

互助养老年金的给付模型及逆选择风险研究

张琳 杨起军

(湖南大学金融与统计学院, 湖南省长沙市, 410000)

摘要: 互助养老年金可以为参与者提供类似于普通养老年金的现金流, 但是发起人无需承担系统性长寿风险。互助养老年金的价值可以从两个角度来衡量: 首先推导出基于“精算公平原则”的给付额递推公式, 并通过选取实际的死亡率数据和恰当的死亡率趋势外推模型来观测该模型下每年给付额的变化情况; 随后通过与普通养老年金的对比证明了互助养老年金的逆选择风险较小的假设。

关键词: 互助养老年金; 长寿风险; 随机动态 CoMa 模型; 蒙特卡洛模拟; 确定等值法

中图分类号: F84 **文献标识码:** A

引言

随着生活环境和医疗技术水平的不断进步, 人类预期寿命不断延长, 由此导致的政府、企业及保险公司等经营管理养老保险的机构或企业的财务负担不断加重的风险即为长寿风险。如果管理不当, 长寿风险将会给这些机构带来沉重的打击。《华尔街日报》2015年10月27日的报道显示: 自1990年到2013年我国人口的平均寿命延长了8年半, 导致我国居民的养老成本不断增加。人社部的报道显示: 由于基本养老保险“资不抵债”, 各级政府的财政补贴在逐年增加, 2014年补贴达到了3548亿元, 2002-2014这13年间基本养老保险的财政总补贴已经超过了2万亿。

长寿风险根据承担主体的差异可以分为系统性长寿风险和个体长寿风险。当消费者实际寿命超过预期从而导致个人资产不足以支付老龄阶段的全部生活费用的风险即为个体长寿风险。当消费者面临个体长寿风险时, 最常见的应对措施即为通过购买养老年金来保证未来的资金来源。如果整体预期寿命无明显变化, 保险公司可以通过大数法则来实现无数个个体长寿风险的有效分散; 但是如果预期寿命的延长变成整个人类社会的趋势, 由此带来整体负债的不断加强的趋势即为系统性长寿风险。相比于一般的保险风险, 寿命延长是一个整体不可逆转的趋势, 因而系统性长寿风险无法通过大数法则来进行分散, 只能通过各种渠道来寻找长寿风险的分担主体。因此, 本文提出由消费者来承担系统性长寿风险的互助养老年金模式, 希望能为经营管理养老保险的政府或企业提供解决长寿风险的新思路。

一、文献综述

关于长寿风险的研究较多的集中在长寿风险证券化方面, 即通过以预期死亡率和实际死亡率为基础的现金流转换将长寿风险转移到资本市场, 最主要的形式是长寿互换和长寿债券。除了证券化以外, 国内外学者还提出两种长寿风险的转移模式: 一是将养老年金和定期寿险组合在一起, 从而实现产品所保风险的自然对冲; 二是在养老年金的给付阶段每年通过计算得到的长寿指数来调整给付金额。但是以上两种方法的效果依然有限: 首先, 由于逆选择风险的存在, 定期寿险和养老年金的消费群体没有明显的交集, 因此自然对冲策略很难达

到预期效果；其次，长寿指数的计算是基于一个国家非常充足的死亡率统计信息，我国的人口统计数据自 1994 年开始才比较完善，数据量明显不足，基于此数据计算得到的长寿指数可信度较低。

因此本文将长寿风险拆分为系统性长寿风险和个体长寿风险，提出年金池承担个体长寿风险而消费者承担系统性长寿风险的互助养老年金模式。关于互助养老年金（Pooled Annuity Fund），John Piggott, Emiliano A. Valdez 和 Bettina Detzel（2005）最早提出了其概念，并推导了精算公平原则下的给付递推模型。但是并未对互助养老年金的特点进行很好的概括；另外，他们提出的给付递推模型在计算 \ddot{a}_x 的时候仍然采用初始设定的死亡率信息，这样做虽然简化了推导过程，但是由此得到的递推模型并不能完全实现长寿风险的转移。随后，Ralph Goldsticker（2007）给出了互助养老年金的定性分析，详细阐述了其概念及特点。

在 John Piggott 等人和 Ralph Goldsticker 的研究基础上，关于互助养老年金的后续研究内容主要集中在以下几个方面：①Jonathan Barry Forman（2014）从企业人员规模的角度研究了互助养老年金的适用范围；②Moshe A. Milevsky, Thomas S. Salisbury（2015）通过求解欧拉—拉格朗日方程得到基于终生效用最大化的互助养老年金的结构，并检验了该结构关于年金人数和逆选择风险的敏感程度；③Michael Z. Stamos（2008）将互助养老年金和普通养老年金结合在一起，并通过 HJB 方程分析了不同情况下二者的最优组合；④Catherine Donnelly, Montserrat Guillén 和 Jens Perch Nielsen（2013）同样基于终生效用最大化理论，将互助养老年金和死亡率连接基金做了对比，最后发现：当投资收益率的方差波动较小时，互助养老年金的期望效用大于死亡率连接基金。

关于互助养老年金的研究目前还有以下两个方面的空缺：一是其给付递推模型尚不够完善，二是关于其逆选择风险的研究目前只有定性的分析但缺少较为有利的数学证明，因此本文的主要内容即为互助养老年金给付递推模型的推导和逆选择风险的研究。

二、互助养老年金的给付模型

（一）给付递推模型

互助养老年金本质上属于相互保险的一种，即具有同质保障需求（养老储蓄）的单位或个人，通过订立合同成为会员，并缴纳养老金形成互助基金，该基金由专业的基金公司负责投资运作，在成员退休后每年给付养老金的一种保险模式。2015 年初，保监会印发了《相互保险组织监管试行办法》，旨在加强对尚处于萌芽阶段的我国相互保险组织的监督管理和促进我国相互保险业的规范健康发展。

根据相互保险的特点以及 John Piggott 等人提出的模型可以归纳出互助养老年金和普通的养老年金之间的两个主要区别：

（1）由于具有互助性质，如果互助养老年金中的某个成员死亡，他的资金将会按照一定的方式在年金池内进行再分配，这部分待分配的资金被称为死亡率信用（Mortality Credit）。

(2) 每年会根据最新的信息来预测未来死亡率的分布和利率的波动, 根据预测得到的结果计算给付额调整因子, 用调整因子去修正下一年度的给付额。

John Piggott 等人推导了在精算公平的原则下每年调整因子的计算方法, 最后得出如下形式的一般情形下的递推模型:

$${}^k_x B_{j,t} = {}^{k-1}_x B_{j,t-1} \cdot \text{DEA}_t \cdot \text{IEA}_t。$$

其中 ${}^k_x B_{j,t}$ 表示 x 岁开始参与互助养老年金计划、到第 t 年已经加入互助养老年金计划 k 年的第 j 个成员在第 t 年领取的养老金金额, DEA_t 和 IEA_t 分别表示从第 $t-1$ 年到第 t 年的死亡率调整因子和利率调整因子。但是在计算 \ddot{a}_x 的时候采用的始终是最初的死亡率假设, 这显然是不完美的。按照与 John Piggott 等人同样的方法并在计算 \ddot{a}_x 的时候考虑死亡率和利率的变动, 不难推导出更加合理的递推公式为:

$${}^k_x B_{j,t} = {}^{k-1}_x B_{j,t-1} \cdot p_{x+k-1,t-1} \cdot \frac{F_t}{\sum_{k \geq 1} \sum_x \sum_{A_t} {}^k_x F_{i,t}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t,t-1}}{\ddot{a}_{x+t,t}} \cdot \frac{1+R_{t-1}}{1+R}。$$

其中 F_t 为 t 时刻资金总额, $p_{x,t}$ 、 $\ddot{a}_{x,t}$ 和 R_t 分别为根据 t 时刻的信息确定下一年度的生存率、年金精算现值和利率, R 表示初始利率, A_t 表示 t 时刻生存的人数。按照与 John Piggott

一致的方式, 记 $\text{DEA}_t = p_{x+k-1,t-1} \cdot \frac{F_t}{\sum_{k \geq 1} \sum_x \sum_{A_t} {}^k_x F_{i,t}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t,t-1}}{\ddot{a}_{x+t,t}}$, 表示 t 时刻死亡率调整因子,

$\text{IEA}_t = \frac{1+R_{t-1}}{1+R}$ 表示 t 时刻的利率调整因子。

(二) 基于人口死亡率数据的互助养老年金给付额分布情况分析

在得到给付递推模型的基础上, 本部分选取真实的人口统计数据及合适的死亡率趋势外推模型来得到未来一段时间内的预期死亡率分布情况, 随后采用蒙特卡洛模拟, 基于上一部分内容中推导出的给付模型得到每年给付额的分布。

1. 死亡率预测模型

由于研究对象是系统性长寿风险, 所以选取的死亡率预测模型必须能反映死亡率的整体变化趋势。综合多种考虑, 在 M. Kenan Terzioğlu 和 Meral Sucu (2015) 提出的用于估计土耳其人口分布情况的 Compertz—Makeham 模型的基础上稍加改进提出随机动态 Compertz—Makeham 模型 (以下简称随机动态 CoMa 模型)。其形式如下:

$$\mu_{x,t} = y_{1t} + y_{2t}c^x, \quad dy_{1t} = a_1 dt + \sigma_1 dW_{1t}, \quad dy_{2t} = a_2 dt + \sigma_2 dW_{2t}, \quad dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt,$$

其中 $y_{1t} > 0$ 、 $y_{2t} > 0$, $c > 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 \leq \rho \leq 1$, W_{1t} 和 W_{2t} 为标准布朗运动。系统性长寿风险反映在该模型中即为 a_1 、 a_2 均为负数。

由布朗运动的特点可知，死亡率 $\mu_{x,t}$ 服从正态分布，其均值和方差分别为

$$E(\mu_{x,t}) = (a_1t + y_{01}) + (a_2t + y_{02})c^x$$

$$\text{Var}(\mu_{x,t}) = \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t + 2\rho\sigma_1\sigma_2 c^x t$$

在知道 x 岁的人在 t 时刻的死亡率分布为 $\mu_{x,t} = y_{11} + y_{12}c^x$ 的条件下，很容易得知 x 岁的人在 $t+s$ 时刻的死亡率的期望值、生存率和年金精算现值分别为：

$$E[\mu_{x,t+s} | \mu_{x,t}] = (y_{11} + a_1s) + (y_{12} + a_2s)c^x,$$

$${}_s p_{x,t} = \exp\left[-\int_x^{x+s} \mu_{z,t} dz\right] = \exp\left[-y_{11}s - \frac{y_{12}}{\ln c}(c^{x+s} - c^x)\right], \quad (1)$$

$$\ddot{a}_{x,t} = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\delta s} {}_s p_{x,t} = \sum_{s=0}^{\infty} \exp\left(-y_{11}s - \frac{y_{12}}{\ln c}(c^{x+s} - c^x) - \delta s\right). \quad (2)$$

由于互助养老年金基金的目标客户为退休人士或即将退休之人，因此选取 Human Mortality Database 中年龄段在 60-105 岁之间，统计年份为从 1970 年-2010 年的 1886 个中国

台湾地区人口的死亡率数据来拟合上述动态 CoMa 模型的参数。首先假设 $\hat{m}_{x,t} = \frac{\hat{D}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}}$ ，为 x

岁的人在第 t 年内死亡的概率，其中 $\hat{D}_{x,t}$ 表示台湾地区人口死亡率统计数据中 x 岁的人在第 t 年内的总死亡人数， $\hat{E}_{x,t}$ 表示 x 岁的人在 t 年时候的人口总数。

根据 M. Kenan Terziog lu1 和 MeralSucu (2015) 的假设：死亡率随机过程的均值和方差满足标准泊松过程，即 t 时刻 $E_{x,t}$ 个 x 岁的人的死亡率为 $\mu_{x,t} E_{x,t}$ ，那么显然此时条件分布

$$\frac{\hat{D}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} | \mu_{x,t} \text{ 的均值为 } \mu_{x,t}, \text{ 方差为 } \frac{\mu_{x,t}}{E_{x,t}}.$$

为将随机动态 CoMa 分布中的未知参数与 $\hat{m}_{x,t}$ 建立联系，这里采用条件均值和条件方差公式来推导：

$$E\left[\frac{\hat{D}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}}\right] = E\left[E\left[\frac{\hat{D}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} | \mu_{x,t}\right]\right] = E[\mu_{x,t}] = \mu_{x,t},$$

$$\text{Var}\left[\frac{\hat{D}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}}\right] = \text{Var}\left[E\left[\frac{\hat{D}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} | \mu_{x,t}\right]\right] + E\left[\text{Var}\left[\frac{\hat{D}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} | \mu_{x,t}\right]\right] = E\left[\frac{\mu_{x,t}}{E_{x,t}}\right] + \text{Var}[\mu_{x,t}]$$

$$\approx E \left[\frac{\hat{\mu}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} \right] + \text{Var} \left[\frac{\hat{\mu}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} \right] \approx \frac{\hat{m}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} + \text{Var} \left[\mu_{x,t} \right].$$

即 x 岁的人在第 t 年的死亡概率服从均值为 $\mu_{x,t} = (a_1t + y_{01}) + (a_2t + y_{02})c^x$, 方差为 $\frac{\hat{m}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} +$

$\text{Var} \left[\mu_{x,t} \right] = \frac{\hat{m}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t c^{2x} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 c^x t$ 的正态分布。根据台湾人口的死亡率数据, 不难得到

其对数似然函数为:

$$l(m_{x,t}) = - \sum_{x=60}^{105} \sum_{t=0}^{40} \ln \left(\sqrt{2\pi \left(\frac{\hat{m}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t c^{2x} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 c^x t \right)} \right) \\ - \frac{1}{2} \sum_{x=60}^{105} \sum_{t=0}^{40} \left[\frac{\left(\frac{\hat{m}_{x,t} - (a_1t + y_{01}) - (a_2t + y_{02})c^x}{\sqrt{\frac{\hat{m}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t c^{2x} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 c^x t}} \right)^2}{\left(\sqrt{\frac{\hat{m}_{x,t}}{\hat{E}_{x,t}} + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t c^{2x} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 c^x t} \right)^2} \right].$$

将 1886 个 $\hat{m}_{x,t}$ 和 $\hat{E}_{x,t}$ 带入, 利用 matlab 输入约束条件: $y_{01} > 0$ 、 $y_{02} > 0$ 、 $c > 1$ 、 $\sigma_1 > 0$ 、 $\sigma_2 > 0$ 可求得对数似然函数最大时的 8 个未知参数分别为:

$$\tilde{y}_{01} = 0.0003177277, \quad \tilde{y}_{02} = 0.0002133334, \quad \tilde{c} = 1.0810608025, \quad \tilde{a}_1 = -2.86299 \times 10^{-9},$$

$$\tilde{a}_2 = -2.66076 \times 10^{-6}, \quad \tilde{\sigma}_1 = 0.0001693316, \quad \tilde{\sigma}_2 = 0.0000058132, \quad \tilde{\rho} = 0.8786346573.$$

选择卡方参数 $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ 来检验得到的参数估计值是否可信。其中 O_i 表示观

测到的数据, E_i 表示根据估计的参数值计算得到的分布数据。根据前面估计的参数值计算

得到 $\chi^2 = \sum_{x=60}^{99} \sum_{t=0}^{80} \frac{(\hat{m}_{x,t} - \tilde{m}_{x,t})^2}{\tilde{m}_{x,t}} = 30.45961$, 而当置信度为 95% 时, $\chi_{k-1-q}^2 = 1978.9$, 很显然 χ^2

$< \chi_{k-1-q}^2$ 因此不拒绝原假设。

2. 随机模拟

首先提出如下假设: 假设 2015 年为初始时刻有一群年龄 65 岁的退休人员加入互助养老

金计划，初始资金均为 10000 元。利用 matlab 做死亡率服从动态 CoMa 模型，给付额服从推导得出的递推公式的蒙特卡洛模拟来观察不同情况下互助养老年金成员退休后的收入情况。选取每年领取的养老金金额的 95%分位数、中位数和 5%分位数来进行分析。

结果分析：

(1) 当互助养老年金封闭（即初始时刻之后不再加入新的成员加入），且预定利率和实际利率相同均为 5%（ $\delta=0.04879$ ）时，首先来观察成员数量 N 的影响。假设 N 分别为 1, 10, 1000 和 10000，得到每年的养老金领取额的 95%分位数、中位数和 5%分位数分布情况如下图所示：

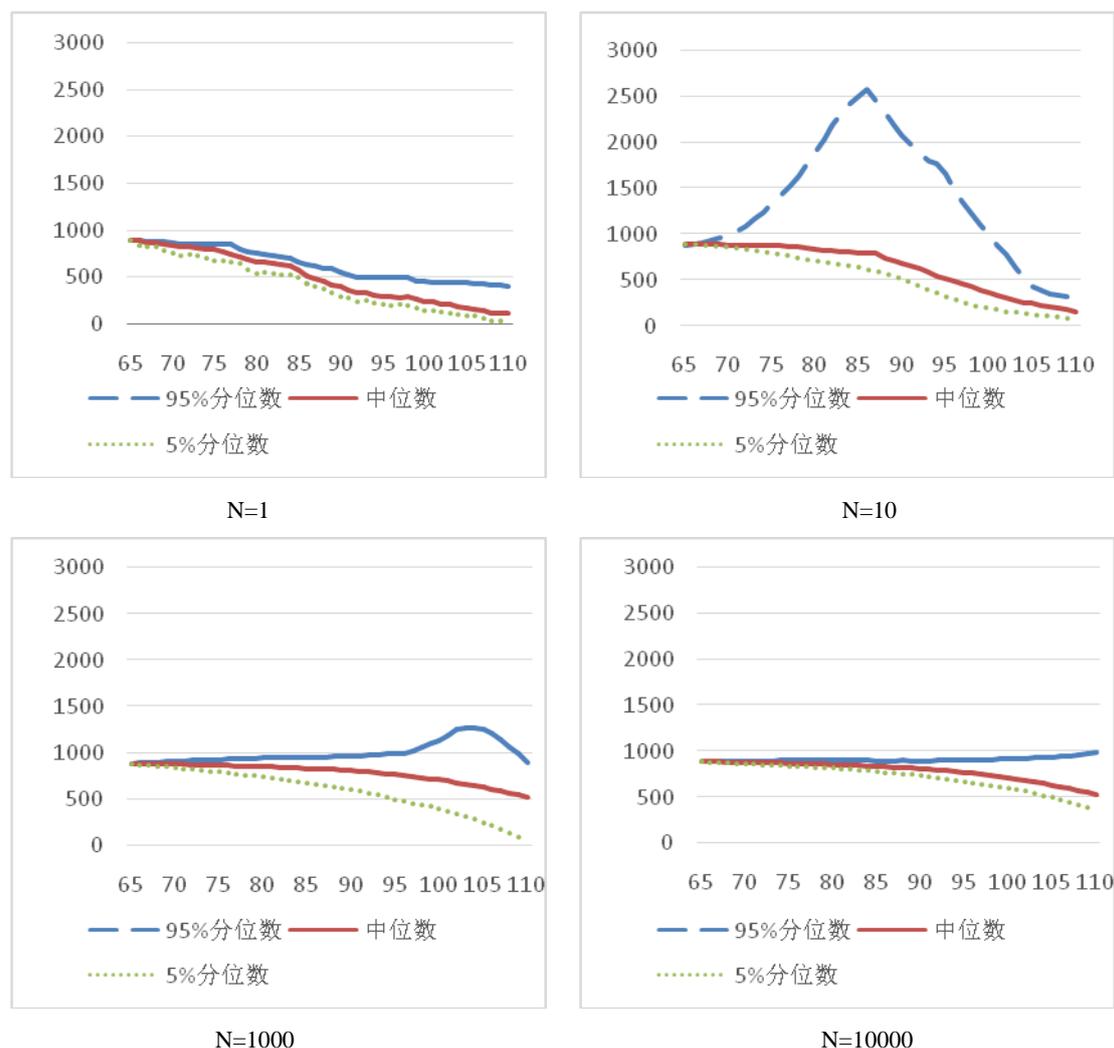


图 1：不同成员人数的养老金领取金额分布情况

当 $N=1$ 时，即个人自年金化，按照每年模拟得到的实际死亡率来调整退休后领取的金额，计算得到的结果显示每年的领取金额在逐年下降，即为长寿风险影响下的结果。当 $N=10$ 时，观察到领取金额 95%分位数在中间阶段出现了较大程度的上升，这是因为当成员人数比较少并且又有较多的人死亡的时候，存活的成员领取的养老金金额将会大幅度上升。但是当 N 继续变大到 1000 和 10000 的时候，可以观察到每年领取的养老金金额的分布情况明显变得较为平滑，且 N 越大，95%分位数、中位数和 5%分位线之间的差距就越小，这说明成

员人数越多，每年领取的养老金金额的分布也就越集中，方差也就越小。

(2) 现改变条件假设联合养老基金是开放式的，来观察每年有 1000 个新成员加入和每 5 年有 1000 个新成员加入两种不同的情况下养老金金额的变化情况：

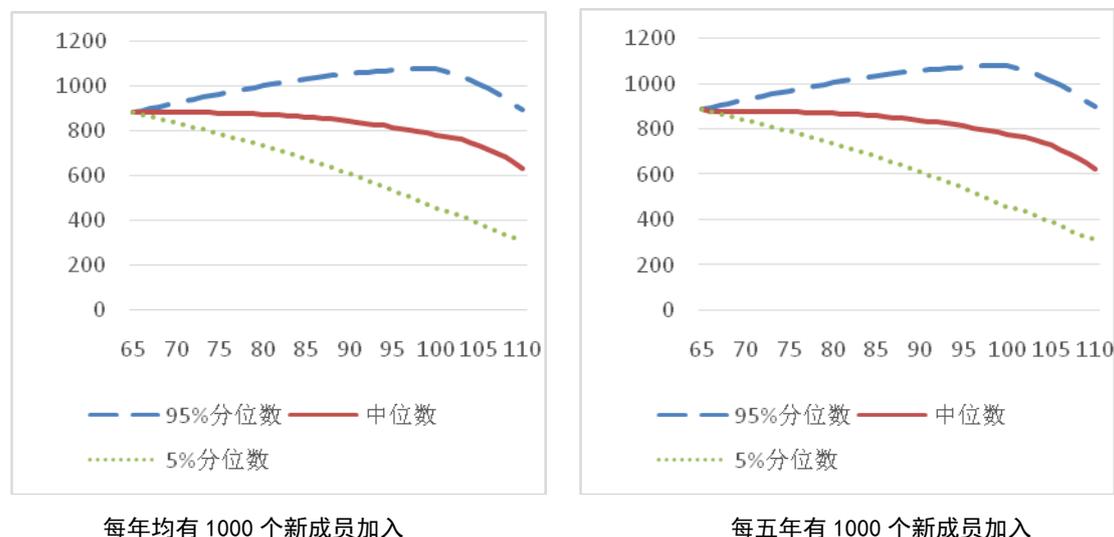


图 2：开放式互助养老年金每年领取的养老金金额的分布情况

很明显两种情况下的分布并无显著的差别，唯一的差别是每年均有 1000 名成员加入的情况下每年领取的养老金金额的波动稍小于每 5 年有 1000 名成员加入的情况。这是因为新加入的成员的基金并不会影响其他成员的领取金额，所以两种情况下养老金领取金额的分布情况大致相同，但是新成员加入的频率较快的情况下每年存活的成员人数的期望值就比较大，所以波动就会比较小。

(3) 现在考虑收益率的影响。之前都是假设收益率固定为常数 5%，现在假设 2015 年以后实际收益率服从 CIR 随机利率模型。不妨选取美联储 1994-2015 年的 113 次均值为 0.038274，标准差为 0.015807 的变动利率数据来观察分布的变化情况。分别观察收益率固定为 0.038274 不变和服从均值为 0.038274，标准差为 0.015807 的 CIR 随机利率模型、通过生成每年的利率随机数作为实际收益率，两种情况下每年领取的养老金金额的分布情况。假设养老金结构为每年有 1000 名 65 岁的新成员加入，在两种情况下每年领取金额分别如下图所示：

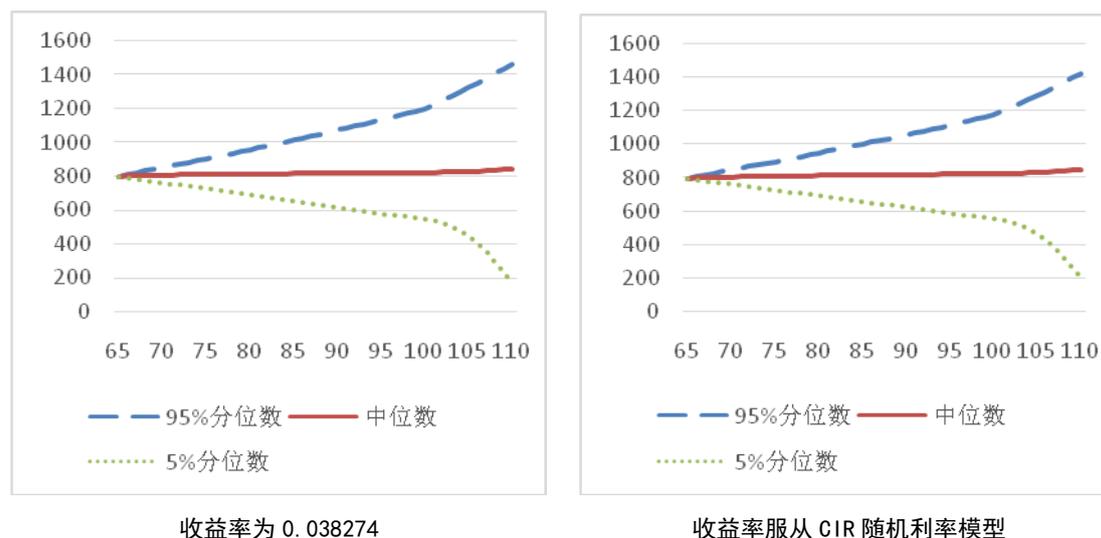


图 3：不同利率下每年领取的养老金金额的分布情况

很明显：当服从 CIR 随机利率模型时分布的波动稍大但是非常不明显，即收益率的变化对每年领取的养老金金额的影响是非常有限的，系统性长寿风险才是影响领取金额变化的主要因素。

三、互助养老年金的逆选择风险

逆选择表现在养老保险产品上，即为由于对自身健康状况、生活习惯等方面的了解程度较高，被保险人往往会做出对自己更有利的选择。本文通过普通商业养老年金和互助养老年金的逆选择风险的对比来探讨互助养老年金逆选择风险的大小。

假设普通商业养老年金和互助养老年金同时存在，投资者 Q 的初始资金总额为 A ，他投资在普通养老年金中的资金为 a ($a \geq 0$)，投资在互助养老年金中的资金为 g ($g \geq 0$)。将 Q 的人生阶段分为退休之前和退休之后两个过程。退休之前通过投资为退休之后的生活进行储备，此阶段财富总额记为 W_0 ；退休之后则开始领取养老金，此阶段的财富总额记为 W_1 。假设 R_a 为普通养老年金初始设定的投资回报率， R_g 为互助养老年金初始设定的投资回报率。假设 Q 关于财富的效用函数为 $u=u(x)$ ，购买养老年金的消费者均为风险厌恶型，因此对于 Q 的效用函数显然有 $u'(x) > 0$ 且 $u''(x) < 0$ 。那么对于 Q 来说，其效用函数可表示为：

$u=u(W_0) + vp u(W_1)$ ，其中 $W_0=A-a-g$ ， $W_1=R_a a + R_g g Y$ 。 v 表示折现因子， p 表示根据 Q 的主观意愿确定的生存概率。通过第二部分的研究发现：互助养老年金的每年都会有一个给付调整因子 $DEA_t \cdot IEA_t$ ，在这里为了方便表示简记为随机变量 Y 。

对 Q 的效用函数求期望 $E(u) = u(W_0) + vp E(u(W_1))$ 。假设 Q 为理性人，即他会选择使得自己的期望效用最大化的财富分配方式。因此对其期望效用求偏微分：

$$\frac{\partial E(u)}{\partial a} = -u'(W_0) + vp R_a E(u'(W_1))$$

$$\frac{\partial E(u)}{\partial g} = -u'(W_0) + vpR_g E(u'(W_1)Y)$$

期望效用最大化等同于： $\frac{\partial E(u)}{\partial a} = 0$ 且 $\frac{\partial E(u)}{\partial g} = 0$ ，因此可得：

$$u'(W_0) = vpR_a E(u'(W_1)) \quad (3)$$

$$u'(W_0) = vpR_g E(u'(W_1)Y) \quad (4)$$

两式相比得：

$$R_a E(u'(W_1)) = R_g E(u'(W_1)Y) \quad (5)$$

即当 a 和 g 同时满足公式 (3) 和 (4) 时 Q 的期望效用最大。

现在考虑逆选择风险，即基于投资者主观意愿的生存率对财富分配的影响，表现在此处

可以用 $\frac{\partial a}{\partial p}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial p}$ 表示：当 $\frac{\partial a}{\partial p}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial p}$ 大于 0 的时候即表示存在逆选择风险，且其值越大，

逆选择风险越大。

(3) 和 (4) 等式两边均对 p 求偏导可得：

$$\begin{aligned} & u''(W_0) \left(\frac{\partial W_0}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial W_0}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} \right) \\ & = vR_a E(u'(W_1)) + vpR_a E(u''(W_1) \left(\frac{\partial W_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial W_1}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} \right)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & u''(W_0) \left(\frac{\partial W_0}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial W_0}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} \right) \\ & = vR_g E(u'(W_1)Y) + vpR_g E(u''(W_1)Y \left(\frac{\partial W_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial W_1}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} \right)) \end{aligned} \quad (7)$$

两式相比且根据式 (5) 可化简得

$$R_a E(u''(W_1) \left(\frac{\partial W_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial W_1}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} \right)) = R_g E(u''(W_1)Y \left(\frac{\partial W_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial W_1}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} \right)) \quad (8)$$

已知 $\frac{\partial W_1}{\partial a} = R_a$ ， $\frac{\partial W_1}{\partial g} = R_g Y$ ，带入整理得：

$$\frac{\partial a}{\partial p} = -$$

$$\frac{v^2 p R_a E(u'(W_1)) \times R_g E(u'(W_1)Y(R_g Y - R_a))}{vp \left(u'(W_0) E(u'(W_1)(R_a - R_g Y)^2) + vp R_a^2 R_g^2 \left(E(u'(W_1)) E(u'(W_1)Y^2) - (E(u'(W_1)Y))^2 \right) \right)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = - \frac{v^2 p R_a E(u'(W_1)) \times R_a E(u'(W_1)(R_a - R_g Y))}{vp(u'(W_0) E(u'(W_1)(R_a - R_g Y)^2) + vp R_a^2 R_g^2 (E(u'(W_1)) E(u'(W_1) Y^2) - (E(u'(W_1) Y))^2))}$$

假设 $\frac{\partial g}{\partial p} \neq 0$, 那么有:

$$\frac{\partial a / \partial p}{\partial g / \partial p} = \frac{R_g^2 E(u'(W_1) Y^2) - R_a R_g E(u'(W_1) Y)}{R_a^2 E(u'(W_1)) - R_a R_g E(u'(W_1) Y)} \quad (9)$$

注意到 $\frac{\partial a}{\partial p}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial p}$ 的分母均为:

$$vp(u'(W_0) E(u'(W_1)(R_a - R_g Y)^2) + vp R_a^2 R_g^2 (E(u'(W_1)) E(u'(W_1) Y^2) - (E(u'(W_1) Y))^2))$$

$$= |H|, \text{ 其中 } H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E(u)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 E(u)}{\partial a \partial g} \\ \frac{\partial^2 E(u)}{\partial a \partial g} & \frac{\partial^2 E(u)}{\partial g^2} \end{pmatrix} \text{ 表示期望效用对 } a \text{ 和 } g \text{ 的二阶偏导数的黑塞矩阵。}$$

$$\text{记 } -v^2 p R_a E(u'(W_1)) = W, \quad R_g E(u'(W_1) Y (R_g Y - R_a)) = A,$$

$$R_a E(u'(W_1)(R_a - R_g Y)) = B, \text{ 那么此时 } \frac{\partial a}{\partial p} \text{ 和 } \frac{\partial g}{\partial p} \text{ 可以表示成: } \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{W \times A}{|H|},$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{W \times B}{|H|}.$$

在 Q 作出投资决策的时候, 本部分以确定等值法为基本原则: 即包含不同风险类型或不同风险水平的现金流的效用相等, 表现在此处即为 $u(R_a) = E(u(R_g Y))$ 。根据风险厌恶型消费者效用函数的凹凸性可知: $u(R_a) = E(u(R_g Y)) < u(E(R_g Y))$, 又由效用函数的递增性可知: $R_a < R_g Y$ 。

在此条件下, 提出两个假设并予以证明——

假设一: 对 $\forall a \geq 0, g \geq 0$, 均有 $\frac{\partial(a+g)}{\partial p} > 0$, 即无论如何选择养老年金和互助养老年

金的组合, 均存在逆选择风险。

$$\text{证明: } \frac{\partial(a+g)}{\partial p} = \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{W \times (A+B)}{|H|}$$

首先很显然 $W = -v^2 p R_a E(u'(W_1)) < 0$,

其次, $A+B=R_g E(u'(W_1) Y(R_g Y - R_a)) + R_a E(u'(W_1)(R_a - R_g Y)) = E(u''(W_1)(R_a + (R_g Y))^2) < 0$,

最后, 根据黑塞矩阵副半正定的性质可知: $|H| > 0$,

所以综上所述可知 $\frac{\partial(a+g)}{\partial p} = \frac{W \times (A+B)}{|H|} > 0$ 恒成立, 逆选择问题始终存在。

在假设一成立的基础上, 提出假设二: 假设 $E(u''(W_1) Y^2) \leq E(u''(W_1))(EY)^2$ 成立并且 $\frac{\partial g}{\partial p} > 0$, 那么此时 $\frac{\partial a}{\partial p} > \frac{\partial g}{\partial p}$ 必然成立, 即互助养老年金逆选择风险小于普通商业养老年金。

证明: 要想证明 $\frac{\partial a}{\partial p} > \frac{\partial g}{\partial p}$ 成立且已知 $\frac{\partial a}{\partial p}$ 、 $\frac{\partial g}{\partial p}$ 均大于 0, 此时只需要证明 $\frac{\partial a/\partial p}{\partial g/\partial p} > 1$ 即可。根据 (9), 即证

$$\frac{\partial a/\partial p}{\partial g/\partial p} = \frac{R_g E(u'(W_1) Y(R_g Y - R_a))}{R_a E(u'(W_1)(R_a - R_g Y))} > 1。$$

$$\text{根据假设, } \frac{R_g^2 E(u'(W_1) Y^2)}{R_a^2 E(u'(W_1))} = \frac{R_g^2}{R_a^2} \cdot \frac{E(u'(W_1) Y^2)}{E(u'(W_1))} \geq \left(\frac{R_g}{R_a} E(Y)\right)^2 > 1$$

$$\text{上式等价于 } R_g E(u'(W_1) Y^2) < R_a E(u'(W_1))$$

两边同时减去 $R_a R_g E(u'(W_1) Y)$ 得到:

$$R_g E(u'(W_1) Y(R_g Y - R_a)) < R_a E(u'(W_1)(R_a - R_g Y))$$

因为 $\frac{\partial g}{\partial p} > 0$ 所以上述不等式右边 < 0 , 将上述不等式变换形式即得:

$$\frac{R_g E(u'(W_1) Y(R_g Y - R_a))}{R_a E(u'(W_1)(R_a - R_g Y))} > 1, \text{ 假设成立。}$$

之所以假设 $E(u''(W_1) Y^2) \leq E(u''(W_1))(EY)^2$, 是因为长寿风险对死亡率的影响是一个较为缓慢而且渐变的过程, 即 $E(Y)$ 接近 1 但是小于 1, 因此不妨通过 $E(u''(W_1) Y^2) \leq E(u''(W_1))(EY)^2$ 给 $E(Y)$ 设定一个上限。不难证明如果投资者的效用函数是 CRRA 效用函数或是指数效用函数, $E(u''(W_1) Y^2) \leq E(u''(W_1))(EY)^2$ 均成立。

由此可以总结出互助养老年金相对于普通养老年金而言其优势和劣势:

互助养老年金的优势有: 1. 相比于普通养老年金而言拥有较高的给付额, 原因有两点: 首先由于互助养老年金是由参与者承担系统性长寿风险和投资风险因而消费者不需要支付

将这部分风险转移给保险公司而产生的风险保费,因而所有的投资收益均在参与者中间进行分配;其次,通过给付递推模型的推导过程可以看出:互助养老年金的死亡率精算假设是基于平均余命,小于普通养老年金所基于的生命表中的极限年龄。2.互助养老年金本质上属于是群体自年金化的一类,因此参与者可以根据自身喜好更加灵活的选择年金基金结构和投资方式。结构方面,可以选择单一群体或多样化群体、封闭式或开放式的互助养老年金;投资方式方面可以选择较为保守但是收益较低的投资方式,也可以选择风险较大但是收益较高的投资方式。3.透明度较高。互助养老年金和共同基金较为相似,但不同之处在于互助养老年金是基于实时的死亡率信息和利率信息来调整给付额,计算方式也较为简单,参与者们可以随时知道互助养老年金的收益情况和调整方式。4.逆选择风险较低,通过本部分的证明可知,当存在信息不对称时,互助养老年金关于信息不对称程度的敏感性要小于普通养老年金。

互助养老年金的劣势有:1.由于每年都要计算给付调整因子,所以需要死亡率对死亡率和利率的未来趋势有较好的判断,否则会严重影响未来领取金额分布的平稳程度。2.通过观察成员人数 N 对于给付额分布的影响可知:当成员人数较少 ($N=10$) 时,给付额分布波动较大,此时可能会诱发成员的道德风险,但是当成员人数上升到一定程度时,给付额分布的波动就变得极小,就不会诱发道德风险。因此互助养老年金要求成员达到一定的数量才可保证正常运行。相信随着人口统计技术的不断提升和我国相互保险业的逐步发展,这两个缺点的影响会变得越来越小。

参考文献

- [1] Moshe A. , Milevsky Thomas S, Salisbury. Optimal retirement income tontines [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015, 64: 91-105.
- [2] Moshe A. Fee Structure and Surrender Incentives in Variable Annuities [J]. Actuarial Science, 2015.
- [3] M. Kenan Terzioglu, Meral Sucu. Gompertz - Makeham parameter estimations and valuation approaches: Turkish life insurance sector [J]. Eur. Actuar, 2015, 5: 447-468.
- [4] Ralph Goldsticker. A Mutual Fund to Yield Annuity-Like Benefits [J]. Financial Analysts Journal, 2007, 63: 63-67.
- [5] Catherine Donnelly, Montserrat Guillén, Jens Perch Nielsen. Exchanging uncertain mortality for a cost [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 52: 65-76.
- [6] Michael J. Sabin. Fair Tontine Annuity [EB/OL]. <http://ssrn.com/abstract=1579932>, 2010: 1-67.
- [7] John Piggott, Emiliano A. Valdez, Bettina Detzel. The Simple Analytics of A Pooled Annuity Fund [J]. The Journal of Risk and Insurance, 2005, 72: 497-520.
- [8] Jonathan Barry Forman. Tontine Pensions: A Solution to the State and Local Pension Underfunding Crisis [J]. University of Oklahoma College of Law, February 2014.
- [9] Michael Z. Stamos. Optimal consumption and portfolio choice for pooled annuity funds [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43: 56 - 68.

The Study of The Payment Recursive Model and Adverse Selection Risk of Pooled Annuity Fund

Linda Zhang, Yang Qijun

(Financial and statistical academy of Hunan university, Changsha China, 410000)

Abstract: The pooled annuity fund can provide the participants with cash flow for pension reserve which is similar to ordinary pension annuity, but the originator should not face for systemic longevity risk. This article measures the value of pooled annuity fund from this two angles: the first one is on the basis of predecessors' research results and the "rule of actuarial fair", we deduce the payment recursive model, and then select stochastic dynamic Compertz - Makeham mortality trend extrapolation model and parts of population data of China to measure the distribution of the amount of the pension of pooled annuity fund each year; Then, contrast the difference between ordinary pensions and pooled annuity fund by the size of the adverse selection risk.

Keywords: Pooled Annuity Fund; Longevity Risk; Stochastic Dynamical Compertz-Makeham Model; Monte Carlo Simulation; Certainty Equivalent Method

作者简介 (可选): 1. 张琳, 女, 1963 年 3 月出生, 博士, 湖南大学金融与统计学院教授, 研究方向为保险精算, 联系电话: 18684716118, 邮箱: lindazhang0203@hnu.edu.cn。2. 杨起军, 男, 1990 年 10 月出生, 在读硕士, 湖南大学金融与统计学院研究生, 研究方向为保险精算, 联系电话: 15200858954, 邮箱: 15200858954@163.com。