正确的，所以就要配置关于连续复利应用的习题，由于连续复利是错误的，配置的这种习题自然也就是很牵强的，不能实质说明连续复利的应用价值。

例 6 1982 年中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础（一）微积分》中讲连续

复利这一节配置有习题："已知职工人数年增长率为v，原有职工人数为N_0，试确定5年后职工人数的精确值"[1]。

这应该是只用中小学数学知识就能解答的问题，答案只能是$N_0(1+v)^5$，得出其它任何不同于$N_0(1+v)^5$的答案都是错误的，该书要求学生依据连续复利公式（3）的推导给出答案N_0e^{5v}当然也是错误的。学习定积分概念的引例中一般都讲到以"分割、近似代替、求和、取极限"的方法求曲边梯形面积的精确值，所谓连续复利公式（3）用到了求极限，但求极限得精确值不能随意套用，不能舍弃前面具体问题的"分割、近似代替、求和"而只"取极限"得精确值。1995年浙江大学出版社出版的《微积分学》（上册）把这种求精确值的方法用到了化学反应的计算[3]， 2011年中国人民大学出版社出版的《微积分教程》把这种求精确值的方法用到了国民经济连续逐年发展的计算[12]，这种计算精确值的方法与中小学学到的正确知识矛盾，与定积分知识矛盾，这当都是盲信、强行应用所谓连续复利法的结果。

三、结论

思维脱离实际和盲目崇信是我们学习知识、认识事物的大敌，根据（1）推导出公式（3）这种所谓的连续复利长期存在的原因就在于思维脱离实际和盲目崇信权威，思维脱离实际又常常和盲信权威相连的。连续复利是错误的，对连续复利不可能存在正确的正面解释和应用。记$\ln(1+r)=R$，也就是$e^R-1=r$，则$A_0(1+r)^t=A_0e^{t\ln(1+r)}=A_0e^{Rt}=A_0(1+(e^R-1))^t$为恒等式，它们都可用来描述如树木增长、国民经济增长、资金价值增长和化学反应等事物连续变化的规律，也都可以用来表达如某地区按一定的年增长率逐年扩大招生人数的规律。能不能进行连续计算决定于事物本身的变化特性而不决定于你采用什么形式上的数学式表达，不盲信，联系实际思考问题，认识这种所谓连续复利的错误并不是难事。

参考文献

[1] 中国人民大学数学教研室编.经济数学基础（一）微积分[M].北京：中国人民大学出版社，1982.5.
[2]（日）远山启著，吕砚山等译.通俗数学（下册）[M].北京：北京科学技术出版社，1988.9.
[3] 吴迪光、张彬.微积分学（上册）[M].杭州：浙江大学出版社，1995.4.
[4] 刘书田、冯翠莲，微积分（大专使用）[M]，高等教育出版社， 2003. 7.
[5] 吴志清、黄玉洁.高等应用数学（上册）[M].上海：立信会计出版社，2006.8.
[6]（美)威廉.G.沙立文、埃琳.M.威克斯、詹姆斯.T.勒克斯霍著，邵颖红等译，工程经济学(第13版)[M]，清华大学出版社，2007.6.
[7]苏平贵，金融学[M].北京：清华大学出版社，2007.8..
[8]（美）詹姆斯·C·范霍恩、小约翰·M·瓦霍维奇著，刘曙光等译. 财务管理基础（第13版）[M]. 北京：清华大学出版社，2009.7..
[9]黄裕建.应用数学[M]. 北京：化学工业出版社，2009.8.
[10]（美）兹维·博迪，罗伯特·C·莫顿，戴维·L·克利顿著,曹辉、曹音译.金融学（第2版）[M].北京：中国人民大学出版社，2010.1.
[11]（美）罗伯特 E. 惠利著，胡金焱、王起、李颖译.衍生工具[M].北京：机械工业出版社，2010.1.
[12] 张家琦、万重英、陈洪育.微积分教程（第二版）[M].北京：中国人民大学出版社，2011.2.
[13] 高俊科.关于所谓增长率的连续计算问题[J].数学的实践与认识,1988（3）.

[14] 高俊科.利率本身即为连续地复利的结果[J]. 教育部社科网论文在线,2017，（ID79716）.
[15] 高俊科.所谓连续复利及复利分期计算错误面面观[J] .教育部社科网论文在线,2017，（ID81412）.
[16] 高俊科. b-s 期权定价模型中应用连续复利存在的问题[J] . 金融经济（学术版） 2014（1）.

Why does the wrong continuous compound method exist for a long time

Gao Junke

(Hebei Radio and TV University, Shijiazhuang/hebei 050071)

Abstract： Wrong continuous compounding has long existed in many disciplines for a long time .The reason is that the mind is out of real life, blindly chongxin authority.

Keywords: Interest rate; Compound interest ; Staging calculation of compound interest ; Continuous compound calculation