委托代理关系下多阶段投资组合优化

朱旭

（湖南大学工商管理学院，长沙市，410082）

摘要：采用均值-方差效用函数，在信息不对称情况下构建了委托代理关系下多阶段投资组合优化模型，研究委托投资管理中多期最优投资组合策略以及委托人与代理人之间的多期契约。通过构造辅助函数用动态规划原理求出问题的解析解，即每期的最优线性契约和最优投资组合，通过仿真分析分别得到了委托人和代理人的有效前沿面，并对比了投资者自己等量投资与委托他人投资的优劣。

关键词：委托代理；多阶段投资组合优化；线性费用契约；等量投资

中图分类号： F830.593　　　**文献标识码：A**

0 引言

最近几十年,金融市场越来越多的投资基金的所有权与管理权相分离,机构投资者迅猛发展,在发达金融市场机构投资者已占主导地位,委托投资组合管理成为金融资产管理的主要形式。相比投资者个人投资，委托组合投资具有规模优势、分散投资风险的优势、专家管理的优势。因此，越来越多人选择委托理财，随着基金业的快速发展，委托投资组合管理已成为实践者感兴趣的问题，学术界也越来越关注。对于委托投资组合管理的研究，主要集中在以下两个方面：

一是投资者和经理人之间代理问题，其主要探讨的是激励费用合同设计。该目的是设计一种激励机制来规避经理人的“道德风险”，使得经理人能够最大限度为投资者的利益工作。Stoughton(1993)认为如果投资者和经理人之间信息对称，且两者对于风险厌恶，有最优风险分担合同存在，则此时的合同就是线性最优的风险分担比例[1]。Plambeck 和 Zenios(2000)研究了时间一致的动态委托代理问题,给出了信息对称和信息不对称两种情况下委托人支付给代理人的每期最优薪酬[2]。Ou-Yang(2003)假设管理者具有负指数效用函数,在 Merton 等的连续金融关系下,建立了委托代理模型,利用鞅方法得出动态委托资产组合管理中的最优合同为对称合同,并且建议经理人应该接受一个固定报酬再加一个根据基准组合收益变化的奖金或惩罚[3]。盛积良和马永开（2007）研究了在考虑管理者信息成本的条件下的基于绩效的线性报酬合同,发现在考虑信息成本的条件下基于绩效的线性报酬合同能对管理者起到激励作用[4]。刘京军等（2009）考虑了离散环境中，基金投资委托人与管理人之间的线性最优契约问题，研究表明基金管理人的最优业绩报酬应包含部分固定费用、管理成本以及超额投资收益[5]。

二是激励费用合同对经理人决策行为的影响，主要研究经理人的投资决策。Starks(1987)比较了委托人和代理人对称信息和非对称信息下的费用合同对资产组合的影响,结果表明相比非对称信息下的费用合同,基于信息对称的费用合同不具备减少代理费用的作用[6]。Grinblatt and Titman(1989)研究了投资策略和费用合同的关系。对不同的费用结构,代理人的投资策略会随之发生改变[7]。Elton(2003)发现，相对其他费用结构的费用模式而言，期权费用结构基金的收益更高[8]。Liu 等(2009)对个人投资者同专业代理人委托关系中离散时间资产组合选择及契约问题进行了研究,通过研究了解到最优契约及资产组合的显示表达式[9]。刘冰冰(2011)等人提出了线性契约选择及委托代理投资组合的单期均值-方差模型,求解了信息对称及不对称两种情况下的最优投资组合和最优线性契约的显示表达式[10]。杜纲等（2017）在分析了委托代理模式下投资组合优化问题属性下的基础上，建立了 Stackelberg 博弈机制下投资组合选择的双层规划模型，并用遗传算法得到模型的解[11]。

以上研究都是针对单期模型展开讨论，而实际上委托人与代理人的契约关系以及代理人的投资决策都会随着交易的进行不断变化，它是一个动态过程。庄新田等基于代理人过度自

信变化的基础上，研究了委托人与代理人之间的多期契约关系，分析了代理人过度自信及交易次数对最优激励契约的影响[12]。虽然庄新田等引进动态多期思想对其进行了研究，但注重的是委托代理下的激励问题研究，并未对委托代理下代理人如何进行投资组合优化进行深入研究。

本文在委托人和代理人都具有均值-方差效用函数的假设下，讨论代理人的最优投资组合策略以及委托人与代理人之间的多期契约问题，在信息不对称下解出了每期最优投资组合和最优契约的解析解。

1 模型构建

假设市场中有两类经济人：委托人（投资者）和代理人（管理者）。委托人提供资金，代理人帮委托人投资管理资金。市场有 n 种风险资产和一种无风险资产。代理人将委托人给予的初始财富 x_0 在这 $n+1$ 个资产上进行组合投资，投资进行 T 期，每期的资产配置不一样。设 $t(t=0,1,\cdots,T-1)$ 时刻时，无风险资产的收益率为 e_t^0；第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个风险资产的收益率为 e_t^i。记 $e_t=\left(e_t^1,e_t^2,\cdots,e_t^n\right)^T$。设 e_t 的均值 $E(e_t)$ 和协方差矩阵 $\operatorname{cov}(e_t)$ 是已知的。假定随机向量 $e_t(t=0,1,\cdots,T-1)$ 是统计独立的。

令 x_t 为投资者在第 $t(t=0,1,\cdots,T-1)$ 期初的总财富量，u_t^i 是投资者在第 $t(t=0,1,\cdots,T-1)$ 期初投资在第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 种风险资产上的财富量，则在第 t 期初投资在无风险资产上的财富量为 $x_t-\sum_{i=1}^n u_t^i$。于是，投资者在第 t 阶段末的财富总量为

$$x_{t+1}=\sum_{i=1}^n e_t^i u_t^i+\left(x_t-\sum_{i=1}^n u_t^i\right)e_t^0=e_t^0x_t+P_t'u_t \quad t=0,1,\cdots,T-1。\tag{1}$$

其中 $P_t=\left[P_t^1,P_t^2,\cdots,P_t^n\right]^T=\left[\left(e_t^1-e_t^0\right),\left(e_t^2-e_t^0\right),\cdots,\left(e_t^n-e_t^0\right)\right]^T$，$t=0,1,\cdots,T-1$。 (2)

由于投资进行 T 期，每一期的资产配置不一样，每一期委托人都得支付代理人一定的代理费用，投资结束后一并支付给代理人，代理费用不计入投资当中。假设委托人同代理人之间签订是线性费用合约，即代理人的第 t 期的代理费用为

$$s_t=\alpha+\beta\left(x_{t+1}-x_b\right),t=0,1,\cdots,T-1 \tag{3}$$

其中，α 为代理人每期的固定费用，相当于底薪，x_b 是激励基准的价值。当投资财富大于激励基准价值时，代理人获得正的激励代理费用，是一种奖励；当投资财富小于激励基准价值时，代理人获得负的激励代理费用，是一种惩罚；当投资财富等于激励基准价值时，代理人只获得固定费用，没有激励代理费用。β 是激励比例，相当于提成系数，β 越大激励效果越大。

设代理人的投资成本为 0，令 S_t 为代理人在第 $t(t=0,1,\cdots,T-1)$ 期初的总财富量，则第 t 期末代理人的总财富为 $S_{t+1}=e_t^0S_t+s_t$。假设代理人第 t 期选择在风险资产的投资组合为 $u_t=\left[u_t^1,u_t^2,\cdots,u_t^n\right]^T$，$t=0,1,\cdots,T-1$，$T$ 期后委托人的总财富为 x_T-S_T。

假设委托人和代理人都是风险规避的，效用函数都是均值—方差效用函数，不失一般性，委托人和代理人的风险规避程度分别为 $\gamma_1(\gamma_1>0),\gamma_2(\gamma_2>0)$。

则委托人的效用函数为

$$U_1(x)=E(x)-\frac{\gamma_1}{2}Var(x) \tag{4}$$

代理人的效用函数为

$$U_2(x)=E(x)-\frac{\gamma_2}{2}Var(x) \tag{5}$$

代理人的参与条件是代理人从事财富管理所得预期代理费用不小于其最低生活保障，记

为v_0。代理人的预期效用为$U_2(S)$，则参与约束为

$$U_2(S)\ge v_0 \text{即} E(S)-\frac{\gamma_2}{2}Var(S)\ge v_0 \tag{6}$$

在实际委托代理过程中，委托人总是想方设法观测代理人的投资行为，以防范代理人的道德风险；而代理人在保证委托人放心的前提下也积极为自己尽可能创造效益，代理人也希望在允许的范围下最大化自己利益。因此存在信息对称和信息不对称两种情况，不过，在单阶段投资中委托人有可能观测到代理人的投资行为，但如果投资进行多期，委托人很难观测到代理人的每期行为。因此多阶段投资下我们只考虑信息不对称的情况。下面研究这信息不对称情况下多阶段委托代理投资组合优化模型。

当信息不对称时，委托人和代理人之间存在一个博弈。代理人掌握着投资的主动权，委托人拥有订立费用合约的主动权。当委托人同代理人签订合约之后，代理人会选择此合约下其效用最大，或者说获利最大的投资组合。即无论签订什么样的费用合约，代理人都会在该费用合约下选择使自己效用达到最大的投资组合。委托人的目标便是在此前提下选一个使得自己最终效用最大的费用合约，也即本文中的代理费用模式。该问题的模型可表示为$(N1)$：

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha,\beta} U_1(x_T-S_T)\\
&s.t.\quad \max_{\pi} U_2(S_T)\ge v_0\\
&\qquad x_{t+1}=e_t^0x_t+P_t^Tu_t \qquad t=0,1,\cdots,T-1\\
&\qquad S_{t+1}=e_t^0S_t+\alpha+\beta(x_{t+1}-x_b) \qquad t=0,1,\cdots,T-1\\
&\qquad S_0=0
\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$\pi=\{u_1,u_2,\ldots,u_{T-1}\}$

将委托人和代理人的效用函数代入上式模型中得模型$(N2)$：

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha,\beta} E(x_T-S_T)-\frac{\gamma_1}{2}Var(x_T-S_T)\\
&s.t.\quad \max_{\pi} E(S_T)-\frac{\gamma_2}{2}Var(S_T)\ge v_0\\
&\qquad x_{t+1}=e_t^0x_t+P_t^Tu_t \qquad t=0,1,\cdots,T-1\\
&\qquad S_{t+1}=e_t^0S_t+\alpha+\beta(x_{t+1}-x_b) \qquad t=0,1,\cdots,T-1\\
&\qquad S_0=0
\end{aligned} \tag{8}$$

2 模型求解

求解问题可分为两步，首先求解各费用模式下每一期选择在风险资产上的最优投资组合策略$\hat{\pi}=\{\hat{u}_0,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{T-1}\}$，即代理人在任何费用模式下会选择对自己最有利的一种投资组合；然后把$\hat{\pi}=\{\hat{u}_0,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{T-1}\}$代入目标函数解出对委托人而言最优的费用参数$\alpha^*$和$\beta^*$，即委托人在所有可能投资策略下选择对自己最有利的费用模式。

为计算方便，定义如下记号：

$$C_t=E^{-1}(P_tP_t')E(P_t) \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

$$A_t=P_t'E^{-1}(P_tP_t')E(P_t) \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

$$B_t=E(P_t')E^{-1}(P_tP_t')E(P_t) \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

$$I_t=\prod_{s=t}^{T-1}(1-B_s) \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

$$M_t=\prod_{s=t}^{T-1}e_s^0 \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

$$W_t = 1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=j}^{t-1} e_i^0 \qquad t = 0,1,2,\ldots,T-1$$

$$N_t = \left(1 + \sum_{j=t+1}^{T-1} \prod_{i=j}^{T-1} e_i^0\right)(\alpha - \beta x_b) \quad t = 0,1,2,\ldots,T-1$$

$$L = 1 + \sum_{j=1}^{T-1} \left(\prod_{i=j}^{T-1} e_i^0\right)$$

$$H = \sum_{j=0}^{T-1} \left[\frac{1}{T-j} B_j \prod_{i=0}^{j-1} (1 - B_i)\right]$$

$$J = \sum_{j=0}^{T-1} \left[\frac{1}{(T-j)^2} B_j \prod_{i=0}^{j-1} (1 - B_i)\right]$$

定理 1 当信息不对称时，委托人同代理人之间的最优代理费用模式为：

$$s_t^* = \alpha^* + \beta^*(x_{t+1} - x_b) \quad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{9}$$

其中 $\beta^* = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \dfrac{J - H^2}{HI_0}$， (10)

$$\alpha^* = \frac{1}{L}\left(v_0 + \frac{1}{2\gamma_2} - \frac{1}{2\gamma_2 I_0}\right) + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{J - H^2}{HI_0}\left(x_b - \frac{TM_0}{L} x_0\right) \;; \tag{11}$$

代理人选择在风险资产上的最优投资组合为 $\pi^* = \{u_0^*, u_1^*, \ldots, u_{T-1}^*\}$，

$$u_t^* = -e_t^0 C_t \left(x_t + \frac{S_t}{(T-t)\beta^*}\right) + \frac{e_t^0 C_t}{(T-t)}\left(\frac{M_0}{M_t} T x_0 - W_t x_b\right) + \frac{e_t^0 C_t}{(T-t)\beta^*}\left(\frac{1}{\gamma_2 I_0 M_t} + W_t \alpha^*\right),$$

$t = 0,1,\cdots,T-1$。 (12)

证明：

（1）第一步为求解约束条件中的最大值问题。

令 $\omega = \dfrac{\gamma_2}{2}$，第一步模型为 $P(\omega)$：

$$\begin{aligned} &\max_{\pi} E(S_T) - \omega Var(S_T) \\ &s.t.\quad x_{t+1} = e_t^0 x_t + P_t' u_t \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \\ &\qquad\;\; S_{t+1} = e_t^0 S_t + \alpha + \beta(x_{t+1} - x_b) \quad t = 0,1,\cdots,T-1 \\ &\qquad\;\; S_0 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

①求解 $P(\omega)$ 先构建辅助问题

由于问题具有动态规划意义下的不可分结构，难以用动态规划方法直接求解它。引用 Li 等在求解多阶段组合优化模型中的方法，构建一个可分的辅助问题，并建立它与 $P(\omega)$ 之间的关系。

考虑如下辅助问题：

$$(A(\lambda,\omega))\begin{cases} \max E(\lambda S_T - \omega S_T^2) \\ s.t.\;\; S_{t+1} = e_t^0 S_t + \alpha + \beta(e_t^0 x_t - x_b) + \beta P_t' u_t \quad t = 0,1,\ldots,T-1 \\ \qquad x_{t+1} = e_t^0 x_t + P_t' u_t \qquad t = 0,1,\ldots,T-1 \\ \qquad S_0 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

记 $A(\lambda,\omega)$ 的最优解 π 的集合为 $\prod_A(\lambda,\omega)$， $P(\omega)$ 的最优解 π 的集合为 $\prod_P(\omega)$ ，

记

$$d(\pi,\omega)=1+2\omega E(S_T)\big|_{\pi} \tag{15}$$

定理 2：若 $\hat{\pi}\in\prod_P(\omega)$，则 $\hat{\pi}\in\prod_A(d(\hat{\pi},\omega),\omega)$。

证明：假设 $\hat{\pi}\notin\prod_A(d(\hat{\pi},\omega),\omega)$，则存在 π 使得：

$$(d(\hat{\pi},\omega),-\omega)\begin{pmatrix}E(S_T)\\E(S_T^2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\pi}>(d(\hat{\pi},\omega),-\omega)\begin{pmatrix}E(S_T)\\E(S_T^2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\hat{\pi}} \tag{16}$$

考虑函数

$$\begin{aligned}U[E(S_T),E(S_T^2)]&=E(S_T)-\omega Var(S_T)\\&=E(S_T)-\omega[E(S_T^2)-E^2(S_T)]\end{aligned} \tag{17}$$

它显然是 $E(S_T)$ 和 $E(S_T^2)$ 的凸函数，因此

$$\begin{aligned}&U[E(S_T),E(S_T^2)]\big|_{\pi}-U[E(S_T),E(S_T^2)]\big|_{\hat{\pi}}\\&\ge\left(\frac{\partial U}{\partial E(S_T)}\Bigg|_{\hat{\pi}},\frac{\partial U}{\partial E(S_T^2)}\Bigg|_{\hat{\pi}}\right)\left[\begin{pmatrix}E(S_T)\\E(S_T^2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\pi}-\begin{pmatrix}E(S_T)\\E(S_T^2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\hat{\pi}}\right]\\&=(d(\hat{\pi},\omega),-\omega)\left[\begin{pmatrix}E(S_T)\\E(S_T^2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\pi}-\begin{pmatrix}E(S_T)\\E(S_T^2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\hat{\pi}}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

结合式（17）和（18）得到：

$$U[E(S_T),E(S_T^2)]\big|_{\pi}>U[E(S_T),E(S_T^2)]\big|_{\hat{\pi}} \tag{19}$$

这与假设 $\hat{\pi}\in\prod_P(\omega)$ 矛盾，故结论成立。

定理 3：令 $\hat{\pi}\in\prod_A(\hat{\lambda},\omega)$，则 $\hat{\pi}\in\prod_P(\omega)$ 的一个必要条件是 $\hat{\lambda}=1+2\omega E(S_T)\big|_{\hat{\pi}}$。

证明：对给定的 ω，$(A(\lambda,\omega))$ 的最优解可由 λ 表示出来，从而相应的最优值 S_T 可由 λ 表示出，记为 $S_T(\lambda,\omega)$。由于 $\prod_P(\omega)\subset\bigcup_{\lambda}\prod_A(\lambda,\omega)$，$(P(\omega))$ 可退化成如下等价的问题:

$$\begin{aligned}&\max_{\lambda}U(E[S_T(\lambda,\omega)],E[S_T^2(\lambda,\omega)])\\&=\max_{\lambda}E[S_T(\lambda,\omega)]-\omega\{E[S_T^2(\lambda,\omega)-E^2[S_T(\lambda,\omega)]\}\end{aligned} \tag{20}$$

其最优解 $\hat{\lambda}$ 的一阶必要条件是 $\dfrac{\partial U}{\partial\lambda}\Big|_{\hat{\lambda}}=0$，即

$$\frac{\partial E[S_T(\hat{\lambda},\omega)]}{\partial\lambda}(1+2\omega E[S_T(\hat{\lambda},\omega)])-\omega\frac{\partial E[S_T^2(\hat{\lambda},\omega)]}{\partial\lambda}=0 \tag{21}$$

又因为 $\hat{\pi}\in\prod_A(\hat{\lambda},\omega)$，根据 Reid 和 Citron[13]的讨论，有

$$\hat{\lambda}\frac{\partial E[S_T(\hat{\lambda},\omega)]}{\partial\lambda}-\omega\frac{\partial E[S_T^2(\hat{\lambda},\omega)]}{\partial\lambda}=0 \tag{22}$$

比较（21）和（22）得

$$\hat{\lambda}=1+2\omega E[S_T(\hat{\lambda},\omega)]=1+2\omega E(S_T)\big|_{\hat{\pi}} \tag{23}$$

定理得证。

②辅助问题求解

通过动态规划求解辅助问题 $(A(\lambda,\omega))$ 的最优策略解和最优值目标函数。

定理 4 根据动态规划的基本思想，可求解得到辅助问题 $(A(\lambda,\omega))$ 的最优策略 u_t 和在第 t 阶段的最优值函数 $f_t(S_t,x_t)$ 分别为：

$$u_t=\frac{e_t^0C_t}{(T-t)\beta M_t}\left\{\frac{\lambda}{2\omega}-M_t\left[S_t+(T-t)\beta x_t\right]-N_t\right\},\quad t=0,1,2,...,T-1 \tag{24}$$

$$f_t(S_t,x_t)=-\omega I_t\left\{M_t\left[S_t+(T-t)x_t\right]+N_t\right\}^2+\lambda I_t\left\{M_t\left[S_t+(T-t)x_t\right]+N_t\right\}+\frac{\lambda^2}{4\omega}(1-I_t), \tag{25}$$

$$t=0,1,2,...,T-1。$$

证明：$(A(\lambda,\omega))$ 问题的求解运用动态规划的的逆序求解法，从 $T-1$ 阶段开始求解，以 u_t 为决策变量，S_t 和 x_t 为状态变量，状态转移方程为

$$S_{t+1}=e_t^0S_t+\alpha+\beta(e_t^0x_t-x_b)+\beta P_t'u_t,\quad x_{t+1}=e_t^0x_t+P_t'u_t\quad,t=0,1,...,T-1。 \tag{26}$$

记 $f_t(S_t,x_t)=\max\limits_{\pi_t}E(\lambda S_T-\omega S_T^2)$，$\pi_t=\{u_t,u_{t+1},\cdots,u_{T-1}\}$

当 $t=T$ 时 $f_T(S_T,x_T)=\lambda S_T-\omega S_T^2$

当 $t=0,1,\cdots,T-1$ 时

$$\begin{aligned}f_t(S_t,x_t)&=\max_{u_t}E\left[f_{t+1}(S_{t+1},x_{t+1})\right]\\&=\max_{u_t}E\{f_{t+1}[e_t^0S_t+\alpha+\beta(e_t^0x_t-x_b)+\beta P_t'u_t]\}\end{aligned} \tag{27}$$

当 $t=T-1$ 时，根据动态规划原理则有：

$$\begin{aligned}f_{T-1}(S_{T-1},x_{T-1})&=\max_{u_{T-1}}E\left[f_T(S_T,x_T)\right]\\&=\max_{u_{T-1}}E\{\lambda[e_{T-1}^0S_{T-1}+\alpha+\beta(e_{T-1}^0x_{T-1}-x_b)+\beta P_{T-1}'u_{T-1}]\\&\quad-\omega[e_{T-1}^0S_{T-1}+\alpha+\beta\left(e_{T-1}^0x_{T-1}-x_b\right)+\beta P_{T-1}'u_{T-1}]^2\}\end{aligned} \tag{28}$$

求（28）式中函数关于 μ_{T-1} 的梯度，并令其等于零，得

$$\begin{aligned}&\lambda\beta E(P_{T-1})-\omega\{2\beta^2E(P_{T-1}P_{T-1}')u_{T-1}\\&\quad+2\beta e_{T-1}^0S_{T-1}E(P_{T-1})+2[\alpha+\beta(e_{T-1}^0x_{T-1}-x_b)]\beta E(P_{T-1})\}=0\end{aligned} \tag{29}$$

由此得到（3.28）最优解

$$u_{T-1}=\frac{1}{\beta}C_{T-1}\left[\frac{\lambda}{2\omega}-e_{T-1}^0(S_{T-1}+\beta x_{T-1})-(\alpha-\beta x_b)\right] \tag{30}$$

将其代入（3.28）的目标函数，得

Multi-Period Portfolio Optimization Under Principal-Agent Relationship

$$\begin{aligned}f_{T-1}(S_{T-1},x_{T-1})&=-\omega(1-B_{T-1})\left[e_{T-1}^0(S_{T-1}+\beta x_{T-1})+(\alpha-\beta x_b)\right]^2\\&\quad+\lambda(1-B_{T-1})\left[e_{T-1}^0(S_{T-1}+\beta x_{T-1})+(\alpha-\beta x_b)\right]+\frac{\lambda^2}{4\omega}B_{T-1}\end{aligned} \tag{31}$$

一般地，对每个 $t=0,1,2,...,T-2$，设

$$\begin{aligned}f_{t+1}(S_{t+1},x_{t+1})&=-\omega I_{t+1}\{M_{t+1}[S_{t+1}+(T-t-1)\beta x_{t+1}]+N_{t+1}\}^2\\&\quad+\lambda I_{t+1}\{M_{t+1}[S_{t+1}+(T-t-1)\beta x_{t+1}]+N_{t+1}\}+\frac{\lambda^2}{4\omega}(1-I_{t+1})\end{aligned} \tag{32}$$

则有

$$f_t(S_t,x_t)=\max_{u_t} E\left[f_{t+1}(S_{t+1},x_{t+1})\right]$$
$$=\max_{u_t} E\{\lambda I_{t+1}[M_t(S_t+(T-t)\beta x_t)+N_t+M_{t+1}(T-t)\beta P_t'u_t]$$
$$-\omega I_{t+1}[M_t(S_t+(T-t)\beta x_t)+N_t+M_{t+1}(T-t)\beta P_t'u_t]^2+\frac{\lambda^2}{4\omega}(1-I_{t+1})\} \tag{33}$$

求（33）式中函数关于 μ_t 的梯度，并令其等于零，得

$$\lambda E(P_t)-\omega\{2[M_t(S_t+(T-t)\beta x_t)+N_t]E(P_t)+2M_{t+1}(T-t)\beta E(P_tP_t')\}=0 \tag{34}$$

求解得到最优解

$$u_t=\frac{e_t^0C_t}{(T-t)\beta M_t}\left\{\frac{\lambda}{2\omega}-M_t[S_t+(T-t)\beta x_t]-N_t\right\} \tag{35}$$

从而得最优值

$$f_t(S_t,x_t)=-\omega I_t\{M_t[S_t+(T-t)x_t]+N_t\}^2+\lambda I_t\{M_t[S_t+(T-t)x_t]+N_t\}+\frac{\lambda^2}{4\omega}(1-I_t) \tag{36}$$

则由（30）~（31）知，式（35）~（36）对 $t=T-1$ 也成立。由此，根据数学归纳法，式（35）~（36）对 $t(t=0,1,\cdots,T-1)$ 成立。即，得证。

③原问题求解

通过辅助问题 $(A(\lambda,\omega))$ 与原问题 $(P(\omega))$ 之间的关系可求得原问题的每阶段最优投资组合策略及代理人期末财富的期望收益、方差。

将（35）代入状态转移方程（26）中可得：

$$S_{t+1}=e_t^0S_t+\alpha+\beta(e_t^0x_t-x_b)+\beta P_t'u_t$$
$$=(1-A_t)[e_t^0(S_t+\beta x_t)+\alpha-\beta x_b]+\frac{\lambda}{2\omega}A_t \quad t=0,1,\ldots,T-1 \tag{37}$$

在（37）两端取期望得

$$E(S_{t+1})=e_t^0S_t+\alpha+\beta(e_t^0E(x_t)-x_b)+\beta E(P_t'u_t)$$
$$=(1-B_t)[e_t^0(E(S_t)+\beta E(x_t))+\alpha-\beta x_b]+\frac{\lambda}{2\omega}B_t \qquad t=0,1,\ldots,T-1 \tag{38}$$

反复利用迭代方程（38），可以得到

$$E(S_T)=I_0(M_0T\beta x_0+N_0)+\frac{\lambda}{2\omega}(1-I_0) \tag{39}$$

同理可得

$$E(S_T^2)=I_0(M_0T\beta x_0+N_0)^2+\frac{\lambda^2}{4\omega^2}(1-I_0) \tag{40}$$

因此有

$$Var(S_T)=I_0(1-I_0)\left(M_0T\beta x_0+N_0-\frac{\lambda}{2\omega}\right)^2 \tag{41}$$

根据**定理 3** 可知，原问题的最优解必定是某个对应的辅助问题的最优解。将辅助问题的最优解对应的代理人终端财富值 S_T 的期望表达式（39）、方差（41）代入原问题 $(P(\omega))$ 的目标函数中，得到一个关于 λ 的函数：

$$U(\lambda)=E(S_T)-\omega Var(S_T)$$
$$=I_0\left(M_0T\beta x_0+N_0\right)+\frac{\lambda}{2\omega}\left(1-I_0\right)-\omega I_0\left(1-I_0\right)\left(M_0T\beta x_0+N_0-\frac{\lambda}{2\omega}\right)^2 \quad (42)$$

因此，$\hat{\lambda}$ 是问题 $\max_{\lambda} U(\lambda)$ 的最优解，从而 $\hat{\lambda}$ 是如下方程的解

$$\frac{dU}{d\lambda}=\frac{1}{2\omega}\left(1-I_0\right)+I_0\left(1-I_0\right)\left(M_0T\beta x_o+N_0-\frac{\lambda}{2\omega}\right)=0 \quad (43)$$

得到

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{I_0}+2\omega\left(M_0T\beta x_0+N_0\right) \quad (44)$$

$$U\left(\hat{\lambda}\right)=\frac{1-I_0}{4\omega I_0}+M_0T\beta x_0+N_0 \quad (45)$$

将（44）代入（35）得到多阶段投资组合优化问题 $(P(\omega))$ 的最优解：

$$\hat{u}_t=\frac{e_t^0C_t}{(T-t)\beta}\left(\frac{1}{2\omega I_0M_t}+\frac{M_0T\beta x_0+N_0-N_t}{M_t}-S_t\right)-e_t^0C_tx_t \quad t=0,1,2,...,T-1 \quad (46)$$

各线性费用模式下代理人终端财富的期望、方差最优解析解为：

$$E(\hat{S}_T)=M_0T\beta x_0+N_0+\frac{1-I_0}{2\omega I_0} \quad (47)$$

$$Var(\hat{S}_T)=\frac{1-I_0}{4\omega^2I_0} \quad (48)$$

各线性费用模式下委托人终端财富的期望、方差最优解析解为：

$$E(\hat{x}_T-\hat{S}_T)=\left(1-T\beta\right)M_0x_0-N_0+\frac{1}{2\omega I_0}\left(\frac{1}{\beta}H+I_0-1\right) \quad (49)$$

$$Var(\hat{x}_T-\hat{S}_T)=\frac{1}{4\omega^2I_0^2}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(J-H^2\right)-\frac{1}{\beta}HI_0+I_0(1-I_0)\right] \quad (50)$$

⑵把 $\hat{\pi}=\{\hat{u}_0,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{T-1}\}$ 代入 $(N2)$ 得第二步的模型 $(N3)$：

$$\max_{\alpha,\beta} E\left(x_T-S_T\right)-\frac{\gamma_1}{2}Var\left(x_T-S_T\right)$$
$$s.t.\ \ \frac{1-I_0}{4\omega I_0}+M_0T\beta x_0+N_0\geq v_0$$

由于该问题的可行解是凸集，由此极值在约束条件等号成立时取得，令 $\varphi=\frac{\gamma_1}{2}$ ，模型 $(N3)$ 整理简化得模型 $(N4)$：

$$\max_{\beta} V=M_0x_0-v_0-\frac{1-I_0}{4\omega I_0}+\frac{1}{\beta}\frac{H}{2\omega I_0}-\frac{\varphi}{4\omega^2I_0^2}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(J-H^2\right)-\frac{2}{\beta}HI_0+I_0(1-I_0)\right] \quad (51)$$

$$\frac{dV}{d\beta}\Big|_{\beta^*}=\left(-\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{1}{2\omega I_0}H-\left(-\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{\varphi}{2\omega^2I_0^2}\left[\frac{1}{\beta}\left(J-H^2\right)-HI_0\right]=0 \quad (52)$$

解得 $\beta^*=\frac{\varphi}{\varphi+\omega}\frac{J-H^2}{HI_0}$ (53)

将 β^* 代入 $(N3)$ 的等式约束，得

$$\alpha^* = \frac{1}{L}\left(v_0 - \frac{1-I_0}{4\omega I_0} - M_0 T\beta^* x_0\right) + \beta^* x_b$$
$$= \frac{1}{L}\left(v_0 + \frac{1}{4\omega} - \frac{1}{4\omega I_0}\right) + \frac{\varphi}{\varphi+\pi}\frac{J-H^2}{HI_0}\left(x_b - \frac{TM_0}{L}x_0\right) \tag{54}$$

令$\varphi = \frac{\gamma_1}{2}, \omega = \frac{\gamma_2}{2}$得

当信息不对称时，委托人同代理人之间的最优代理费用模式为$s_t^* = \alpha^* + \beta^*(x_{t+1} - x_b)$ $t = 0,1,\cdots,T-1$，其中$\beta^* = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{J-H^2}{HI_0}$

$$\alpha^* = \frac{1}{L}\left(v_0 + \frac{1}{2\gamma_2} - \frac{1}{2\gamma_2 I_0}\right) + \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{J-H^2}{HI_0}\left(x_b - \frac{TM_0}{L}x_0\right)$$
。

将式（53）、（54）代入式（46）得代理人每期选择在风险资产的最优投资组合为$\pi^* = \{u_0^*, u_1^*, \ldots, u_{T-1}^*\}$，

$$u_t^* = -e_t^0 C_t\left(x_t + \frac{S_t}{(T-t)\beta^*}\right) + \frac{e_t^0 C_t}{(T-t)}\left(\frac{M_0}{M_t}Tx_0 - W_t x_b\right) + \frac{e_t^0 C_t}{(T-t)\beta^*}\left(\frac{1}{\gamma_2 I_0 M_t} + W_t \alpha^*\right),$$
$t = 0,1,\cdots,T-1$。 (55)

即**定理**1得证。

将（53）、（54）代入式（47）~（50）得委托人和代理人终端财富的期望、方差最优解析解为

$$E(S_T^*) = v_0 + \frac{1-I_0}{2\gamma_2 I_0} \tag{56}$$

$$Var(S_T^*) = \frac{1-I_0}{\gamma_2^2 I_0} \tag{57}$$

$$E(x_T^* - S_T^*) = M_0 x_0 - v_0 + \frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}\frac{H^2}{J-H^2} - \frac{1}{2\gamma_2}\frac{1-I_0}{I_0} \tag{58}$$

$$Var(x_T^* - S_T^*) = \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}{\gamma_1^2\gamma_2^2}\frac{H^2}{J-H^2} + \frac{1}{\gamma_2^2}\frac{1-I_0}{I_0} \tag{59}$$

3 仿真分析

3.1 委托人和代理人的有效前沿面

本文采用 Li 和 Ng 的数据，考虑一个投资时期$T = 2$的投资决策过程，委托人初始财富$x_0 = 1$。假设市场上有 3 个风险资产，1 个无风险资产，无风险资产的收益率$e_t^0 = 1.04$，$t = 0,1$，3 个风险资产在每阶段的期望收益率和资产间的协方差矩阵分别为：

$$E(e_t) = [1.162, 1.246, 1.228]^T \quad t = 0,1 \tag{60}$$

$$Cov(e_t) = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{bmatrix} \quad t = 0,1 \tag{61}$$

根据模型(N2)，两阶段模型表示为

$$
\begin{aligned}
&\max_{\alpha,\beta} E(x_2 - S_2) - \frac{\gamma_1}{2} Var(x_2 - S_2) \\
&s.t. \quad \max_{\pi} E(S_2) - \frac{\gamma_2}{2} Var(S_2) \geq v_0 \\
&\qquad x_{t+1} = e_t^0 x_t + P_t' u_t \qquad t = 0,1 \\
&\qquad S_{t+1} = e_t^0 S_t + \alpha + \beta(x_{t+1} - x_b) \qquad t = 0,1 \\
&\qquad S_0 = 0
\end{aligned}
\tag{62}
$$

对于两阶段的投资组合模型，委托人的前沿面如下：

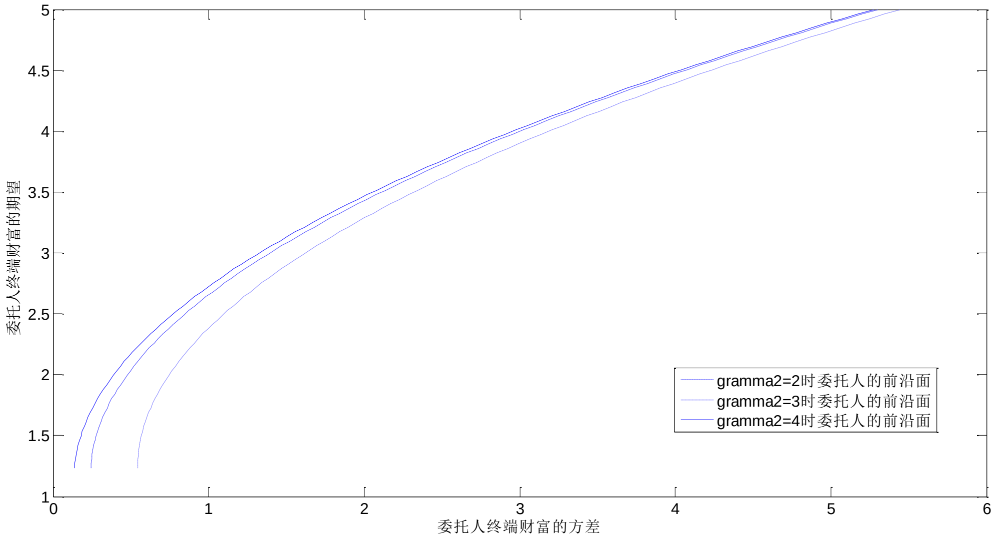

图1 代理人不同风险规避度时委托人的前沿面

从图 1 可知，委托人的有效前沿面跟代理人的风险规避度 γ_2 有关，γ_2 越大，相同方差下的委托人终端财富期望越大。同时，从图 3.1 可知如果代理人的风险规避度 γ_2 给定，则委托人终端财富的期望随着方差的增大而增大。

代理人的前沿面如下：

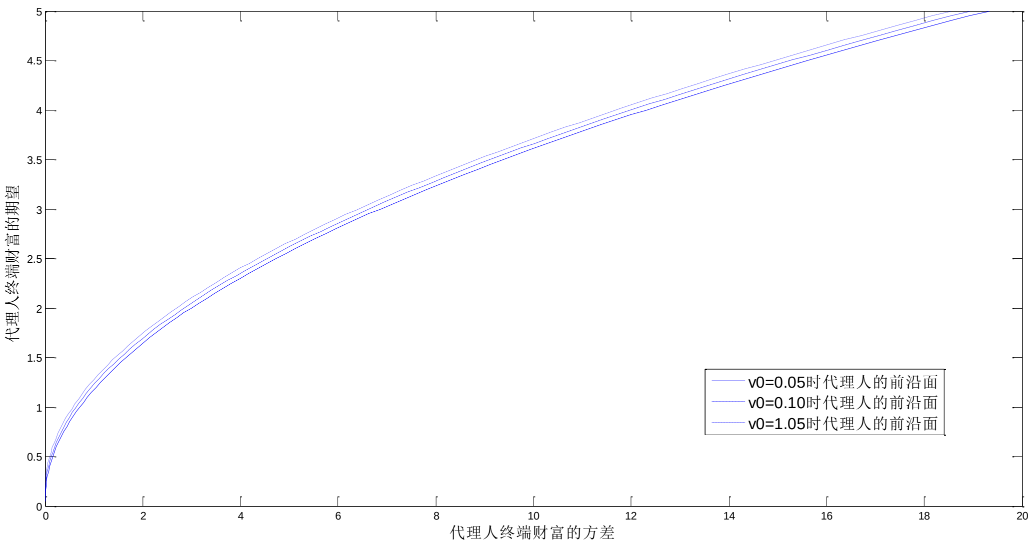

图2 代理人不同最低生活保障时的前沿面

从图2可知，代理人的有效前沿面跟代理人的最低生活保障v_0有关，v_0越大，相同方差下的代理人终端财富期望越大。同时，从图3.2可知，如果代理人的最低生活保障v_0给定，则代理人终端财富的期望随着方差的增大而增大。

3.2　等量投资与委托代理投资对比分析

前面已经提到委托投资管理具有许多优势，投资者之所以委托他人管理资金是因为代理人拥有专业的投资知识及丰富的投资经验。现在通过仿真分析对比等量投资与委托代理投资的优劣。

现假设投资者自己进行投资决策，初始财富W_0，由于缺乏专业性，不妨假设投资者在上述市场上存在的这1个无风险资产和3个风险资产上进行等量投资。投资进行两期，每一期在这4个资产的投资额是相等的，即第$t(t=0,1)$时刻，投资在每一资产的投资额为$\frac{1}{4}W_t$，$t=0,1$。令$\tilde{R}_t=(e_t^0;e_t),t=0,1$，$I=[1;1;1;1]$。

则每期末的财富为

$$W_{t+1}=\frac{1}{4}W_t I'\tilde{R}_t,\quad t=0,1 \tag{63}$$

投资结束后投资者的财富为

$$W_2=\frac{1}{4^2}W_0 I'\tilde{R}_0 I'\tilde{R}_1 \tag{64}$$

投资者终端财富的期望、方差为

$$E(W_2)=\frac{1}{4^2}W_0 I'E(\tilde{R}_0)I'E(\tilde{R}_1) \tag{65}$$

$$Var(W_2)=\frac{1}{4^4}{W_0}^2 I'[E(\tilde{R}_0\tilde{R}_0')E(\tilde{R}_1\tilde{R}_1')-E(\tilde{R}_0)E(\tilde{R}_0')E(R_1)E(\tilde{R}_1')]I \tag{66}$$

投资者终端财富的预期效用为

$$\begin{aligned}U(W_2)&=E(W_2)-\frac{\gamma_1}{2}Var(W_2)\\&=\frac{1}{4^2}W_0\prod_{i=0}^{1}[I'E(\tilde{R}_i)]-\frac{\gamma_1}{2}\frac{1}{4^4}{W_0}^2 I'[\prod_{i=0}^{1}E(\tilde{R}_i\tilde{R}_i')-\prod_{i=0}^{1}(E(\tilde{R}_i)E(\tilde{R}_i'))]I\end{aligned} \tag{67}$$

下面给出含有无风险资产时投资者等量投资和委托他人投资时终端财富的预期效用与初始财富的关系对比图

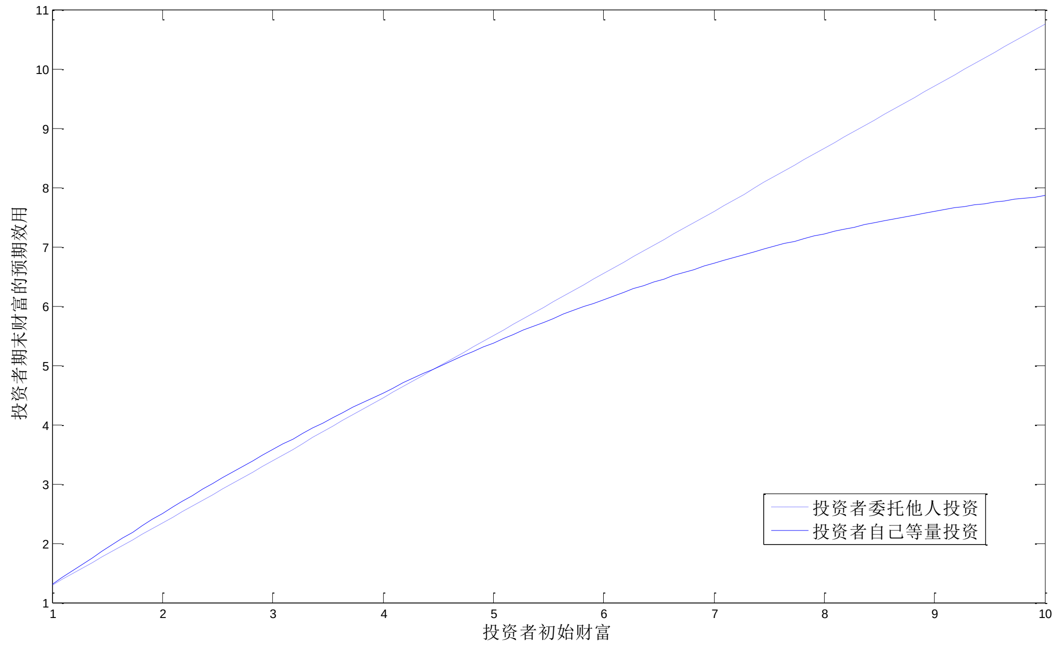

图 3 含有无风险资产时等量投资和委托代理投资时终端财富的预期效用与初始财富的关系对比图

从图 3 可知，当初始财富比较小时，投资者等量投资时终端财富的预期效用比投资者委托他人投资时大；当初始财富比较大时，投资者等量投资时终端财富的预期效用比投资者委托他人投资时小。也就是说，当投资者资金量比较小时，自己投资比较占优势，当投资者资金量比较大时，委托他人投资相对占优势，这与现实投资情况相符。

4 结论

本文借鉴委托代理关系下单阶段投资组合优化模型，采用线性费用契约，在委托人和代理人都具有均值-方差效用函数假设下构建了多阶段委托代理投资组合优化模型，讨论代理人的最优投资组合策略以及委托人与代理人之间的多期契约。通过构造辅助函数用动态规划原理求出问题的解析解，即每期的最优线性契约和最优投资组合仿真研究方面，给出了含有无风险资产情形时委托人和代理人的有效前沿面。委托人的有效前沿面跟代理人的风险规避度有关γ_2有关，γ_2大时委托人的前沿面要优于γ_2小时委托人的前沿面；代理人的有效前沿面跟代理人的最低生活保障v_0有关，v_0大时代理人的前沿面要优于v_0小时代理人的前沿面。同时，鉴于委托代理投资需要代理费用，考察了投资者等量投资和委托他人投资的优劣。仿真分析表明，无论是含有还是不含有无风险资产，当投资者资金量比较小时，自己投资比较占优势；当投资者资金量比较大时，委托他人投资相对占优势。

参考文献

[1] Plambeck E L, Zenios S A. Performance-based incentives in a dynamic principal-agent model[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2000, 2(3): 240-263

[2] Ou-Yang H. Optimal contracts in a continuous-time delegated portfolio management problem[J]. Review of Financial Studies, 2003, 16(1): 173-208

[3] 盛积良, 马永开. 管理者具有市场能力的委托组合投资管理合同研究[J]. 系统 工程理论与实践, 2007, 27(10): 48-53

[4] Grinblatt M, Titman S. Mutual fund performance: An analysis of quarterly portfolio holdings[J]. Journal of business, 1989: 393-416

[5] Elton E J, Gruber M J, Blake C R. Incentive fees and mutual funds[J]. The Journal of Finance, 2003, 58(2): 779-804

[6] Liu J, Liang J. Asset Allocation and Optimal Contract for Delegated Portfolio Management[J]. Cutting-Edge Research Topics on Multiple Criteria Decision Making, 2009: 713-720

[7] 李仲飞, 刘冰冰. 委托代理框架下的最优投资组合及线性费用契约[J]. 中山大学学报: 社会科学版, 2011, 51(6): 192-199

[8] Stoughton N M. Moral hazard and the portfolio management problem[J]. The journal of finance, 1993, 48(5): 2009-2028

[9] 杜纲, 贾正晞, 熊奕璇, 等. 委托代理模式下投资组合选择的主从关联优化[J]. 天津大学学报: 社会科学版, 2017, 19(1): 36-42

[10] Starks L T. Performance incentive fees: An agency theoretic approach[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22(01): 17-32

[11] 庄新田, 王健. 基于过度自信和监督机制的动态激励契约研究[J]. 系統工程學報, 2010, 25(5): 642-650

[12] 刘京军, 梁建峰. 道德风险下的最优委托理财契约研究[J]. 系統工程學報, 2009, 24(5): 602-606

[13] Reid R W, Citron S J. On noninferior performance index vectors[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1971, 7(1): 11-28

Multi-Period Portfolio Optimization Under Principal-Agent Relationship

ZHU Xu

(School of Business Administration,Hunan University,Changsha 410082)

Abstract：Using the mean-variance utility function, this paper constructed the multi-stage portfolio optimization model under the principal-agent relationship in the case of information asymmetry. The multi-period optimal investment portfolio strategy and the multi-period contract between the principal and the agent were also studied. The analytic solution of the problem is obtained by constructing the auxiliary function with the dynamic programming principle, which is the optimal linear contract and the optimal investment portfolio. Through the simulation analysis, the paper got the effective frontier of the principal and the agent respectively, and it compared the merits and demerits of investors' equivalent investment and delegate investment.

Keywords: Principal-agent; Multi-Period Portfolio Optimization; Linear Cost Contract; Equal Investment