

# 随机利率条件下股票质押贷款的定价计算

金辉

(杭州电子科技大学 经济学院, 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 为了研究股票质押贷款的定价问题, 建立随机利率条件下股票价格变化的模型, 并通过双变量的生死过程来离散逼近股票价格的连续变化过程。具体来说, 对股票价格的对数变化过程采用矩匹配来进行逼近; 对利率变化过程则按照 Ehrenfest 过程进行逼近。在此基础上, 采用单值化过程的数值分析技术计算股票价格迁移概率, 从而得到股票估值及质押率的计算值。数值计算的结果表明, 计算方法简单有效, 贷款定价结果合理。在给定贷款期限内, 质押率的计算结果表现出一定程度的稳定性。

**关键词:** 股票质押贷款; 质押率; 迁移概率; 数值计算

**中图分类号:** F830      **文献标识码:** A

## 一、引言

股票质押贷款 (Stock Loan) 是以股票为质押物发放贷款的一种形式, 如果出质方没有发生违约行为, 则到期后可解除质押并收回股票。股票质押贷款的期限一般为短期 (即一年以下), 采用一次性还本付息或分期还本付息的方式。经银行同意, 贷款也可以提前归还本息, 但提前归还需要缴纳违约金。在实际市场中, 质押的股票有上市公司流通股、限售股和非上市公司股票等。

国外对股票质押贷款的定价研究起源于 Xia 和 Zhou (2007)<sup>[8]</sup>。他们将股票质押贷款看成是一种执行价格随时间变化的美式期权, 并假设无风险利率为常数、期权的期限为永久限期, 采用 B-S 模型的框架给出了最优停止时间的解析解, 从而得到相关的定价参数。Liang, Wu 和 Jiang (2010)<sup>[9]</sup> 提出了一种有自动终止功能的股票质押贷款并得到相关定价参数的解析解, 但期权的期限仍然被假设为永久限期。Wong 和 Wong (2013)<sup>[10]</sup> 也在永久限期美式期权的框架下, 采用位相型 Levy 模型表示股票价格的跳跃过程, 给出了股票质押贷款定价的解析解。Cai 和 Sun (2014)<sup>[11]</sup> 将质押股票价格的变化描述成超指数的跳跃过程, 分别研究了贷款期为永久限期和有限限期情况下美式期权的解析解和数值解。关于固定期限的股票质押贷款的定价研究大部分在不同红利分布的假设下进行了数值计算。Dai 和 Xu (2011)<sup>[12]</sup> 在 Xia 和 Zhou (2007)<sup>[5]</sup> 的基础上考虑质押期间股票红利的几种归属情况, 分析了有限限期的美式期权情况下股票质押贷款的还款边界的性质。Lu 和 Putri (2015)<sup>[13]</sup> 用拉普拉斯变换方法对不同红利分布下的股票质押贷款进行了定价。Pascucci 等 (2013)<sup>[14]</sup> 也考虑了股票质押期间红利的归属情况, 首次对股票质押贷款的 PDE 方程进行了数值分析。还有些股票质押贷款的定价研究设计了更复杂的模型来进行计算。Prager 和 Zhang (2010)<sup>[15]</sup> 针对欧式期权下布朗运动与均值回归之间的状态转换提出了定价模型。Grasselli 和 Gomez (2013)<sup>[16]</sup> 在不完全市场假设下采用 PSOR 方法对股票质押贷款定价问题进行数值计算。Lu 和 Putri (2016)<sup>[17]</sup> 运用移动边界的原理对类似美式敲出期权的固定期限股票质押贷款进行了定价建模。Wong 和 Wong (2012)<sup>[18]</sup> 给出了随机波动率模型下永久限期股票质押贷款定价的解析解, 其中的波动率模型为快速均值回归方程的形式。这个快速均值回归形式的随机模型也被用于利率衍生品的定价中, 比如 Wong 和 Zhao (2011)<sup>[19]</sup>, Cotton 和 Fouque 等 (2004)<sup>[20]</sup>。Chen, Xu 和 Zhu (2015)<sup>[21]</sup> 首次在随机利率的框架下对股票质押贷款进行了评估。

国内关于股票质押贷款定价的研究以实际的股票质押贷款为研究对象, 主要采用 VaR 方法度量贷款风险 (比如: 范英等 (2003)<sup>[1]</sup>、王志诚 (2003)<sup>[2]</sup>), 确定在给定置信度下的股票质押率。黄莉 (2013)<sup>[3]</sup> 通过简单正态法下的 VaR 对国内信托公司的质押率进行测算, 发

**基金项目:** 浙江省信息化与经济社会发展研究中心课题 (16JDGH109); 教育部人文社会科学研究规划基金项目 (12YJA790058)

现上市时间相对较短且平均年化收益率高的股票其质押率普遍较高。张旭(2015)<sup>[4]</sup>通过 VaR 测算新三板企业股权质押贷款的定价,证实 VaR 方法能够反映股票质押贷款的综合风险。也有采用现代的信用风险度量模型对股票质押贷款的风险进行衡量。王志诚(2004)<sup>[5]</sup>采用期权定价原理分析了抵押贷款的信用风险;李毅学等(2006)<sup>[6]</sup>根据约化模型的思路,假定借款人的违约概率是外生给定,给出了一定风险容忍水平下银行承受的最大损失的基本模型,但是并没有进行数值计算。齐二石和马姗姗等(2008)<sup>[7]</sup>采用莫顿信用风险结构模型,并结合 Copula 函数分析了质押贷款定价变化对银行的损失。

综上所述,自 Xia 和 Zhou(2007)<sup>[8]</sup>以来股票质押贷款的定价研究有了很大的发展,但是近年来的文献中除 Chen, Xu 和 Zhu(2015)<sup>[21]</sup>以外无风险利率通常被设定为常数,贷款期限也通常被设定为永久期限或较长期限,与实际不符。因此,本文将短期的股票质押贷款为研究对象。由于市场利率对股票质押贷款的价格有很大的影响,不同于前述文献,本文假设无风险利率随时间变化。为了突出重点及计算的便利,本文仅考虑到期归还本息的情形。由于分期还本付息可以看成是一次性还本付息的组合,本文的结论也可以拓展到分期还本付息的情形。由于上市公司的流通股持有面广、价格公开和流动性强等特点,本文仅考虑将上市公司的流通股进行质押情况。

本文的其余结构由以下几个部分构成。第二部分介绍了随机利率条件下股价变化模型的构建及其的离散逼近,第三部分根据 Keilson(1979)<sup>[22]</sup>的单值化过程数值分析技术提出股价迁移概率的计算方法,第四部分将数值计算方法用于股票质押贷款内嵌期权的定价及质押率计算,最后一部分对全文作了总结。

## 二、模型构建及其离散逼近

### (一) 随机利率下股价变化模型的构建

考虑随机利率条件下股票价格变化的双变量过程  $\{S(t), r(t)\}$ 。假设在风险中性测度下,股票价格  $S(t)$  的变化服从如下扩散过程:

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma_s S(t)dW_1(t) \quad (1)$$

其中  $r(t)$  为短期无风险利率,  $\sigma_s$  表示股票价格的波动率,  $W_1(t)$  是维纳过程。另一方面,将短期无风险利率  $r(t)$  的扩散过程用 Vasicek 模型来描述,即

$$dr(t) = (\phi - \alpha r(t))dt + \sigma_r dW_2(t) \quad (2)$$

其中  $\phi$  表示均值回归水平,  $\alpha$  表示均值回归速度,  $\sigma_r$  表示  $r(t)$  的波动率,  $W_2(t)$  是维纳过程。假设  $W_1(t)$  和  $W_2(t)$  是独立的维纳过程。

以股票为质押物发放贷款,最重要的是对其内嵌期权的定价。为此,需要获得质押股票的价格迁移概率。由于  $\{S(t), r(t)\}$  为双变量的连续过程,无法获得迁移概率的解析解,需要进行数值计算。所以,先对连续模型  $\{S(t), r(t)\}$  进行离散逼近。

### (二) 双变量连续模型的离散逼近

通过在马尔科夫链上嵌入另一马尔科夫链的原理,用双变量的生死过程来离散逼近随机利率下股票价格的连续变化过程。对模型(1)的对数过程采用矩匹配的方法进行离散逼近;由于模型(2)的本质是 O-U 过程,采用 Sumita, Gotoh 和 Jin(2006)<sup>[23]</sup>提出的 Ehrenfest 方法进行逼近。下面分别介绍  $S(t)$  和  $r(t)$  的离散逼近方法。

#### 1. 用生死过程 $B(t)$ 对 $S(t)$ 进行离散逼近

对于模型 (1), 可以改写成

$$d \log S(t) = r(t)dt + \sigma_s dW_1(t) \quad (3)$$

给定  $r(t) = r_j$ , 采用伊藤引理, 可以将模型进一步改写成

$$d \log S(t) \Big|_{r(t)=r_j} = \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2}\right)dt + \sigma_s dW_1(t) \quad (4)$$

当  $S(0) = s_0$ , 模型变为

$$\log S(t) \Big|_{r(t)=r_j} = \left(r_j - \frac{\sigma_s^2}{2}\right)t + \sigma_s (W_1(t) - W_1(0)) + \log s_0 \quad (5)$$

假设  $V(t) = \log S(t) \Big|_{r(t)=r_j}$ , 那么模型可以改写成

$$V(t) = \left(r_j - \frac{\sigma_s^2}{2}\right)t + \sigma_s (W_1(t) - W_1(0)) + v_0 \quad (6)$$

其中  $V(0) = v_0 = \log s_0$ 。

因为  $W_1(t) - W_1(0)$  服从正态分布  $N(0, t)$ , 我们可以得到  $V(t)$  的密度函数:

$$\begin{aligned} g(v_0, x, t) &= \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d}{dx} P[V(t) \leq x | V(0) = v_0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2 t}} \exp \left[ -\frac{\left\{x - \left(u_0 + \left(r_j - \frac{\sigma_s^2}{2}\right)t\right)\right\}^2}{2\sigma_s^2 t} \right] \quad (7) \end{aligned}$$

定义  $\bar{G}(v_0, x, t) = \int_x^\infty g(v_0, y, t) dy$ , 当给定  $V(0) = v_0$ ,  $\bar{G}(v_0, x, t)$  可以采用拉盖尔变换 (Laguerre transform) 来计算并得到 12 位数的精度, 详细可见 Sumita 和 Kijima (1988, 1991) [24,25]。

下面通过矩匹配的方法, 采用生死过程  $B(t)$  对  $V(t)$  进行离散逼近。考虑  $V(t)$  的状态空间子集  $R_V = [v_{Begin}, v_{End}]$ , 使得  $P[V(t) \in R_V]$  几乎为一。同时, 引入定义在状态空间  $N_V = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  上的生死过程  $B(t)$ , 使得  $v_0 = v_{Begin}$ ,  $v_N = v_{End}$  且  $h_V = v_i - v_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N$ 。对于给定的  $r(t) = r_j$ ,  $B(t)$  的迁移速率矩阵  $U_V(j)$  如下:

$$U_V(j) = \begin{bmatrix} 0 & u_0^+(j) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ u_1^-(j) & 0 & u_1^+(j) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^-(j) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{N-2}^+(j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{N-1}^-(j) & 0 & u_{N-1}^+(j) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_N^-(j) & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中  $u_i^+(j)$  和  $u_i^-(j)$  分别为  $B(t)$  在状态  $i \in N_V$  的上行和下行迁移速率。

通过  $B(t)$  和  $V(t)$  一阶和二阶矩匹配, 可以得到:

$$\begin{cases} u_i^+(j) = \frac{\sigma_s^2 + h_V(r_j - \frac{\sigma_s^2}{2})}{2h_V^2} \\ u_i^-(j) = \frac{\sigma_s^2 - h_V(r_j - \frac{\sigma_s^2}{2})}{2h_V^2} \end{cases}, \quad (9)$$

其中  $i \in N_V \setminus \{0, N\}$ ; 而  $u_0^+(j) = u_N^-(j) = \frac{\sigma_s^2}{h_V^2}$ 。矩匹配的详细过程可参考 Takada, Sumita 和

Jin (2009)<sup>[26]</sup>。我们注意到  $u_i^+(j) + u_i^-(j) = \frac{\sigma_s^2}{h_V^2}$ , 即  $u_i^+(j) + u_i^-(j)$  与  $i$  无关, 且在  $\sigma_s$  和  $h_V$  确

定的情况下为常数。需要强调的是, 为了保证 (9) 式中  $u_i^+(j)$  和  $u_i^-(j)$  均为正,  $h_V$  必须满

足  $h_V < \frac{\sigma_s^2}{r_j - \frac{\sigma_s^2}{2}}$ 。

假设  $\bar{G}(i_m, i_n, t)$ ,  $i_m, i_n \in N$  表示  $B(t)$  在  $t$  时刻从状态  $i_m$  到状态  $i$  ( $i_n \leq i \leq N$ ) 的累积迁移概率, 那么  $h_V \rightarrow 0$  时,  $\bar{G}(i_m, i_n, t) \rightarrow \bar{G}(v_0, x, t)$ , 其中  $i_m$  和  $i_n$  分别对应  $V(t)$  的状态  $v_0$  和  $x$ 。 $\bar{G}(i_m, i_n, t)$  的计算可以参考 Gotoh, Jin 和 Sumita (2011)<sup>[24]</sup>。

所以, 调整  $B(t)$  的状态空间  $N_V = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  使得  $h_V \rightarrow 0$ , 通过  $\bar{G}(i_m, i_n, t) \rightarrow \bar{G}(v_0, x, t)$  可以得到对  $V(t)$  离散逼近的精度。当  $N=500$  时, 可得到 4 位数的逼近精度, 详见 Takada, Sumita 和 Jin (2009)<sup>[26]</sup>。

## 2. Ehrenfest 过程对 $r(t)$ 的离散逼近

对于  $r(t)$ , 也考虑其离散的状态子空间。由于  $r(t)$  本质上属于 O-U 过程, 根据 Sumita, Gotoh 和 Jin(2006)<sup>[23]</sup>, 可通过 Ehrenfest 过程来进行逼近。假设

$$dX(t) = -\alpha X(t) dt + \sigma_r dW \quad (10)$$

那么比较 (2) 和 (10), 可以得到  $r(t) = X(t) + \theta(t)$ , 其中  $X(0) = 0$ ,

$$\theta(t) = \frac{\phi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + r_0 e^{-\alpha t} \quad (11)$$

假设  $\{N(t) : t \geq 0\}$  为 Ehrenfest 过程, 其状态空间为  $N_r = \{0, 1, 2, \dots, 2V\}$ ,  $N(t)$  的上行和下行迁移速率分别表示如下:

$$\lambda_m = (V - \frac{m}{2})\alpha, \quad \mu_m = \frac{m}{2}\alpha, \quad m \in N_r \quad (12)$$

如果定义  $\{X_N(t) : t \geq 0\}$  如下:

$$X_N(t) \stackrel{def.}{=} \frac{\sigma_r}{\sqrt{\alpha V}} N(t) - \sigma_r \sqrt{\frac{V}{\alpha}} \quad (13)$$

根据 Sumita, Gotoh 和 Jin (2006)<sup>[23]</sup>, 当  $V \rightarrow \infty$ ,  $X_N(t)$  收敛于  $X(t)$ 。

所以,  $r(t) \approx X_N(t) + \theta(t)$ 。根据公式 (13), 那么  $r(t)$  的迁移概率可以通过 Ehrenfest 过程  $N(t)$  逼近得到, 逼近的精度由  $V$  的大小保证。根据 Gotoh, Jin 和 Sumita (2011)<sup>[27]</sup>,  $V=250$  时, 可得到 3 位数的逼近精度。

### 三、双变量过程 $\{B(t), X_N(t)\}$ 迁移概率的数值计算

根据上述讨论, 连续时间连续状态的双变量过程  $\{V(t), r(t)\}$  可以用连续时间离散状态的过程  $\{B(t), X_N(t)\}$  来逼近。 $\{B(t), X_N(t)\}$  的迁移速率矩阵如下:

$$U = \begin{bmatrix} U_V(0) & \lambda_0 I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 I & U_V(1) & \lambda_1 I & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_j I & U_V(j) & \lambda_j I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{2V-1} I & U_V(2V-1) & \lambda_{2V-1} I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{2V} I & U_V(2V) \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中由  $\lambda_j, \mu_j, j \in N_r$  由公式 (12) 给出,  $U_V(j)$  如公式 (8) 所示。

为了进行迁移概率  $\tilde{p}_i(t), i \in N_V$  的计算, 引入 Keilson (1979)<sup>[22]</sup> 提出的单值化过程 (Uniformization procedure) 技术。首先对单值化过程技术做个简单的回顾。假设  $M(t)$  是定义在状态空间  $M = \{0, 1, 2, \dots, M\}, M \leq \infty$  上的时齐的连续时间马尔科夫链, 其迁移速率集合为  $\{v_{mn}\}, m, n \in M$ 。那么  $M(t)$  的无穷小生成元  $Q$  为

$$Q = -A_D + A, \quad (15)$$

其中  $A = [v_{mn}]$ ;  $A_D = \text{diag}[v_1, \dots, v_M]$ ;  $v_m = \sum_{n \in M} v_{mn}$ 。

如果存在  $0 < \nu < \infty$  使得  $v_m \leq \nu, m \in M$  成立, 即迁移速率集合  $\{v_{mn}\}$  有界, 那么该过程被称为可单值化 (uniformizable) (见 Keilson (1979)<sup>[22]</sup>)。在这种情况下, 对于固定的  $\nu$ , 可单值化过程的转移概率矩阵  $P(t) = [p_{mn}(t)]$  可由下式给出:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-vt} \frac{(vt)^k}{k!} A_v^k, \quad (16)$$

其中  $A_v$  是随机矩阵, 其定义如下:

$$A_v = I - \frac{1}{v} A_D + \frac{1}{v} A \quad (17)$$

所以, 对于任何  $v \geq \sup_m v_m$ ,  $P(t)$  可以通过公式 (16) 计算。

对迁移速率矩阵 (14) 采用单值化过程技术, 可以得到

$$U_D = \begin{cases} U_{v:D}(0) + \lambda_0 I & j = 0 \\ U_{v:D}(j) + (\mu_j + \lambda_j) I & j = 1, 2, \dots, 2V-1, \\ U_{v:D}(2V) + \mu_{2V} I & j = 2V \end{cases} \quad (18)$$

其中  $U_{v:D}(j)$  是以  $U_v(j)$  的各行之和为元素的对角线矩阵。对于给定的  $u \geq \sup_m u_m \in U_D$ , 定义如下随机矩阵:

$$A_{v:u}(j) = I - \frac{1}{u} U_{v:D}(j) + \frac{1}{u} U_v(j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2V; \quad (19)$$

$$\text{以及 } \hat{A}_{v:u}(j) = \begin{cases} A_{v:u}(0) - \frac{\lambda_0}{u} I & j = 0 \\ A_{v:u}(j) - \frac{\mu_j + \lambda_j}{u} I, & j = 1, 2, \dots, 2V-1. \\ A_{v:u}(2V) - \frac{\mu_{2V}}{u} I & j = 2V \end{cases} \quad (20)$$

由此, 根据 (14) 和 (17) 可以得到

$$A_u = \begin{bmatrix} \hat{A}_{v:u}(0) & \frac{\lambda_0}{u} I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_1}{u} I & \hat{A}_{v:u}(1) & \frac{\lambda_1}{u} I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\mu_{2V-1}}{u} I & \hat{A}_{v:u}(2V-1) & \frac{\lambda_{2V-1}}{u} I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\mu_{2V}}{u} I & \hat{A}_{v:u}(2V) \end{bmatrix} \quad (21)$$

假设  $p(t) = [p_0(t), \dots, p_j(t), \dots, p_{2V}(t)]$ , 且  $p_j(t) = [p_{0j}(t), \dots, p_{ij}(t), \dots, p_{Nj}(t)]$ ,  $p_{ij}(t) = P[B(t) = i, N(t) = j | p(0)]$ 。那么

$$p(t) = p(0) \times P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ut} \frac{(ut)^k}{k!} p(0) A_u^k, \quad (22)$$

其中

$$p(0) A_u^k = \begin{cases} p_0(0) \hat{A}_{V_u}(0) + \frac{\mu_1}{u} p_1(0) & j=0 \\ \frac{\lambda_{j-1}}{u} p_{j-1}(0) + p_j(0) \hat{A}_{V_u}(j) + \frac{\mu_{j+1}}{u} p_{j+1}(0), & j=1, 2, \dots, 2V-1 \\ \frac{\lambda_{2V-1}}{u} p_{2V-1}(0) + p_{2V}(0) \hat{A}_{V_u}(2V) & j=2V \end{cases} \quad (23)$$

这样一来，双变量过程  $\{V(t), r(t)\}$  从  $V(0) = v_0$  到  $V(t) = v_i \in R_V$  的状态迁移概率为

$$\tilde{p}_i(t) = \sum_{j \in N_r} p_{ij}(t) \quad (24)$$

同理，从  $X(0) = x_0$  到  $X(t) = x_i, i \in N_r$  的状态迁移概率为

$$\hat{p}_j(t) = \sum_{i \in N_V} p_{ij}(t) \quad (25)$$

#### 四、股票质押贷款定价的应用

假设股票的现行价格为  $S_0$ ，股票的价格变化服从随机利率条件下的连续过程  $\{S(t), r(t)\}$ ，考虑贷款期限为  $T$ 、一次性还本付息额为  $K$  的股票质押贷款。采用前述模型逼近法，根据公式 (24) 可以得到股价迁移概率  $\tilde{p}_i(t), i \in N_V$ 。由于借款人可能违约，相当于借款者买入了一个期限为  $T$  的欧式看涨期权，而期权的执行价格  $K$  就是到期的还款金额。该看涨期权价格的计算公式为：

$$C(T) = \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i \mathcal{K} [S_i T (-K)]^+ \quad (26)$$

定义  $E(r_t) = \sum_{j=1}^{2V} \hat{p}_j(t) r_j(t)$ ，根据无套利定价原理可得

$$K = S_0 - C(T) e^{-\int_0^T r(t) dt} = S_0 - C(T) e^{-E(r_T)}, \quad (27)$$

在  $K$  值确定以后，可进一步确定质押率  $H$ ，其计算公式如下：

$$H = \frac{K}{S_0} \quad (28)$$

对风险管理来说，放款时设定的到期还款金额应小于该  $K$  值，所以根据 (28) 计算的质押率为最高质押率。根据中国人民银行和银监会 2000 年 2 月联合下发的《证券公司股票质押贷款管理办法》，质押股票的平仓线为 120%，所以可在理论质押率的基础上乘以 100/120 来作为最终质押率。

假设股价模型 (1) 和利率模型 (2) 的参数分别为  $\sigma_s=0.1, \phi=0.02, \alpha=0.4, \sigma_r=0.01$ ，

初始值为  $S_0 = 100, r_0 = 0.6\%$ 。表 1 计算了初始股价  $S_0$  分别为 90、100 和 110 及贷款期限  $T$  为 0.1、0.25、0.5、0.75 和 1 下质押贷款的质押率。由表 1 可以看出，随着初始股价的增大，质押率变化幅度不大。在给定的贷款期限下，质押率的计算结果表现出一定程度的稳定性。随着贷款期限的增长，质押率逐渐下降。

表 1 不同初始股价下各期限贷款的质押率一览表

$S_0$	T=0.1	T=0.25	T=0.50	T=0.75	T=1
90	0.9232	0.8768	0.8279	0.7890	0.7602
100	0.9192	0.8767	0.8245	0.7874	0.7690
110	0.9278	0.8804	0.8215	0.7886	0.7549
平均质押率	0.9234	0.8780	0.8246	0.7883	0.7614
最终质押率	0.7695	0.7317	0.6872	0.6569	0.6345

图 1-2 分别表示随着贷款期限的变化，质押股票的期权价值和质押率的变化情况。从图 1 和图 2 可以看出，随着贷款期限的增加，质押股票的期权价值增加，质押率下降。其原因在于随着贷款期限的增加，不确定性的增加导致期权的价值增加，贷款风险增加质押率下降。

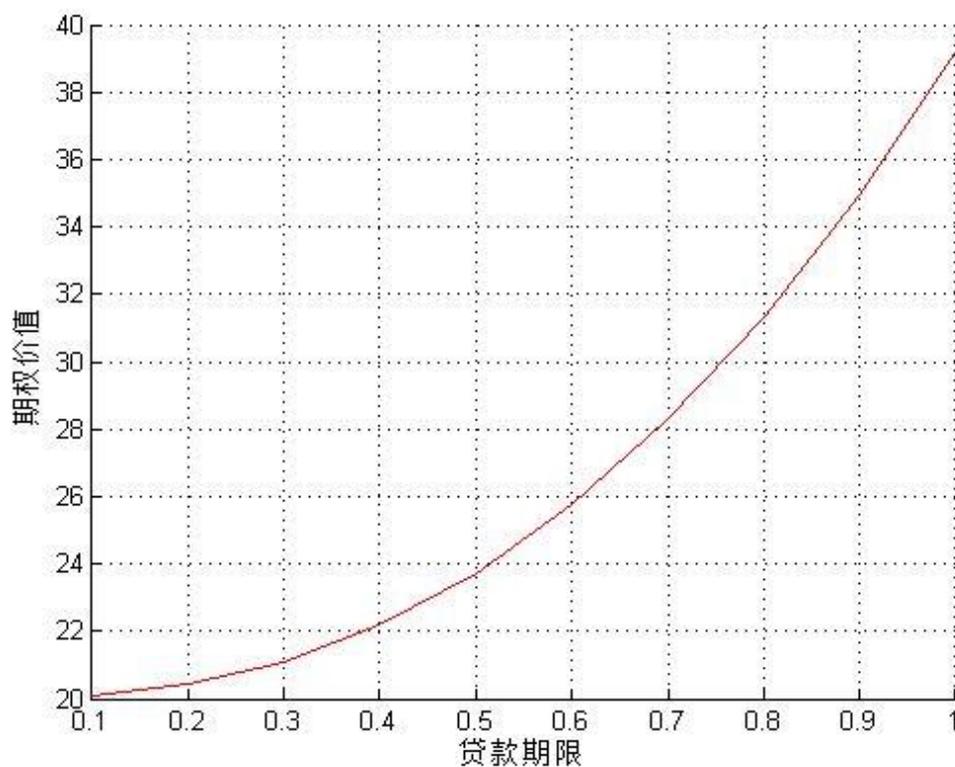


图 1 期权价格随股票质押贷款期限的变化

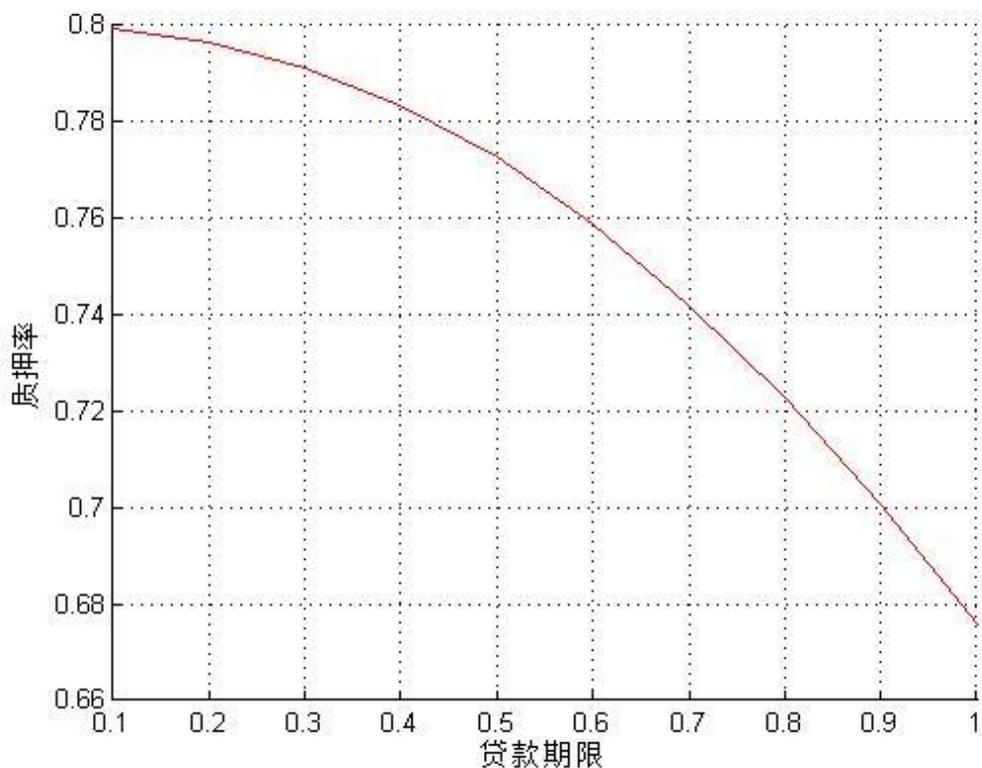


图2 质押率随股票质押贷款到期期限的变化

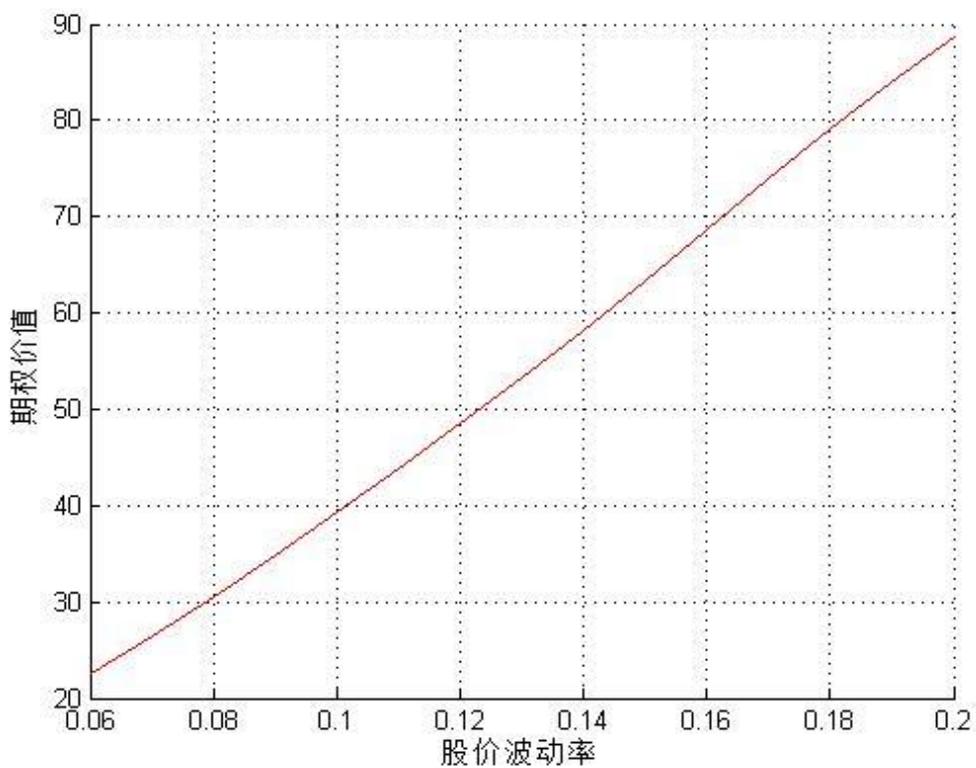


图3 期权价格随股票波动率的变化

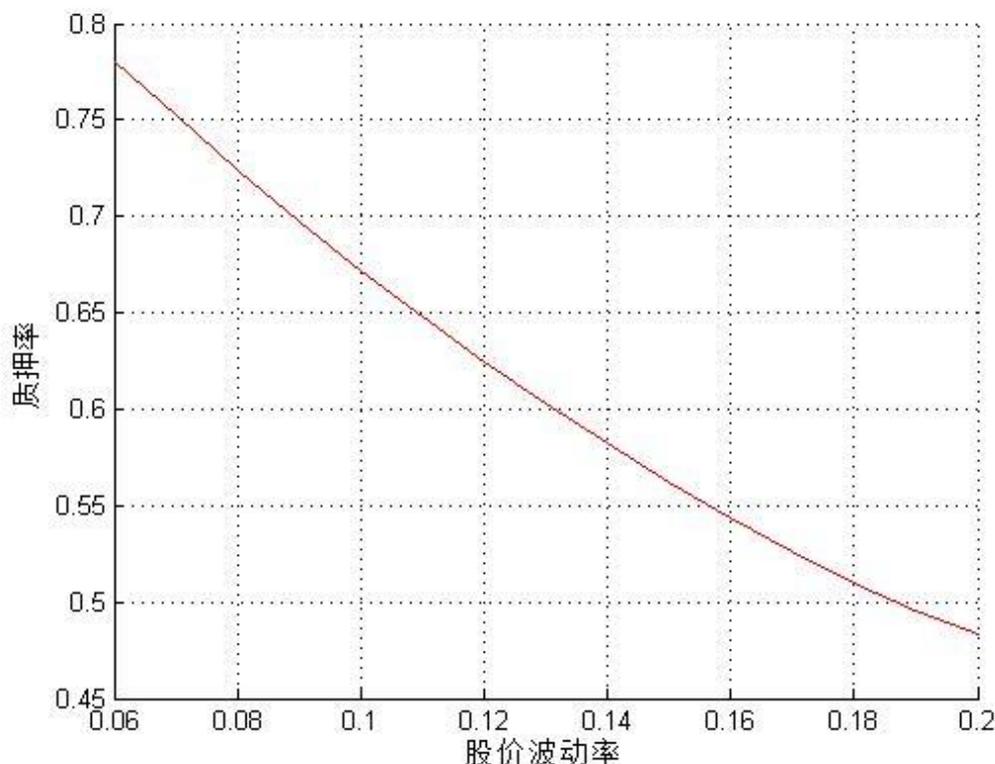


图 4 质押率随股票波动率的变化

图 3-4 分别表示随着股价波动率的变化，质押股票的期权价值和质押率的变化情况。从图 3 和图 4 可以看出，随着股票价格波动率的增加，质押股票的期权价值增加，质押率下降。其原因在于随着股价波动率的增加，期权的价值增加，贷款风险增加质押率下降。

从图 1-4 可知，随着贷款期限或股价波动率的增加，商业银行应该减少放款金额，降低质押率。该结论与基本常识一致，表明了该数值计算方法在双变量过程  $\{S(t), r(t)\}$  下对股票质押贷款定价的合理性。

在实际应用中，股票价格波动率可以通过市场的价格数据计算得到，利率模型的参数可以根据利率市场的数据（比如：SHIBOR）通过最大似然法得到，这部分的工作留到以后再作报告。

## 五、结束语

本文针对一种特殊的股票质押贷款（即固定贷款期限、一次性还本付息），进行贷款定价问题的分析和计算。具体来说，建立随机利率条件下质押股票的价格变化模型，通过双变量生死过程对模型进行离散逼近，并采用 Keilson (1979)<sup>[22]</sup>提出的单值化过程数值分析技术计算了股价的状态转移概率，最后完成该模型下股票质押贷款的股票估值和质押率的计算。数值计算结果表明，运算方法简单有效，贷款定价结果合理。在给定的贷款期限下，质押率的计算结果表现出一定程度的稳定性。

由于时间关系，本文应用举例中的模型参数是直接给定的。在下一步的工作中，将着眼于采用计量方法估计波动率和利率模型的参数，进一步验证模型和方法的实用性。在实际市场中，股票质押贷款也可以采取分期还本付息的形式。由于分期还本付息可以看成是一次性还本付息的组合，在下一步的工作中还将本文的数值计算方法扩展到分期还本付息的情形。

## 参考文献

- [1] 范英，魏一鸣. 基于极差 VaR 的股票组合质押率评估方法[J]. 系统工程, 2003, 21(4): 86~89.

- [2] 王志诚. 股票质押贷款质押率评定的 VaR 方法[J]. 金融研究, 2003, (12): 64~71.
- [3] 黄莉. 国内信托公司股权质押融资业务风险管理研究[D].: 上海交通大学, 2013: 68.
- [4] 张旭. 新三板挂牌企业利用股票质押融资的风险管理[D].: 北京交通大学, 2015: 56.
- [5] 王志诚. 用期权定价原理分析抵押贷款的信用风险[J]. 金融研究, 2004, (4): 95~105.
- [6] 李毅学, 徐渝, 陈志刚. 股票质押贷款业务的贷款价值比率[J]. 系统工程, 2006, 24(10),55-58.
- [7] 齐二石, 马珊珊, 韩铁. 组合仓单质押贷款质押率研究[J]. 西安电子科技大学学报(社会科学版), 2008,(06): 50-53.
- [8] XIA, J., X. ZHOU. Stock loans [J].Mathematical Finance, 2007: 17,307–317.
- [9] LIANG, Z., W. WU, S. JIANG. Stock loan with automatic termination clause, cap and margin [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 60: 3160–3176.
- [10] WONG, T.W., H.Y. WONG. Valuation of stock loans using exponential phase-type Lévy models [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 222: 275–289.
- [11] CAI, N., L. SUN. Valuation of stock loans under a hyper-exponential jump diffusion model [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2014, 40: 213–241.
- [12] DAI, M., Z. XU. Optimal redeeming strategy of stock loans with finite maturity [J]. Mathematical Finance, 2011, 21(4):775–793.
- [13] LU, X., E.R. PUTRI. Semi-analytic valuation of stock loans with finite maturity [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 27 (1) :206–215.
- [14] PASCUCCI, A., M. SUAREZ-TABOADA, C. VAZQUEZ. Mathematical analysis and numerical methods for a PDE model of a stock loan pricing problem[J], Journal of Mathematical Analysis and Applications,2013, 403: 38–53.
- [15] PRAGER, D., Q. ZHANG. Stock loan valuation under a regime-switching model with mean-reverting and finite maturity[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2010, 23 (3) :572–583.
- [16] GRASSELLI, M.R., C. GÓMEZ. Stock loans in incomplete markets [J]. Applied Mathematical Finance, 2013, 20 (2): 118–136.
- [17] LU, X., E.R. PUTRI. Finite maturity margin call stock loans [J]. Operations Research Letters, 2016, 44:12-18.
- [18] WONG, T.W., H.Y. WONG. Stochastic volatility asymptotics of stock loan: valuation and optimal stopping [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 394: 337–346.
- [19] WONG, H.Y., J. ZHAO. An artificial boundary method for the Hull-White model of American interest rate derivatives [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217: 4627–4643.
- [20] COTTON, P., J.P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU, R. SIRCAR. Stochastic volatility corrections for interest rate derivatives [J]. Mathematical Finance, 2004, 14 :173–200.
- [21] CHEN,W., L. XU, S. ZHU. Stock loan valuation under a stochastic interest rate model [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2015, 70: 1757-1771.
- [22] KEILSON, J.. Markov Chain Models: Rarity and Exponentiality [M]. Applied Mathematical Science Series, 28, Springer, New York, 1979.
- [23] SUMITA, U., J. GOTOH, H.JIN. Numerical Exploration of Dynamic Behavior of Ornstein-Uhlenbeck Processes via Ehrenfest Process Approximation [J]. Journal of the Operations Research Society of Japan, 2006, 49(3): 256-278.
- [24] SUMITA, U., M. KIJIMA. Theory and Algorithms of the Laguerre Transform, Part 1: Theory [J].

Journal of the Operations Research Society of Japan, 1988, 31: 467–494.

[25] SUMITA, U., M. KIJIMA. Theory and Algorithms of the Laguerre Transform, Part 2: Algorithm [J]. Journal of the Operations Research Society of Japan, 1991, 34:449–477.

[26] TAKADA, H., U. SUMITA, H. JIN. Development of Computational Algorithms for Evaluating Option Prices Associated with Squared-Root Volatility Processes [J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2009, 11(4): 687-703.

[27] GOTOH, J., H. JIN, U.SUMITA. Numerical Evaluation of Dynamic Behavior of Ornstein-Uhlenbeck Processes Modified by Various Boundaries and its Application to Pricing Barrier Options [J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2011, 13(1): 193-219.

## Numerical Computation of Stock Loan Valuation with Stochastic Interest Rates

JIN Hui

(School of Economics, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** For the purpose of stock loan valuation, a stock price model is established under the stochastic interest rate framework, and the continuous state bivariate process of stock price is approximated by a discrete state bivariate birth-death process. More specifically, the logarithmic process of stock price is approximated via moment matching, while process of the interest rate is approximated based on the Ehrenfest processes approach. Furthermore, a numerical approach using the uniformization procedure is developed to compute the transition probabilities of stock price, which in turn leads to the stock pricing and calculation of loan-to-value ratios. Numerical results demonstrate the validity of the numerical approach with speed and the rationality. Given the maturity of stock loan, the loan-to-value ratios almost remain stable.

**Keywords:** stock Loan; loan-to-value ratios; transition probabilities; numerical computation

**作者简介:**金辉, 女, 杭州电子科技大学经济学院副教授, 博士, 主要从事金融工程与风险管理研究, 电子邮箱: [jinhui@hdu.edu.cn](mailto:jinhui@hdu.edu.cn)。