数量经济研究 The Journal of Quantitative Economics
第3卷 第1辑 VoL. 3. No.1
2012年3月 March 2012

债券违约风险下的投资组合选择*

吕进瑞 肖义龙 陈开平
（国立东华大学，金融系）

摘要：本文主要讨论了高风险债券的违约风险如何改变投资者的资产分配。投资者的资产组合包括无风险债券，股票和可违约零息债券。当面临高风险债券的违约风险时,投资者通过随机动态规划方法解决了其投资组合的最优决策问题。结果说明随着违约风险增加投资者增持了股票而减持了可违约债券。投资者会将一个对冲需求给高风险股票，以此来对冲高风险债券的违约风险。具体来说，当违约概率增加时个人倾向于用股票而不是现金来满足避险要求。

关键词：投资组合选择，可违约债券，违约风险

JEL 分类：G11，G32

Portfolio Choices under Bond Default Risks

Abstract: This investigation discusses how risky bonds' default risk change investors' asset allocations. Investors' portfolios include risk-free bonds, stocks, and defaultable zero-coupon bonds. We solve the optimal decision-making problem of investors' portfolio selections when investors are exposed to the default risk associated with risky bonds through a stochastic dynamic programming approach. Our results indicate that investors increase their stock holdings and decrease their defaultable bond holdings as the default risk increases. For hedging against the default risk associated with risky bonds, the investors will form a hedging demand for risky stock. Specifically, when the default probability increases, individuals tend to use stock rather than cash to meet a hedging demand.

Keywords: Portfolio Selection, Defaultable Bond, Befault Risk

*作者联系方式：吕进瑞，助理教授，e-mail: jinray@mail.ndhu.edu.tw，地址：1, Section 2, University Rd. Shou-Feng, 花莲 974, Taiwan, R.O.C. 电话: +886-3-8633140, 传真: +886-3-8633130[1].

引言

最近，许多源于高风险债券的违约风险所造成的金融危机已经对金融市场造成了巨大影响。高风险债券的违约事件已经逐步影响了全球的金融市场和国际经济。例如，2007 年财政紧缩时期美国投资银行发行的许多债券都违约了。因此，许多国家陷入困境直至现在。而且，违约事件经常导致市场投资者得不到自己全部的本金和利息。因此，市场投资者了解如何控制和对冲违约风险对于他们的资产分配决策相当重要。

资产分配对于投资者寻求一生财富效用最大化至关重要。关于投资组合选择的传统文献中，在一个连续时间随机模型中讨论的投资组合一般仅包括一只高风险股票和一只无风险债券。确切来说，默顿（1971, 1973）分析了两个资产的投资组合选择——高风险股票和无违约债券。一般来说，许多以前的研究集中于股票资产和无风险债券的配置，忽略了债券违约的可能性。在现实世界的金融实践中，除了高风险的股票和无风险债券外，高风险债券经常作为投资工具。虽然高风险债券可能违约，但是能带来一个投资组合的多元化利益，体现投资选择。最近，由于许多高风险债券引发违约事件的影响，投资者开始认真检查他们投资组合里高风险债券所扮演的角色。

和本文相关的一些研究探讨了极端事件如何影响投资组合选择（见 Liu, Longstaff 和 Pan, 2003; Wu, 2003） Liu, Longstaff,和 Pan (2003) 提出极端事件能改变股价和收益波动；因此，极端事件能进一步影响个人最优资产配置。他们的发现说明：面临事件风险的投资者在投资组合选择中不愿持有杠杆或者淡仓。具体的说，价格和波动的跳跃对投资组合选择有明显的影响。Wu (2003) 分析了金融资产的价格跳跃风险如何改变动态资产分配。Wu (2003) 发现如果个人拥有更多的高风险资产的话，那么跳跃风险对于资产分配的影响会变大。这两个研究发现极端事件会导致投资者选择低持有股票。然而，这两个研究讨论的资产配置是仅基于两种资产——股票和无风险债券的。

本次探讨试图使用随机动态规划方法分析个人资产组合的资产分配问题，个人资产组包括无风险债券，可违约债券，股票。本文的讨论回答了以下问题。第一，随着违约风险出现个人如何控制他们拥有的资产。具体的说，如果高风险债券违约的可能性出现，那么我们来看一个问题，那就是投资者是否转向增持股票或者无风险债券，因为理性投资者会将他们的财富转移到股票或者无风险债券上，而不是将其放在可违约债券上。具体来说，股票和无风险债券的对冲效应是不同的。第二，也考虑了债券违约的相关回收率和股票收益率的随机波动性如何改变资产配置，因为回收率能影响投资者持续持有可违约债券的意愿，随机波动率能改变投资者的资产风险。这些问题在以前的研究中并没有仔细研究过，因为这些研究的投资组合只包括不含相关违约风险的两种资产。

本文包括五节。下节回顾了可违约债券和资产配置的相关文献。第三节，给出了分析最优投资选择的连续时间模型。该模型能对抗违约风险，解决这些资产的投机和对冲需求问题。第四节给出了许多数值例子分析持有权重的敏感性。第五节是我们的研究。

1　文献综述

本节回顾了资产配置，可违约债券以及投资组合选择的违约风险影响的相关文献。

1.1 资产配置

Merton (1969, 1971, 1973, 1990) 的许多研究发展了对于常数绝对风险厌恶（CARA）效用函数的代表性个人的连续时间决定模型，该模型包括消费角色和资产配置。风险资产的最优持有比可以通过随机最优控制技术得到，从中个人在高风险股票和无风险债券之间分配自己的财富来追求一生的效用。现在基本上总是在连续时间模型中讨论资产配置，许多研究已经将投资组合选择问题扩大到财务分析等领域，包括资产定价，保险需求，养老基金和其他。具体来说，许多研究采用了 Merton 的分析框架来深入讨论投资组合选择问题（如 Boyle 和 Yang, 1997; Liu, Longstaff 和 Pan, 2003; Wu, 2003）。

在复杂的动态环境中，许多投资者不能简单的选择仅包括无风险债券和股票的投资组合。这样，因为在现在金融危机频发的经济环境中债券可能违约，许多基于 Merton 基本模型的研究开始考虑高风险债券在投资组合选择中的角色。一般的，除了股本证券，许多研究把可违约债券放到个人的投资组合中。可违约债券包括企业债券(如 Walder, 2001; Wise 和 Bhansali, 2002; Kraft 和 Steffensen, 2005; Lakner 和 Liang, 2008),零息债券(Hou, 2003; Korn, 2007; Liu, 2007),主权债券(Zagst, Kehrbaum 和 Schmid, 2002)，永久可违约债券(Bo, Wang 和 Yang, 2010). Bielecki 和 Jang (2006) 分析了包括信用风险资产，无风险债券和股票的组合优化问题。他们发现如果违约风险被定价了，那么个人将在可违约资产上有更多的投资。对于每个加入的高风险资产，个人的资产分配变得更复杂。扩展这些先前的研究，我们的研究讨论无风险债券，股票和可违约零息债券的持有需求。

1.2 债券违约对投资组合选择的影响

如果投资者的投资组合中包括高风险债券，那么债券违约对投资者资产配置有巨大影响。许多文章研究了违约风险对投资组合选择的影响(如 Lyandres, 2010; Hou, 2003;等)。Lyandres (2010)从降低投资价值的违约事件上检查了高风险债务对公司投资决策的违约影响。Hou (2003)证明了通过投资信贷市场可以得到财富资本。然而，Dunbar (2009)证明了厌恶风险的个人由于对冲违约风险会将高风险资产转为低风险级别的资产。这样，违约风险降低了个人投资组合的期望收益。除了个人投资组合的违约事件的影响，违约事件同样影响企业价值。Wise 和 Bhansali (2002) 发现企业债券间的相关违约可能改变投资组合的分配。一些其他的文章也讨论了违约风险和投资组合选择间的相关性。例如，Lekkos (2007)和 Chiang 和 Tsai (2010)从简化模型得到了可违约债券的估值。Onorato 和 Altman (2005)分析了已经考虑信贷风险的可违约债券的定价模型。Carr (2005)通过 Black-Scholes 经济的动态投资组合复制策略得到了信用违约掉期价值。

违约事件造成了金融市场的价格跳跃，增加了金融资产的波动风险。因为债券价格的跳跃，Lakner 和 Liang (2008)假设企业资产价值具有离散的信息流，讨论了可违约债券的最优投资。结果说明企业资产分配对于信息的发布改变很小，但金融市场的投资组合选择对于债券违约来说有很大的改变。Nunno 和 Sursen (2010) 证明了违约损失取决于个人投资组合中可违约资产的头寸。虽然违约事件对于高风险资产的持有有不利影响，但是投资组合选择的改变与违约事件相联系的跳跃次数相关。

和我们的研究相关的 Liu, Longstaf，Pan (2003) 和 Wu (2003) 发现极值事件影响资产价

格，进一步改变个人对于高风险资产的持有。不管极值事件是来源好消息还是坏消息，他们发现资产价格的跳跃会降低个人高风险资产的持有。 Korn (2007)回顾了最近一些包括期权和可违约资产的最优投资组合选择的研究。Korn(2007)的研究说明如果持有更多高风险资产那么个人财富将增加；但是当股市崩盘的时候损失也将更大。Nippani 和 Smith (2010)证明了由于当前的金融危机长期美国国债可能将拖欠。那么，在金融危机时期其他较低评级债券的违约风险可能增加。因为这些债券可能会违约，这些国债和其他可违约债券就影响了个人投资组合收益。

在本文中，试图解决当面对可违约债券的违约风险时，个人在高风险股票，无风险债券，可违约债券之间的投资组合选择的相关决策。主要问题集中在讨论高风险资产的投机需求和对冲需求上。而且，回答了可违约债券的风险特点如何改变投资组合选择的问题，也回答了因为面对违约风险个人是否增持还是减持股票或者无风险资产的权重的问题。

2　债券违约和投资组合选择

本文运用随机动态规划方法分析了个人投资组合选择对于债券违约如何反应。本文假设金融市场是完美的，有一个持有三种代表型资产的代表性投资者。具体来说，对于简单分析和没有一般性损失来说，我们的分析模型有如下假设：金融市场是完美的，无摩擦，没有交易成本或者税收。所有资产都是无限可分的，允许短期交易，市场是透明和有效的。投资者在连续时间框架下通过动态选择资产分配来追求一生效用。

第一个资产是无风险债券，其动态价格$(M(t))$是由下面定义的：

$$dM(t) = rM(t)dt, \quad M(0) \equiv 1 \tag{1}$$

其中，$r \geq 0$表示瞬间无风险利率。代表性金融市场包括两种代表性高风险资产：股票和可违约零息债券。第二个资产由可违约零息债券代表，其动态价格$(P(t))$如下定义：

$$dP = \left(r + \lambda\mu_P(1-\pi)\right)Pdt - P_{(t-1)}(1-\pi)dQ \tag{2}$$

μ_P表示违约事件的违约风险溢价。$\pi \in (0,1)$表示回收率，$\pi = 0$表示债券持有人尚未赔偿债券违约。另外，若$\pi = 1$则债券持有人得到全部赔偿。Q是强度为λ的泊松点过程。债券价格显示了随着时间推移瞬时任意跳跃的随机特点，就是在这之中，违约事件冲击影响债券价格。泊松随机变量在$(t,\ t+h)$间发生的概率为：

Prob[在$(t,\ t+h)$时间段里意外事件不发生]

$= 1 - \lambda h + O(h)$

Prob[在 $(t,\ t+h)$时间段里意外事件发生一次]

$= \lambda h + O(h)$

Prob[在$(t,\ t+h)$时间段里意外事件发生不止一次]

$= O(h)$

其中$O(h)$表示渐近阶，定义如下：

如果 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\vartheta(h)\big/\vartheta\right) = 0$，那么$\vartheta(h) = O(h)$，

泊松参数λ定义为违约事件发生时每单位时间的期望值。意外事件会引起债券价格的百分比损失。

第三个资产由非股息股票代表。股票价格(S)遵循广义的混合几何布朗运动和泊松过程，如下定义：

$$dS = (r + \alpha_S + \lambda\mu_S)Sdt + S\sqrt{V}dZ_S - S_{(t-1)}kdQ \tag{3}$$

α_S 为瞬时超额期望收益率。μ_S 为违约事件违约风险溢价。 dZ_S 为维纳过程，k 为违约事件对股票价格的影响度。V 为股票收益率的随机方差，其动态过程如下：

$$dV = (\alpha_V + \lambda\mu_V)Vdt + \varepsilon\sqrt{V}dZ_V + XV_{(t-)}dQ \tag{4}$$

α_V 为随机方差的瞬时期望收益率，μ_V 为债券违约引起的随机方差的违约风险溢价。ε 为随机方差的瞬时波动率，dZ_V 遵循维纳过程。X 为违约事件对随机波动的影响度。假设随着跳跃次数改变，跳跃量 X 和 k 独立，并且和随机变量 Z_V，Z_S，Q 独立。

投资者的财富资本 (W) 包括股票，无风险债券，高风险可违约债券。这样，财富的资本动态过程为：

$$\begin{aligned} dW &= [rW + mW(\alpha_S + \lambda\mu_S) + nW(\lambda\mu_P)(1-\pi)]dt + mW\sqrt{V}dZ_S \\ &- mW_{(t-1)}kdQ - nW_{(t-1)}(1-\pi)dQ, \quad W(0) \equiv W_0 \in (0,\infty) \end{aligned} \tag{5}$$

其中，m 和 n 分别为股票和违约债券的财富资本分数。方程(5)中个人收入来自股票，违约债券，无风险债券的投资收入。否则，投资组合的风险部分来自于两个高风险资产。

代表性投资者的目标是最大化最终财富的期望贴现效用。

$$\underset{\{m_t,n_t\}}{Max}\, E_0[U(W_T)]$$

给定投资期限 $0 \le t \le T$，个人以初始财富 W_0 开始分配其财富资本。本文中的投资决策包括无风险资产持有率 $(1-m-n)$，股票持有率 (m)，可违约债券的持有率 (n)。在随机动态规划框架下，控制变量包括这些资产的持有权重，状态方程为个人的财富过程和随机方差过程。个人间接效用 $J(W,V,t)$ 为最大化个人一生直接效用的期望，如下：

$$J(W,V,t) = \underset{\{m_t,n_t\}}{Max}\, E_0[U(W_T)] \tag{6}$$

也就是说，个人满意度由财富资本和股票收益的随机方差决定。假设上面的间接效用函数为二阶差分，严格递增，W, V, 和时间 t 是凹的。应用 Bellman 的最优目标函数原则可以得到如下 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程.[2]

$$\begin{aligned} &Max_{\{m,n\}}\{J_W(W,t)(rW + mW(\alpha_S + \lambda\mu_S) + nW(\lambda\mu_P)(1-\pi)) \\ &+ \frac{1}{2}J_{WW}(m^2W^2V) + J_V(\alpha_V + \lambda\mu_V)V + \frac{1}{2}J_{VV}(\varepsilon^2V) + J_t(W,V,t) \\ &+ \lambda E\{J[(W - mWk - nW(1-\pi), V + VX, t) - J(W,V,t)]\} + J_{WV}(\varepsilon mWV\rho_{VS})\} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $J_W \equiv \partial J/\partial W$，$J_{WW} \equiv \partial^2 J/\partial W^2$ 分别为财富的第一和第二阶偏导数。唯一的存在内部最大的充分条件为 $J_{WW} < 0$，$J_{VV} < 0$。ρ_{VS} 为股票价格和随机方差的相关系数。

为了得到解析解，采用 Liu, Longstaff 和 Pan (2003)的定义，研究中定义间接效用函数为常数相关风险厌恶（CRRA）函数为：

$$J(W,V,t) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right] \tag{8}$$

其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 为随时间改变的风险参数。

我们的问题在于找到投资者投资组合中各种资产的最优权重。对股票权重(m)和可违约债券权重(n),求一阶偏导得到如下推论。

[2] 更多细节查询 Malliaris 和 Brock (1982), Merton (1971, 1990), Kamien 和 Schwartz (1991) 。

推论：

给定拥有ＣＲＲＡ效用函数的代表性个人和三个资产的投资组合，代表性个人将有如下最优决策，由效用函数期望(8)，动态财富(5)，随机方差(4)决定。

股票持有率（m^*):

$$m^* = \frac{(\alpha_S + \lambda\mu_S)}{\gamma V} - \frac{\lambda k \mu_P}{\gamma V} + \frac{(\varepsilon W \rho_{VS}) g(t)}{\gamma} \tag{9}$$

可违约债券持有率（n^*):

$$n^* = \frac{1}{(1-\pi)\left(e^{g(t)(VX)}\right)}\left\{1 - \left[\frac{k(\alpha_S + \lambda\mu_S)}{\gamma V}\right] + \left[\frac{\lambda k^2 \mu_P}{\gamma V}\right] - \left[\frac{k(\varepsilon W \rho_{VS}) g(t)}{\gamma} + \mu_P^{\frac{1}{-\gamma}}\right]\right\} \tag{10}$$

风险参数 $g(t)$:

$$-\frac{1}{2}\gamma m^2 + \frac{1}{1-\gamma} g(t)(\alpha_V + \lambda\mu_V) + \frac{1}{2(1-\gamma)} g(t)^2(\varepsilon^2) + \left(\frac{1}{1-\gamma}\right) g(t)' + g(t)(\varepsilon m \rho_{VS}) = 0 \tag{11}$$

证明：附录中包括股票，违约债券以及风险参数的最优持有权重的详细推导。

上面的推论说明高风险资产，违约风险，随机波动都影响方程(9)中股票的最优持有。最优持有率的第一项是对股票的投机需求，即：

$$\frac{(\alpha_S + \lambda\mu_S)}{\gamma V},$$

第二次项为规避违约风险的对冲需求，即：

$$-\frac{\lambda k \mu_P}{\gamma V},$$

第三项为规避随机波动风险的对冲需求，即：

$$\frac{(\varepsilon W \rho_{VS}) g}{\gamma},$$

从股票的投机需求方面来说，股票持有和股票的投资表现正相关，和风险厌恶态度负相关。有趣的是，对于股票(μ_S)来说随着债券违约的违约风险溢价增加，个人也增加股票的持有。也就是说，债券违约事件造成的缴付保费越多，股票持有率越高，在这种情况下可违约债券的违约事件引起投资者将持有高风险债券转移为持有高风险股票。

对于对冲需求，股票对债券违约的对冲需求与违约概率，违约事件对股票价格的影响度，债券的违约风险溢价负相关，因为这些因素是股票持有需求的不利影响。而且，如果他们对随机波动风险不利，那么投资者将持有股票，像方程(9)中所示一样。但是，持股率和一些随机波动风险因素之间的关系取决于相关系数 ρ_{SV} 。

违约债券的最优权重，即方程(10)，包括三个需求：违约债券的投机需求，规避违约风险的对冲需求，规避随机波动风险的对冲需求。由于问题的难度，违约债券的最优持有率和一些关键因素之间的关系将通过下节的一个数值的例子进一步讨论。具体来说，个人的高风险债券的持有和回收率正相关。这说明如果债券为投资者提供更多的保护，那么即使债券可能违约，个人也将愿意持有更多的高风险债券。

3　数值分析

本文对于一些复杂因素究竟是如何影响投资者最优投资组合的，使用了许多数值例子。

一些被讨论的因素包括瞬时收益的期望，波动率，个人的风险厌恶，违约概率及其他。

首先检查了违约风险溢价如何改变资产配置。图 1 显示了违约风险溢价是如何改变股票和高风险债券的最优权重的。基于图 1，最佳持股量和由于债券违约事件引起的股票违约风险溢价正相关。另外，高风险债券的最佳持有量和高风险债券的违约风险溢价正相关。这个结果说明个人倾向于持有能提供更多违约风险溢价的资产。具体来说，持股量对可违约债券的违约风险溢价不敏感；另外，可违约债券的持有量不容易受股票违约风险溢价的影响。

下面，本文分析了违约事件的影响。表 1 列出了最优投资组合选择与违约概率(λ)以及违约事件对股价的影响度(k)之间的关系。在面板 A 中，违约债券的违约概率(λ)的增加引起了个人持股量的增加。也就是说如果违约概率增加，那么个人选择分配给股票更多的财富，而不是可违约债券。另外，如果违约事件对股价的影响度增加，那么个人将减少持股量来对冲违约风险。在面板 B 中，虽然债券持有量的敏感度更低了，但违约概率和影响度都改变了可违约债券的持有率。一般来说，如果违约概率和影响度都降低的话，个人将持有更多的可违约债券。谈到现在的现金账户持有率，我们发现如果违约概率降低，影响度增加，那么控股比率将增加，但变化率都很小。因此，如果高风险债券的违约事件发生，个人将调整持股量而不是现金的持有量。也就是，当违约概率增加，个人将高风险债券转移为持股而不是持有现金。一个特殊的原因为什么个人持有高风险股票而不是现金作为对冲违约债券的违约风险的工具就是股价和高风险债券价格相关，而现金和高风险债券价格独立。这样，个人持有各种策略的股票来抵消来自高风险债券的违约风险； 不过，持有现金仅因为其是一个简单的减轻违约风险的持有方式。因此，回答了股票还是现金是高风险债券的违约风险对冲工具这个问题。

进一步，在图2中观察个人风险厌恶态度(γ)和回收率(π)的影响。给定可违约债券的回收率，如果个人倾向于规避风险，那么个人将减少持股量而增加债券持有量。此外，回收率敏感度和风险厌恶系数的敏感度相比来说低，其中资产配置很大程度上受对风险态度而不是资产特点的影响。

下面，讨论股票超额收益率期望，股价与影响投资组合选择的随机波动之间的关系，如图3所示。收益期望似乎对改变资产配置并不敏感，但是两者的相关性与资产配置有关。至于股价和随机波动间的负相关性，个人将降低持股量，增加可违约债券的持有量，尤其是当负相关性很强的时候。

本文进一步分析了随机波动率因素如何改变投资组合选择的，如图 4 所示。我们发现随机方差的波动率(ε)有显著影响，但违约事件对随机方差的影响度(X)影响很小。通过这个数值例子，如果随机方差的波动率增加，那么个人将降低持股量来避免不稳定的随机方差。上面的讨论都是在五年的投资期限中进行的。

下面，进一步探讨了随着时间流逝个人如何调整他的投资选择，如图 5。先观察了各种风险厌恶态度的个人最优策略。本文设定的图 5 中的投资期限是从 1 年到 10 年改变。我们发现个人风险厌恶态度越低，持股越多；但是，随着时间变化控股率迅速降低。尽管有更高风险厌恶态度的个人持股更少，控股率的变化却是稳定的。这个结果说明有更低风险厌恶态度的个人和有更高风险厌恶态度的个人相比，随着时间改变会迅速调整其投资选择。此外，有更低风险厌恶系数的个人持有更少的可违约债券，随着时间变化高风险债券的持有变化率

并不明显。

谈到违约概率的影响，我们发现如果可违约债券的违约概率增加，那么个人将投资更多的股票。特别的，不管违约概率如何，随着时间改变他的持股量会降低。也就是说，随着时间改变个人倾向于保守。另外，如果违约概率更高的话可违约债券持有量将更低。而且，可违约债券的持有率随着时间推移会增加，因为随着时间改变违约风险会逐渐降低。总之，个人倾向于长期持有可违约债券。

4 结论

现在，金融危机频发，世界范围内引起债券违约。本文提供了在可违约债券有违约风险存在的情况下对投资组合选择的最优决策分析，对持有股票，无风险债券，可违约债券的投资者的资产分配提出建议。在这种随机环境下使用了股票收益的随机波动模型。因此，我们为面对债券违约风险和随机波动风险的个人提供了一个封闭形式的解来解决最优投资组合选择问题。

主要结论如下。持股量与违约概率，风险厌恶态度正相关，与股价，随机波动风险，回收率三者之间的相关性负相关。第二，不管风险厌恶态度或者违约概率如何，虽然个人将选择持有更多的股票，随着时间推移其持股量也会降低。第三，考虑高风险债券的违约风险，个人将把更多的财富分配给股票而不是可违约债券的。也就是说，个人用对股票的对冲需求来保护可违约债券的违约风险。最后，当违约风险增加时，个人将使用股票而不是现金来满足对冲需求。

参考文献

Bielecki,Tomasz R, nwon Jang.2006.Portfolio optimization with a defaultable security. Asia-Pacific Financial Markets 13: 113–127.

Bo Lijun, WangYongjin ,Xuewei Yang.2010.An optimal portfolio problem in a defaultable market. Advances in Applied Probability, 42(3): 689-705.

Boyle, Phelim E,Hailiang Yang.1997.Asset allocation with time variation in expected returns. Mathematics and Economics 21：201-218.

Carr, Peter.2005.Replicating Defaultable Bonds in Black Scholes with Jump to Default. Working Paper.

Chiang Shu-Ling, Ming-Shann Tsai.2010. Pricing a defaultable bond with a stochastic recovery rate. Quantitative Finance, 10(1):49–58.

Dunbar, Kwamie. 2009. The effects of credit risk on dynamic portfolio management: a new computational approach. Department of Economics, University of Connecticut, Working Paper .

Hou, Yuanfeng. 2003. Integrating market risk and credit risk: A dynamic asset allocation perspective. Economics Department, Yale University, Working Paper.

Hou Yuanfeng, Xiangrong Jin. 2003. Optimal investment with default risk. Financial Valuation and Risk Management, Working Paper 109.

Kamien M. I,N. L. Schwartz. 1991. Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.New York: Elsevier Science Publishing.

Korn, Ralf. 2007. Optimal portfolios: new variations of an old theme. Computational Management Science l5(4): 289-304.

Kraft　Holger , Mogens Steffensen. 2008. How to invest optimally in corporate bonds: a reduced-form approach. Journal of Economic Dynamics and Control, 32(2): 348-385.

Lakner, Peter ,Weijian Liang. 2008. Optimal investment in a defaultable bond. Mathematic Financial Economics 1: 283–310.

Lekkos, Ilias. 2007. Modeling multiple term structures of defaultable bonds with common and idiosyncratic state variables. Journal of Empirical Finance, 14: 783–817.

Liu Jun, Longstaff, Francis A, Jun Pan. 2003. Dynamic asset allocation with event risk. The Journal of Finance 58: 231-259.

Liu Jun.2007. Portfolio selection in stochastic environments.The Review of Financial Studies 20(1): 1-39.

Lyandres, Evgeny. 2010. Accelerated investment effect of risky debt. Journal of Banking & Finance 34:2587–2599.

Malliaris, A. G. ,W. A. Brock.1982.Stochastic Methods in Economics and Finance. Amsterdam: North-Holland Publishing.

Merton,Robert C.. 1971. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. Journal of Economic Theory, 3: 373-413.

Merton, Robert C. 1969. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous case. Review of Economics and Statistics 51: 247–257.

Merton, Robert C.. 1973. An intertemporal capital asset pricing model. Econometrica 41:1429–1445.

Merton, R. C..1990. Continuous Time Finance. Oxford: Blackwell Press.

Nippani, Srinivas. 2010. The increasing default risk of US treasury securities due to the financial crisis. Journal of Banking & Finance 34: 2472–2480.

Nunno, Giulia Di ,Steffen Sursen. 2010. Information and optimal investment in defaultable assets. Working Paper.

Onorato, Mario ,Edward I. Altman. 2005. An integrated pricing model for defaultable loans and bonds. European Journal of Operational Research ,163: 65–82.

Walder, Roger. 2001. Dynamic allocation of treasury and corporate bonds portfolio. FAME Research Paper, Working Paper No. 64.

Wise, Mark B., Vineer Bhansali. 2002. Portfolio allocation to corporate bonds with correlated defaults. Working Paper No. 68：23-65.

Wu, Liuren. 2003. Jumps and dynamic asset allocation. Review of Quantitative Finance and Accounting, 20:207-243.

Zagst, R., Kehrbaum J. ,B. Schmid. 2002. Portfolio optimization under credit risk, Algo Research Quarterly 5:1:23-41.

Zariphopoulou, Thaleia. 2009. Optimal asset allocation in a stochastic factor model - an overview and open problems. Working Paper.

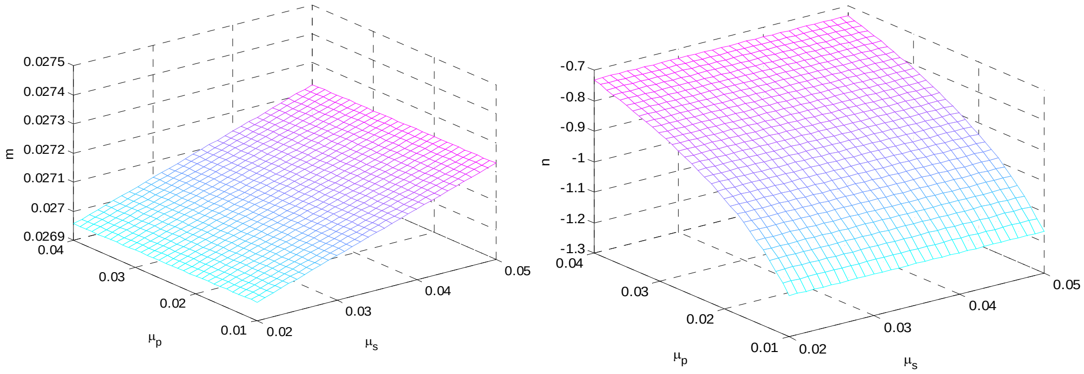

图 1. 股票的违约风险溢价影响和高风险资产分配中的违约债券

这个图显示了违约风险溢价如何影响高风险资产的持有权重。参数设置如下: $\mu_S \in [0.02, 0.05]$, $\mu_P \in [0.01, 0.04]$, $\gamma = 7$, $\pi = 0.2$, $\alpha_S = 0.03$, $\lambda = 0.01$, $k = 0.02$, $V = 0.16$, $\rho_{VS} =$ -0.2, $t = 5$, ε =0.08, X= 0.03.

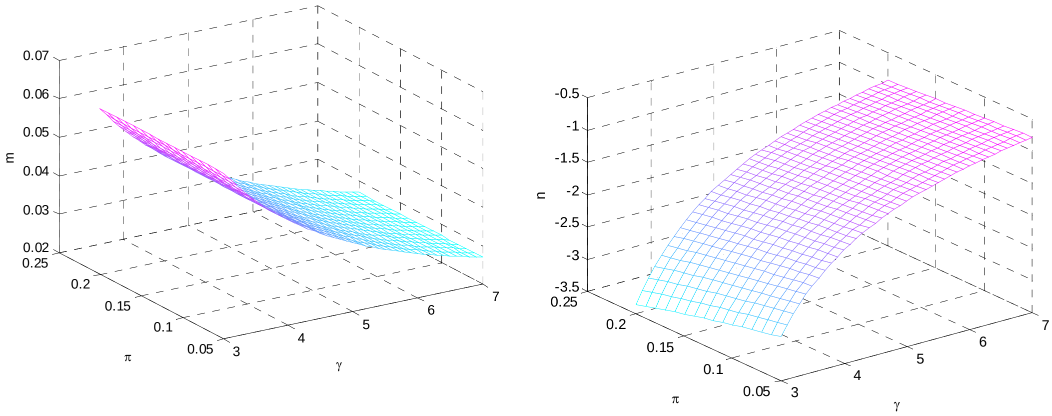

图 2. 回收率和高风险资产配置的风险厌恶系数的影响

这个图显示了回收率和风险厌恶系数如何影响高风险资产的持有权重，参数设置如下：$\gamma \in [3, 7]$, $\pi \in [0.05, 0.2]$, $\alpha_S = 0.03$, $\lambda = 0.01$, k= 0.02, $V = 0.16$, ρ_{VS} = -0.2, $t = 5$, ε =0.08, X= 0.03, $\mu_S = 0.03$, $\mu_P = 0.02$.

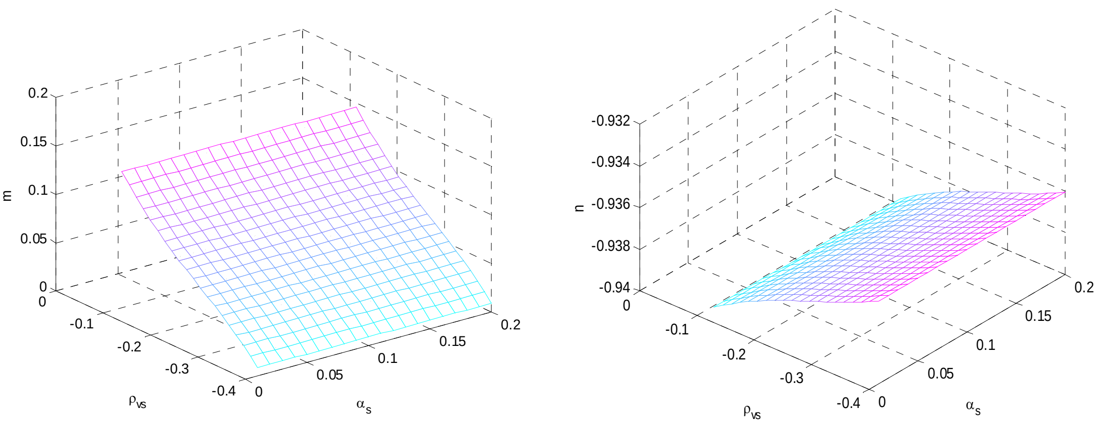

图 3. 超额收益率期望，股票风险与随机波动风险之间的相关性，对高风险资产分配的影响

这个图显示了超额收益率期望，股票风险与随机波动风险对高风险资产分配之间的相关性如何影响高风险资产持有权证的。参数设置如下：$\alpha_S \in [0.01, 0.2]$, $\rho_{VS} \in [-0.04, -0.1]$，$\gamma = 7$, $\pi = 0.2$, $\lambda = 0.01$, $k = 0.02$, $V = 0.16$, $t = 5$, $\varepsilon = 0.08$, $X = 0.03$, $\mu_S = 0.03$, $\mu_P = 0.02$.

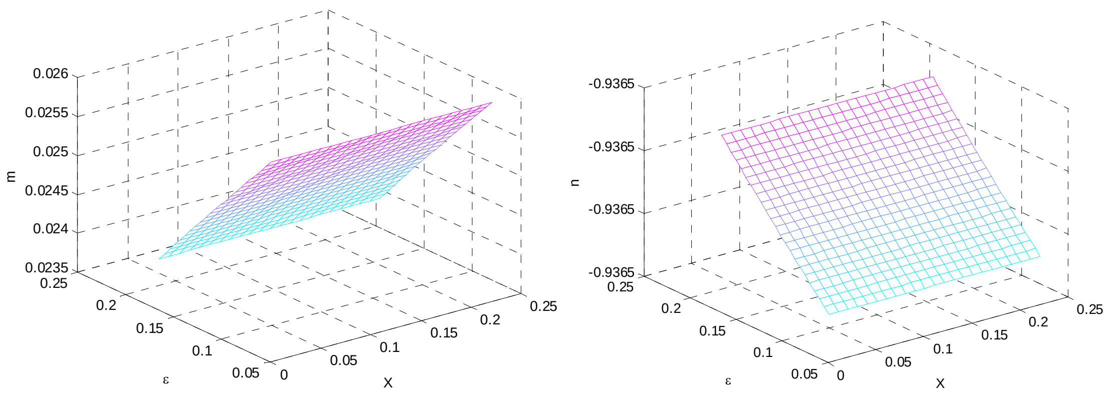

图 4. 最优投资组合选择，违约事件对随机波动方差的影响度，随机方差的波动

这个图显示了违约事件对随机方差的影响度，随机方差的波动对高风险资产的持有权重的影响。参数设置如下：$X \in [0.03, 0.25]$, $\varepsilon \in [0.08, 0.2]$, $\gamma = 7$，$\pi = 0.2$, $\alpha_S = 0.03$, $\lambda = 0.01$, $\mu_S = 0.03$, $k = 0.02$, $\mu_P = 0.02$, $V = 0.16$, $\rho_{VS} = -0.2$, $t = 5$.

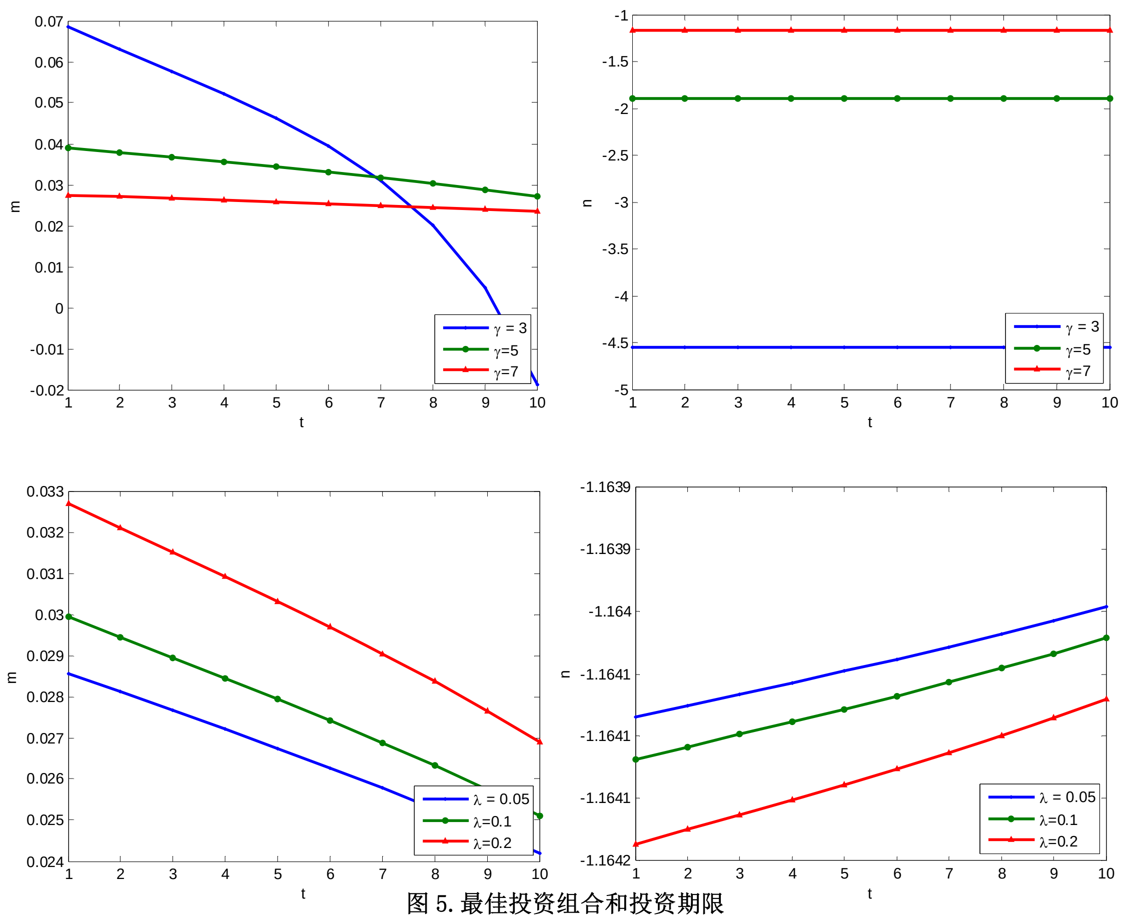

图 5. 最佳投资组合和投资期限

该图描绘了由个人风险偏好态度和风险债券的违约概率决定的最佳投资组合选择与投资时间两者之间的关系。参数设置如下：α_S =0.03, ρ_{VS} = -0.2, π = 0.2, λ = 0.01, μ_S =0.03, k = 0.02, μ_P = 0.02, V = 0.16, X =0.03, ε = 0.08, π = 0.2.

表 1. 最佳投资组合选择，违约概率，违约事件对股价的影响度之间的关系

Panel A: m		k				
	λ	0.01	0.06	0.11	0.16	0.21	0.26
	0.005	0.0257	0.0257	0.0257	0.0257	0.0256	0.0256
	0.055	0.0269	0.0268	0.0268	0.0267	0.0267	0.0266
	0.105	0.0281	0.0280	0.0279	0.0278	0.0277	0.0276
	0.155	0.0293	0.0291	0.0290	0.0289	0.0288	0.0286
	0.205	0.0304	0.0303	0.0301	0.0299	0.0298	0.0296
	0.255	0.0316	0.0314	0.0312	0.0310	0.0308	0.0306
Panel B: n							
	0.005	-0.9362	-0.9378	-0.9394	-0.9410	-0.9426	-0.9442
	0.055	-0.9362	-0.9379	-0.9395	-0.9412	-0.9429	-0.9445
	0.105	-0.9362	-0.9380	-0.9397	-0.9414	-0.9431	-0.9448
	0.155	-0.9362	-0.9380	-0.9498	-0.9416	-0.9434	-0.9452
	0.205	-0.9362	-0.9381	-0.9400	-0.9418	-0.9437	-0.9455
	0.255	-0.9363	-0.9382	-0.9401	-0.9421	-0.9439	-0.9458
Panel C: 1-m-n							
	0.005	1.9105	1.9121	1.9137	1.9153	1.9170	1.9186
	0.055	1.9093	1.9111	1.9127	1.9145	1.9162	1.9179
	0.105	1.9081	1.9100	1.9118	1.9136	1.9154	1.9172
	0.155	1.9069	1.9089	1.9208	1.9127	1.9146	1.9166
	0.205	1.9058	1.9078	1.9099	1.9119	1.9139	1.9159
	0.255	1.9047	1.9068	1.9089	1.9111	1.9131	1.9152

这个表列出了违约事件对股价的影响与资产持有率的违约概率。参数设置如下：γ = 7, π = 0.2, α_S = 0.03, V = 0.16, ρ_{VS} = -0.2, t = 5, ε =0.08, X= 0.03, μ_S = 0.03, μ_P = 0.02.

附录

附录提供了投资组合里股票和高风险债券的最优持有权重的证明。

为了得到最优解，首先对 HJB 方程关于持股量求导，得到如下结果：

$$\begin{aligned} &J_W W(\alpha_S+\lambda\mu_S)+J_{WW}mW^2V-\lambda Wk\left[J_W\left(W-mWk-nW(1-\pi),V+VX,t\right)\right] \\ &+J_{WV}\varepsilon WV\rho_{VS}=0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

求解上面的方程，得到如下方程：

$$m^{*}=-\frac{J_W\left(\alpha_S+\lambda\mu_S\right)}{J_{WW}\left(WV\right)}+\frac{\lambda k\left[J_W\left(W-mWk-nW\left(1-\pi\right),V+VX,t\right)\right]}{J_{WW}\left(WV\right)}-\frac{J_{WV}\left(\varepsilon WV\rho_{VS}\right)}{J_{WW}\left(WV\right)}\quad(B.2)$$

对 HJB 函数关于违约债券持有量求导，得到如下结果：

$$J_W W\left(\lambda\mu_P\right)\left(1-\pi\right)-\lambda W\left(1-\pi\right)\left[J_W\left(W-mWk-nW\left(1-\pi\right),V+VX,t\right)\right]=0\qquad(B.3)$$

于是，进一步重新写(B.3)如下：

$$J_W\mu_P=J_W\left(W-m^{*}Wk-n^{*}W\left(1-\pi\right),V+VX,t\right)\qquad(B.4)$$

用明确的间接效用函数(8)，关于财富资本和随机方差对间接效用求导，得到如下一阶和二阶偏导：

$$J_W=W^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\qquad(B.5)$$

$$J_{WW}=-\gamma W^{-\gamma-1}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\qquad(B.6)$$

$$J_t=\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\left[f(t)'+g(t)'V\right]\qquad(B.7)$$

$$J_V=\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}g(t)\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\qquad(B.8)$$

$$J_{VV}=\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}g(t)^2\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\qquad(B.9)$$

$$J_{WV}=W^{-\gamma}g(t)\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\qquad(B.10)$$

因此，Arrow-Pratt 相对风险厌恶系数的逆运算如下：

$$-\frac{J_W}{J_{WW}W}=\frac{W^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]}{\gamma W^{-\gamma-1}W\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]}=\frac{1}{\gamma}\qquad(B.11)$$

$$-\frac{J_{WV}}{J_{WW}W}=\frac{W^{-\gamma}g\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]}{\gamma W^{-\gamma-1}W\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]}=\frac{g}{\gamma}\qquad(B.12)$$

上面的结果代入方程(B.2) 和 (B.4),得到如下：

$$\begin{aligned}m^{*}&=-\frac{J_W\left(\alpha_S+\lambda\mu_S\right)}{J_{WW}\left(WV\right)}+\frac{\lambda k\left[J_W\left(W-mWk-nW\left(1-\pi\right),V+VX,t\right)\right]}{J_{WW}\left(WV\right)}-\frac{J_{WV}\left(\varepsilon WV\rho_{VS}\right)}{J_{WW}\left(WV\right)}\\&=\frac{\left(\alpha_S+\lambda\mu_S\right)}{\gamma V}-\frac{\lambda k\left[W-mWk-nW\left(1-\pi\right)\right]^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)(V+VX)}\right]}{\gamma W^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]V}+\frac{\left(\varepsilon WV\rho_{VS}\right)g}{V\gamma}\\&=\frac{\left(\alpha_S+\lambda\mu_S\right)}{\gamma V}-\frac{\lambda kW^{-\gamma}\left[1-mk-n\left(1-\pi\right)\right]^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)(V+VX)}\right]}{\gamma W^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]V}+\frac{\left(\varepsilon WV\rho_{VS}\right)g}{V\gamma}\\&=\frac{\left(\alpha_S+\lambda\mu_S\right)}{\gamma V}-\frac{\lambda k\left[1-mk-n\left(1-\pi\right)\right]^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)(VX)}\right]}{\gamma W^{\gamma-1}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]V}+\frac{\left(\varepsilon W\rho_{VS}\right)g}{\gamma}\end{aligned}\qquad(B.13)$$

和

$$\begin{aligned}J_W\mu_P&=W^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\mu_P=J_W\left[W-mWk-nW\left(1-\pi\right),V+VX,t\right]\\&=\left[W-mWk-nW\left(1-\pi\right)\right]^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)(V+VX)}\right]\\&=W^{-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\left[1-mk-n\left(1-\pi\right)\right]^{-\gamma}\left[e^{g(t)(VX)}\right]\end{aligned}\qquad(B.14)$$

方程进一步写成：

$$\mu_P=\left[1-m^{*}k-n^{*}\left(1-\pi\right)\right]^{-\gamma}\left[e^{g(t)(VX)}\right]\qquad(B.15)$$

将方程(B.15)代入(B.13)中，得到方程(9)。

$$m^* = \frac{(\alpha_S + \lambda\mu_S)}{\gamma V} - \frac{\lambda k \mu_P}{\gamma V} + \frac{(\varepsilon W \rho_{VS})g}{\gamma} \tag{9}$$

重写方程(B.15)如下：

$$n^* = \frac{1}{(1-\pi)\left[e^{g(t)(VX)}\right]}\left(1 - m^* k - \mu_P{}^{-\frac{1}{\gamma}}\right) \tag{B.16}$$

将最优持股量(9)代入方程(B.16),得到如下： n^*

$$= \frac{1}{(1-\pi)\left[e^{g(t)(VX)}\right]}\left\{1 - \left[\frac{(\alpha_S + \lambda\mu_S)}{\gamma V} - \frac{\lambda k \mu_P}{\gamma V} + \frac{(\varepsilon W \rho_{VS})g}{\gamma}\right]k - \mu_P{}^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} \tag{B.17}$$

然后得到违约债券的最优持有率：

$$n^* = \frac{1}{(1-\pi)\left(e^{g(t)(VX)}\right)}\left\{1 - \left[\frac{k(\alpha_S + \lambda\mu_S)}{\gamma V}\right] + \left[\frac{\lambda k^2 \mu_P}{\gamma V}\right] - \left[\frac{k(\varepsilon W \rho_{VS})g}{\gamma} + \mu_P{}^{-\frac{1}{\gamma}}\right]\right\} \tag{10}$$

方程(9), (10) 和 (B.5)-(B.10)能代入 HJB 方程，之后得到如下方程：

$$\begin{aligned}
&W^{-\gamma} e^{f(t)+g(t)V}\left[rW + mW(\alpha_S + \lambda\mu_S) + nW(\lambda\mu_P)(1-\pi)\right] \\
&-\frac{1}{2}\gamma W^{-\gamma-1}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right](m^2 W^2 V) + \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} g(t)\left[e^{f(t)+g(t)V}\right](\alpha_V + \lambda\mu_V)V \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) g(t)^2\left[e^{f(t)+g(t)V}\right](\varepsilon^2 V) + \left(\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\left[f(t)' + g(t)'V\right] \\
&+\lambda E\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[W - mWk - nW(1-\pi)\right]^{1-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\left[e^{f(t)+g(t)VX}\right] - \left(\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)\left[e^{f(t)+g(t)V}\right]\right\} \\
&+W^{-\gamma} g(t)\left[e^{f(t)+g(t)V}\right](\varepsilon m W V \rho_{VS}) = 0
\end{aligned} \tag{B.18}$$

这个方程进一步重写为：

$$\begin{aligned}
&r + m(\alpha_S + \lambda\mu_S) + n(\lambda\mu_P)(1-\pi) - \frac{1}{2}\gamma(m^2 V) \\
&+\frac{1}{1-\gamma} g(t)(\alpha_V + \lambda\mu_V)V + \frac{1}{2(1-\gamma)} g(t)^2(\varepsilon^2 V) + \left(\frac{1}{1-\gamma}\right)\left[f(t)' + g(t)'V\right] \\
&+\lambda E\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[1 - mk - n(1-\pi)\right]^{1-\gamma}\left[e^{f(t)+g(t)VX}\right] - 1\right\} + g(t)(\varepsilon m V \rho_{VS}) = 0
\end{aligned} \tag{B.19}$$

将违约风险溢价(B.15) 代入 (B.19)，得到如下：

$$\begin{aligned}
&r + m(\alpha_S + \lambda\mu_S) + n(\lambda\mu_P)(1-\pi) - \frac{1}{2}\gamma(m^2 V) + \frac{1}{1-\gamma} g(t)(\alpha_V + \lambda\mu_V)V \\
&+\frac{1}{2(1-\gamma)} g(t)^2(\varepsilon^2 V) + \left(\frac{1}{1-\gamma}\right)\left[f(t)' + g(t)'V\right] + \lambda E\left[\frac{1}{1-\gamma}(\mu_P - 1)\right] + g(t)(\varepsilon m V \rho_{VS}) = 0
\end{aligned} \tag{B.20}$$

将随机方差系数(V)设为 0，得到方程(11):

$$-\frac{1}{2}\gamma \mathrm{m}^2 + \frac{1}{1-\gamma} g(t)(\alpha_V + \lambda\mu_V) + \frac{1}{2(1-\gamma)} g(t)^2(\varepsilon^2) + \left(\frac{1}{1-\gamma}\right) g(t)' + g(t)(\varepsilon m \rho_{VS}) = 0 \tag{11}$$

将方程(B.20) 中的常数项设为 0，得到如下：

$$r + m(\alpha_S + \lambda\mu_S) + n(\lambda\mu_P)(1-\pi) + \left(\frac{1}{1-\gamma}\right) f(t)' + \lambda E\left[\frac{1}{1-\gamma}(\mu_P - 1)\right] = 0 \tag{B.21}$$