

利率本身即为连续地复利的结果

高俊科

(河北广播电视大学, 050071)

摘要: 资金本身就是按“利生利”规律连续增值的, 资金借出方和借入方都是要按连续地“利生利”思维考虑利率, 利率本身就是资金连续地“利生利”的结果, 在中小学学到的普通复利公式就是连续计算复利的公式, 这也说明了普通利率和复利公式自古至今被广泛使用的合理性, 也进一步揭示了已存在 300 多年, 数学、金融学、工程经济学等教材中讲授的连续复利的错误。

关键词: 利率 复利 普通复利 连续复利

[中图分类号] F830

[文献标识码] A

1 树木售价与树木生长的关系

资金具有价值, 资金的价值随时间增加, 所以资金才有利息和利率。资金价值的增值规律等同于物体的冷却、镭的衰变、细胞的繁殖、树木的生长、国民经济增长等问题的变化规律, 许多书中明确说明了这一观点^[1-6], 有些书中就是以直观的树木增长来解释连续计算复利的^[3,5], 为直观认识利率即为资金连续地复利的结果这一命题, 我们也先来认识树木价格的增长与树木连续地增长的关系。

1.1 树木连续生长情况与出售价格无关

有树木, 有时间, 才有树木的增长问题, 也必有树木的增长问题。树木生长有自己的生长规律, 例如, 东风林场现在的林材有 1000 万立方米, 这个场的林材以什么方式增长, 一年增长 5%, 还是增长 10%, 是树木自身连续增长的结果。林材量的增长与这个林场是否出售无关, 与这个林场的出售价格无关。即便这个林场 100 年不转让, 林场的林材也在以自身的规律每时每刻连续增长着。

1.2 树木价格的增长率就是树木连续增长的结果

如果东风材场没有出售问题, 也就没有这个林场出售价格的问题。这个林场有出售的问题, 这个林场才有出售价格的问题。在其它各种条件都不变, 例如没有火灾, 没有通货膨胀的情况下, 这个林场的林材随时间不增长, 林场的出售价格就不会增长; 林场的林材以什么方式增长, 林场的价格就应以什么方式增长; 林场的林材增长快, 林场的出售价格增长就要快; 如果林材以指数函数 $A_0 a^t$ 连续增长, 每单位林材价格为 B , 则这个林场的出售价格就应按指数函数 $BA_0 a^t$ 连续增长; 如果林场的林材一年增长 $(A_0 a - A_0) / A_0 = a - 1 = 10\%$, 那么这个林场的价格一年也就应该增长 $(BA_0 a - BA_0) / BA_0 = a - 1 = 10\%$ 。总之, 在其它条件都不变时, 林场价格的增长率就是树木连续增长的结果, 树木一年的增长率就是林场一年售价的增长率。

2 利率本身即为资金连续地复利的结果

我们完全可等同于树木生长与出售价格的关系来认识资金的时间价值与利率的关系。

2.1 资金价值增长与利率的关系

资金有价值, 有时间, 才有资金价值的增长问题。资金被用来进行各种企业经营, 资金在企业的发展, 企业再投资中都在不断增值。一个企业资金价值的增值速度是自身经营的结果, 一个企业 100 年不与其它公司发生资金借贷关系, 其资金也在以自身的经营水平, 以自己的运行规律, 每时每刻连续增长着。资金价值随时间连续增长是客观存在, 这与利率的形成, 与利率计算问题无关。

有资金转让使用权的问题就有利息和利率的问题, 资金增值的部分即利息就应该归资金出借方所有。如果出借方所得利息低于企业经营所得, 资金出借方就要将资金用于经营而不是将资金转让给他人使用, 这就使得利息和利率必须上调; 如果借入方负担的利息高于企业经营所得, 资金的借入方就不会借入资金搞经营, 这就使得利息和利率必须下调, 因为各方都在追求收益的最大化。所以, 在没有战争、没有通货膨胀、没有政府政策干预的情况下, 资金转让中的利息和利率的变动规律应与资金的增值规律一致。

2.2 资金价值应是呈指数函数连续增长

社会经济运行就是不断地扩大再生产, 资金也就不断地“利生利”, 这种变化规律等同于“新的细胞还要连续不断地产生新细胞”, 细胞的繁殖、物体的冷却、镭的衰变、树木的生长、国民经济增长等这类问题都是呈指数函数 $A_0 a^t$ ($a > 0$) 连续变化的。资金这种连续地“利生利”的增值, 其总量就应遵循指数函数 $A_0 a^t$ 的变化规律, 这式子简单, 但难以理解参数 a 的含义, 在实际应用上, 人们反而几乎不用这种最简单的指数函数。一些研究工作中, 要用到 $A_0 a^t$ 的等价式 $A_0 e^{rt}$ ($r = \ln a$) 式, 其导数 $r A_0 e^{rt}$ 除以总量 $A_0 e^{rt}$ 得到的式子 $r = (r A_0 e^{rt}) / (A_0 e^{rt})$ 为任意时刻 1 单位的增值速度, 对于日常应用来讲, 人们没必要、也不便理解 r 的含义, 所以 $A_0 e^{rt}$ 难以在日常工作和生活中用到。人们在日常生活用的是 $A_0 a^t$ 的另一等价式 $A_0 (1 + R)^t$ ($R = a - 1$), $R = a - 1$ 即为单位时间上的增长率。对于用 $A_0 (1 + R)^t$ 描述如资金价值随时间连续增长这类问题, 时间变量 t 取连续实数是对的, 只取自然数当然也是对的。时间变量以年为单位时, R 即为年增长率, 也就是在小学学到的年增长百分比。表达式 $A_0 (1 + R)^t$ 中各数字含义明确, R 为人们特别关注的数字, 也便于理解计算, 所以人们在各领域中多使用 $A_0 (1 + R)^t$ 。因此, 我们这里说, 资金价值应是按指数函数 $A_0 (1 + R)^t$ 连续增长。

2.3 人们都是用连续地复利思维考虑利率

在实际的资金借贷往来中, 银行和储户, 借出方和借入方都是在以连续地复利思维处理问题。

例如, 一家金融公司能以年利率 10% 的借出资金给某一家企业, 也能以半年期的名义年利率 9.9% 的计息方式借出给另一家企业。这家公司会选择半年期计息方式出借给后一家企业, 这家公司会用复利思维考虑到这时的有效年利率为 $(1 + 0.99/2)^2 - 1 = 10.145\%$ 。同样, 如果一家企业能以年利率 10% 的从一家金融公司借到资金, 也能以半年期的名义年利

率 9.9% 的计息方式从另一家金融公司借到资金，这家企业会选择从前一家金融公司借款。就是说，借出方和借入方都是在以复利思维处理问题。

人们都要用复利思维处理问题，从上边举例中的半年到一年的利率折算也是这样，从一个月到一年的利率折算也是这样，从半个月到一个月的利率折算也是这样。从一天到一周的利率折算也应是这样。复利思维不分时间长短，时间的长短具有相对性，考虑再短的时间的利率构成也应都是复利思维，复利思维就是随时都应有“利再生利”的思维。所以，复利思维就是连续地复利思维，在实际的资金借贷中，各方都是用连续地复利思维考虑利率。

2. 4 利率本身即为连续地复利的结果

一是社会经济运行就是不断地将利润投入到经营中去，不断地“利生利”，其变化规律应是按 $A(t) = A_0(1+R)^t$ 连续增长的，尽管我们很难确定其中 R 的数值，但这是客观存在；二是在发生资金的使用权转让时，出借方和借入方都要追求最大收益，所以，受资金供求关系影响，当资金供少于求时，利率就可能提高到资金价值的增长率 R 以上，当资金供大于求时，利率就可能降到资金价值增长率 R 以下，利率必定围绕资金价值的增长率 R 波动， $A(t) = A_0(1+R)^t$ 中的 R 实际上是形成单位时间利率值的基础；三是在资金出借活动中主观上也都是按连续“利（息）生利（息）”的思维考虑问题。这三者是一致的，双方同意的利率就是主观上连续地复利思维的结果，也是客观上资金价值连续地增值的结果。

3 结论

利率的构成体现的是人们连续地复利思维，是资金连续增值的结果，当时间变量 t 取整数， $A(t) = A_0(1+R)^t = A_0e^{t \ln(1+R)}$ 即为普通复利公式，当时间变量 t 取连续实数时， $A(t) = A_0(1+R)^t = A_0e^{t \ln(1+R)}$ 为复利的连续计算公式，两者是一致的，这也说明了中小学学到的复利公式 $A(t) = A_0(1+R)^t$ 的科学性和合理性，这也当是这个公式能在各领域被广泛使用的原因。多门课程教材中都讲授所谓的连续复利^[1-8]，含义是根据 $A(t) = A_0(1+R)^t$ 推出所谓复利分期计算公式 $A(t) = A_0(1+R/m)^{mt}$ ，令 $m \rightarrow +\infty$ ，得所谓连续复利计算公式 $A(t) = A_0e^{Rt}$ 。具体说，这就是当 $R = 100\%$ 时，根据 $A(t) = A_0(1+100\%)^t$ 推导出 $A(t) = A_0e^{100\%} = A_0(1+171.828\%)^t$ ，也就是由 $r = 100\%$ 推出了 $r = 171.828\%$ ，这当然是错误的，这种连续复利已存在 300 多年^[9]，认识“利率本身即为连续地复利的结果”也有利于我们进一步揭示所谓连续复利的错误^[10-12]。

参考文献

- [1] 中国人民大学数学教研室编. 经济数学基础（一）微积分[M]. 北京：中国人民大学出版社，1982. 5.
- [2] 吴迪光、张彬. 微积分学（上册）. 杭州：浙江大学出版社，1995. 4.
- [3] 罗萍、郭明普. 高等数学（上）. 北京：机械工业出版社，2008. 8.
- [4] 吴建成. 高等数学[M]. 北京：机械工业出版社，2009. 9.
- [5] （美）罗伯特 E. 惠利著，胡金焱、王起、李颖译. 衍生工具[M]. 北京：机械工业出版社，2010. 1

- [6]张家琦、万重英、陈洪育.微积分教程（第二版）[M].北京：中国人民大学出版社，2011.2.
- [7]（美）兹维·博迪，罗伯特·C·莫顿，戴维·L·克利顿著，曹辉、曹音译.金融学（第2版）[M].北京：中国人民大学出版社，2010.1.
- [8]郭献芳.工程经济学[M].北京：机械工业出版社，2012.1.
- [9]（日）远山启著，吕砚山等译.通俗数学（下册）[M].北京：北京科学技术出版社，1988.9.
- [10]高俊科. 关于所谓增长率的连续计算问题[J]. 数学的实践与认识，1988（3）
- [11]高俊科 b-s 期权定价模型中应用连续复利存在的问题[J] 金融经济（学术版） 2014（1）.
- [12]高俊科 二叉树期权模型和资金流现值计算公式中应用连续复利存在的问题[J] 金融经济（学术版），2014（10）.

The interest rate itself is the result of the continuous benefit of money

Gao Junke

(Hebei Radio and TV University, Shijiazhuang/hebei 050071)

Abstract : The capital itself is continuously added in accordance with the law for "profit generating profit". Both the lender and the borrower are to think about interest rates in a continuous way on "Interest generating Interest ". The interest rate itself is the result of the continuous benefit of money. The general compound formula that we learned in primary and middle school is the formula for continuous compounding.

This also shows the rationality of general interest rate and compound interest formula widely used since ancient times. It has further revealed the mistakes of continuous compound interest that have been taught in mathematics, finance, engineering economics and other teaching materials for more than 300 years

Keywords: interest rate; Compound interest. General compound interest; Continuous compound interest