

金融市场间的极端风险度量： 应用极值理论和 Copula 函数度量组合投资风险

胡铮洋 陈守东

吉林大学数量经济研究中心 吉林大学商学院

摘要：本文应用 Copula 函数和极值理论来度量不同市场间在极端情形下的相依性风险，应用 VaR (Value at Risk) 和一致性风险度量指标 ES (Expected Shortfall) 作为风险度量手段。在实证中用 Copula 函数来替代传统多元序列间的正态分布的假设，使得在进行组合投资时进行多元极值建模成为可能，且更加灵活。实证采用上证综指和香港恒生指数来进行组合投资建模，度量组合投资的极端风险，通过给出不同权重下投资组合的风险情形，为投资者提供了合理设定投资权重规避风险作出有效参考。

关键词：Copula 函数; 极值理论, 多元极值分布; GPD 分布; VaR; ES。

引言

在现代金融市场投资时，人们处于一种自相矛盾的境地：一方面，投资者都理想化的期望存在一个零风险乌托邦似的市场，通过投资获取超额收益；另一方面，市场中过度的投机和频繁的交易导致了各种风险的增多，给市场带来更多的意外冲击和不确定性。

通常情形下，投资者在多种股票间建立组合投资来规避风险获取收益，以接近人们自相矛盾的理想。对于风险控制的要求通常是先于获取收益的，是第一重要的。金融市场的极端事件虽然少见，但却十分重要。金融市场的极端情形发生的时候，经常会给在不同市场间的建立组合投资的投资者造成巨大损失。因此，如何有效度量极端情形下不同市场间的风险一直是投资者和学者们关注的问题。在度量不同市场间的极端风险时，人们常常要应用到极值理论和多维分布的相依性方法。过去对于多元金融时间序列建模时，我们只能依靠传统的多元正态分布假设和线性相关系数假设下进行，近年来通过实证研究发现这种假设的缺陷已经越来越明显 (Embrechts, 2001)。例如正态性分布常常把金融序列的尾部假设的过薄，而在实际的金融数据中，金融序列常常呈现出厚尾的特征。多元分布的情形下，每个金融序列的边缘分布常常是非正态的，那么线性相关系数就不在适合作为相依性的度量指标，同样边缘分布的选择也是一项比较复杂和颇具争议的问题。

本文中应用极值理论的广义帕累托分布 (GPD) 直接对金融序列的尾部进行建模，这跳过对于金融序列整体分布确定的研究，使实证的结果更加接近真实的情形。实际研究中需要恰当的多元分布函数将不同的边缘分布连接在一起，以往人们用到的多元函数只有多元正态和多元 T 分布等少数几种椭圆氏分布对于其各自边缘分布的过于严格要求达到了近乎到苛刻的程度，Nelsen(1999), Joe(1997)提出的 Copula 方法可以说是研究多元分布的一个具有历史意义的变革，Copula 方法放弃了对于边缘分布的严格限制，可以灵活的将各种分布联合成统一的多元分布。由于 Copula 函数可以将各种边缘结合成多元分布情形，这在多元建模时边缘分布的选择更加灵活，它同时作为一种度量不同序列间相依性方法的工具，不再受线性相关性假设的约束，具有单调不变性。将 Copula 函数同极值理论相结合，度量不同市场间的极端情形成为可能。Copula 函数应用到金融领域的研究是近几年刚刚开始，Embrechts (1999) 最早

将 Copula 函数应用于金融领域研究; Patton(2002)通过一二阶矩方法建立了一个条件 Copula 函数, 并将其应用于 VaR 的度量。Chen 和 Fan(2006)应用 Copula 方法建立了一个基于马尔科夫 GARCH 的半参模型; Hu(2006)运用混合 Copula 函数建立组合投资, 并且应用分块检验来检验模型效果。国内领域近年来对于 Copula 函数的研究也很活跃, 张尧庭(2002)最早在过金融领域提出 Copula 函数; 陈守东(2006)应用 Copula 方法进行模拟, 基于国内股票指数建立投资组合度量风险。

在建模过程中, 由于金融序列常常不满足正态椭圆分布假设, VaR 已经不再是一个一致性风险度量指标, 即其不满足次可加性条件, 达不到组合投资分散降低风险的目的, 本文中我们用 ES 代替 VaR 作为风险度量指标, ES 作为一种一致性风险度量指标 (Anzter 1997), 不仅满足次可加性风险分散假设, 而且相对于 VaR 只能告诉人们风险不超过一定数值的概率是多少, ES 可以具体的告诉投资者的不仅仅是一个概率, 而是告诉了投资者在风险情形真的发生时, 风险的大小会是多少, 使得风险度量更具有实际的应用意义。

本文的结构安排: 文章第一步给出极值分理论的广义帕累托分布(GPD)和 Peak Over Threshold(POT)模型; 文章的第二部分给出 Copula 函数的基本定义和本文中要用到的两种 Copula 函数: 经验 Copula 函数和 gumbel Copula 函数; 第三部分介绍 VaR 和 ES 等相关风险度量指标的定义和特点; 第四部分为应用 Copula 函数的极值理论的风险度量实证部分, 通过将上海和香港股市的尾部分布用 Copula 函数相连接, 给出在两个市场对两个指数进行组合投资的极端情形下的风险度量值; 文章的第五部分为本文的结论部分。

1 极值分布理论

此部分只给出本文将要用到的关于极值理论的几个相关性模型, 关于极值理论的介绍和相关定义不作赘述, 如读着感兴趣, 极值理论的详细内容可参考 Embrechts, Kl Uppelberg, and Mikosch (1991)。

1.1 Fisher-Tippet 定理:

一系列独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$ 和其极大值分 M_n , 如果存在常数 $a_n > 0, b_n \in R$ 和某个非退化分布 H 满足

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} H \quad (1)$$

则称 H 为一个极大值分布函数, 简称极值分布。 H 为下面分布情形中的一种:

$$\begin{aligned} \text{Frechet} \quad \Phi_a(x) &= \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \exp(-x^{-a}) & , x > 0 \end{cases} \quad a > 0 \\ \text{Weibull} \quad \Psi_a(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^a) & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \quad a > 0 \\ \text{Gumbel} \quad \Lambda(x) &= \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in R \end{aligned} \quad (2)$$

在风险管理中, 人们主要关心 Fréchet 分布族感兴趣, 它包含了 t 分布、帕累托分布和稳

太分布等后尾分布，这于金融序列的分布特征相符。Gumbel 分布族包含了正态和对数正态等薄尾分布。

Fisher-Tippet 定理表明极值分布可以用样本极大值数据拟合，由于样本极大值对于数据量要求过高，现实中数据量常常难以达到这一要求，所以极值理论更多是对于金融序列的尾部建模，观测超过某一门限的数据分布规律，通过 POT 模型来建模。

1.2 基于帕累托（GPD）分布的 POT 模型

应用极值理论研究金融数据时，最常用到的是分块样本极大值模型 BMM(Block Maxima Model)和峰值门限模型 POT(Peak Over Threshold)模型。BMM 模型主要是将一个金融序列的样本按时间分块，然后取每一块的极大值组成一个新的极大值序列，通过极大值序列来研究市场的极端情形，它对于序列分块的多少和具体划分方法有过多的不确定性。POT 模型是根据金融时间样本序列的尾部特征，来确定一个门限，将超越门限的样本值通过帕累托分布进行拟合，当然它也存在门限选取的不确定性因素。本文选取基于帕累托分布的 POT 模型来研究多元市场的联合极端风险情形。

Stefano Demarta(2002), Embrechts, Kluppelberg, and Mikosch 1991指出帕累托分布 $\bar{F}(x) = (\frac{\kappa}{\kappa+x})^\alpha$ 处于 $\Phi_\alpha(x)$ 的最大吸引域中，即帕累托分布处于 Fréchet分布族的吸引域中，它适合分布后尾数据的研究。但在实际金融数据研究中，广义帕累托分布（GPD）应用的更加广泛：

$$G_{\alpha,\kappa}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\alpha x}{\kappa})^{-1/\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\kappa), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (3)$$

α 为分布的形状参数， κ 为尺度参数。在应用极值理论进行尾部建模时，常常通过GPD和POT模型结合，在一定条件下选定门限，来对金融数据的尾部进行建模，度量市场极端风险。

1.3多元极值理论

跟一元极值理论有着诸多相同的统计性质，我们可以给出多元极值分布的定义。 $X_i, i=1,2,\dots$ 为具有相同分布函数 F 独立同分布随机向量。我们类似的定义对应组块极大值 $M_n = (M_{1,n}, \dots, M_{d,n})^t$ ，即 M_n 的第 j 个组块是 n 个观测样本中第 j 组极大极大值：

$$M_{j,n} = \max\{X_{1,j}, \dots, X_{n,j}\}, \quad j = 1, \dots, d.$$

与一元情形类似，多元极值分布同样具有一元情形下的最大吸引域非退化 d 维分布函数 H_n ，这即是一个多元极值分布：

$$(\frac{M_{1,n} - b_{1,n}}{a_{1,n}}, \dots, \frac{M_{d,n} - b_{d,n}}{a_{d,n}}) \xrightarrow{d} H_n \quad (4)$$

可以通过一元极值理论来研究和理解多元极值的边际分布性质，实际研究中人们已经对于一元极值理论有了深入透彻的探讨，给出了许多应用实例。但当问题扩展到多元极值情形时，问题就变得复杂多了。因为我们需要从全局考虑多个变量间的不同相依性关联，还要顾及到每个变量的边际分布性质，这也正是经典极值理论的局限所在。难以找到除线性相关系数以外的方法来描述不同变量序列间的相依性关联，Copula函数的出现为多元极值理论的研究提供

了一个新的有效的工具。我们可以找到一个对应于多元极值分布的Copula函数，将其边际分布结合，来探讨多元极值的统计特性，将其应用于实际的金融市场风险管理。

2 Copula函数

Copula函数在金融领域的应用已经越来越广泛，其在市场风险管理，衍生品定价，信用风险管理领域都有着重要的应用。Copula函数为度量序列相依性提供了一种革命性的崭新方法，它克服了传统的正态分布的线性相关性假设，使得不同金融时间序列在边际分布建模和相依性关系描述有了更加灵活多样的选择，这里我们对于Copula函数的各种统计性质和各类Copula函数不作一一详述，感兴趣的读者可以参考 Nelsen.R(1999)和Joe.h(1997)。我们在这里仅给出 Sklar定理和本文将要用到的两组Copula函数的定义。

2.1 Sklar 定理

假设一个多维分布函数 H 的边际分布函数为 $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$, 则存在一个 Copula 函数 C 满足

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (5)$$

如果 $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ 是连续的，则 Copula 函数是唯一确定的，反之亦然。我们注意到 Copula 函数的边际分布 $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ 都是 $[0,1]$ 上的均匀分布，这是将金融序列按照其原有边际分布转换到均匀分布所得。由这个定理我们可以推理得出当我们确定了多个金融时间序列的边际分布和选定一个合适的 Copula 函数后，就可以方便的计算出这些金融时间序列的联合分布，这正是 Copula 函数在实际应用研究的优势所在。多维分布的选取和确定其具体形式再也不是我们所要考虑的难题，而只需确定边际分布和选取合适的 Copula 函数。边际分布的确定由于是一维问题，我们已经有许多研究手段可以去实现它，而 Copula 函数的选择则需要我们通过实证结果的分析和一些评判模型的信息准则来确定。本文中我们将 Copula 函数同极值理论相结合，用广义帕累托分布对金融时间序列的尾部边际进行拟合，然后应用 Copula 函数将其连接在一起，度量组合投资的极端情形下的风险。

2.2 Gumbel Copula

$$C(u, v) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}) \quad (6)$$

其中 u, v 为 $[0,1]$ 上的均匀分布变量， θ 为描述两个变量间相依性关系的参数。这类 Copula 函数最早是由 Gumbel(1960b)提出的一类 Copula 函数。Gumbel Copula 是所有 Copula 函数在金融中应用最为广泛的一个，因为它既属于阿基米德（Archimedean Copula）类函数，又属于极值（Extreme Copula）类函数，兼有两类 Copula 函数的优秀的统计特性，对于实际的金融建模有着广泛的适用性。本文中就是应用 Gumbel Copula 函数来作为多元极值分布情形的替代，采用模拟的手段来度量不同市场组合投资的极端风险。

2.3. Empirical Copula

设 $\{x_k, y_k\}_{k=1}^n$ 代表一个长度为 n 的二元连续分布序列样本，Empirical Copula 函数 C_n 由下式给出：

$$C_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = \{\text{样本中满足 } x \leq x_i \cap y \leq y_j \text{ 的样本对}(x,y)\text{的个数和}\}/n$$

这种Copula函数在Nelsen（1999）中给出定义，其最原始的形式实际是由Deheuvels(1984)年给出的，那时候这种Copula函数被称作经验相依函数。Empirical Copula可以类比理解成我们在一元分布情形中的经验分布，它是基于一种非参数的建模方法，可以对于金融时间序列的真实分布拟合的更加准确。我们在本文中将首先应用Empirical Copula来度量两个不同GPD分布的相依性关系，然后在将估计所得的相依性指标用Gumbel Copula函数模拟，度量组合投资在极端情形下的风险。我们将给出两种风险度量指标 VaR(Value_at_Risk) 和 ES(Expected_Shortfall)，下一节我们将简单介绍两种风险度量指标的定义和特点。

3 风险度量指标

在风险管理领域，最流行的风险度量指标就是 VaR，即我们所熟知的风险在值。它最早是由 J.P.摩根提出用来衡量未来一天公司所面临的潜在风险有多大，这也是 VaR 的最基本定义：在一定概率水平（置信度）下，某一金融资产或证券组合在未来某一断时间内的最大损失上限。表达式如下：

$$VaR = P_0 Z_\alpha \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

其中 P_0 为证券组合的初始价值， Z_α 为 α 对应的分位数， σ 为组合标准差， $\sqrt{\Delta t}$ 为证券的持有期。

用 VaR 作为风险度量指标具有许多优点：它可以将不同金融资产、不同金融工具和各种复杂的金融组合的风险通过同一指标来反映，便于管理者直观比较；它将复杂的风险度量过程转化归纳为一个具体的量化指标，便于高层决策管理者理解；计算方法多样简便，便于风险管理和度量。虽然 VaR 有诸多优点，但其不足同样突出：在用参数方法度量风险时，常常将时间序列做正态或椭圆分布假设，这已被越来越多的金融实证研究证实与事实偏差过大；VaR 作为一个分位数，不一定具有连续性，在不连续分布中当置信水平改变时，VaR 数值会发生很大的变动，导致评价结果差异很大。最后 VaR 只给出了组合投资在某一点的风险暴露情况，而没有给出分位点以外的其它风险暴露情况。这只告诉了我们在一定概率水平下，风险在值不超过多少，并没有明确的指出当风险真的发生时，风险的可能期望值，可风险发生一旦超出这个概率水平，可能远远大于 VaR 值。在众多缺陷中，最致命的就是 VaR 不是一种一致性风险度量方法，即如果用于建模的金融序列的分布不再符合正态和椭圆分布假设，那么 VaR 就不再具有次可加性，通俗的说就是在建立组合投资度量其风险时，用 VaR 度量出来的组合投资风险往往会大于每个金融资产单个风险的和，这明显是与组合投资的初衷不符的。

Artzner P.(1997)提出的 ES 方法是一种一致性度量方法，可以有效的克服 VaR 的以上不足。这种度量方法在不同的风险管理文献中经常有不同的名称，例如条件 VaR(CVaR)、预期尾部损失(Expected Tail Loss)和最坏情形条件预期等等，但将其综合起来都是同一个基本而简单概念，如果我们的损失超过了 VaR，预期不足的定义为：

$$ES = E[L | L > VaR] \quad (8)$$

通过 VaR 我们可以了解当不利情况没有发生时，我们预期的损失最大不超过多少；而预期不足可以告诉我们当不利情况真的发生了，我们的可能的预期损失是多少。我们将在实证中给出不同权重下组合投资的 VaR 和 ES 值，来做分析比较彼此的关系。

4 实证研究

在实证中本文将用到上证综合指数和香港恒生指数 2003 年 7 月到 2007 年 7 月收盘价共 930 组数据作为研究数据，分别取其对数收益率做为研究对象。首先分别通过 GPD 分布拟合和 POT 方法来对其边际分布进行建模，然后通过 Copula 函数对两组数据的相依性关系进行度量模拟，通过模拟的结果给出基于极值理论和 Copula 函数控制尾部相依性关系的极端市场情形下的组合投资的 VaR 和 ES 值。

4.1 门限的选取

由于极值理论是研究收益序列的尾部特征，我们首先需要确定用来研究尾部实证数据的个数或门限，通常的方法是通过收益序列的 Q-Q 图和尾部形状图来确定选取门限。

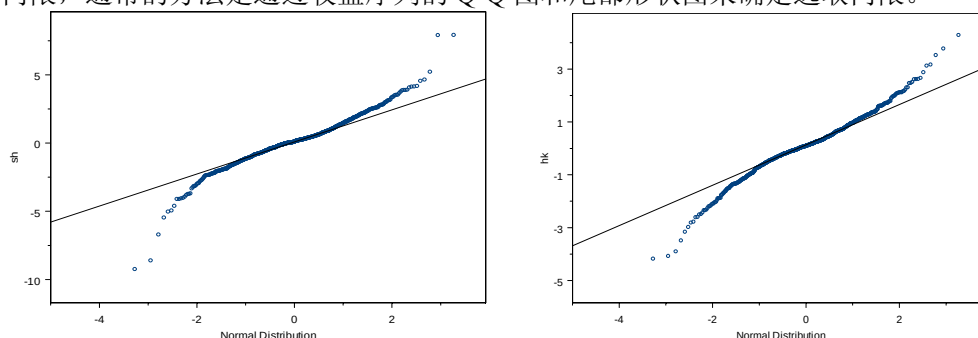
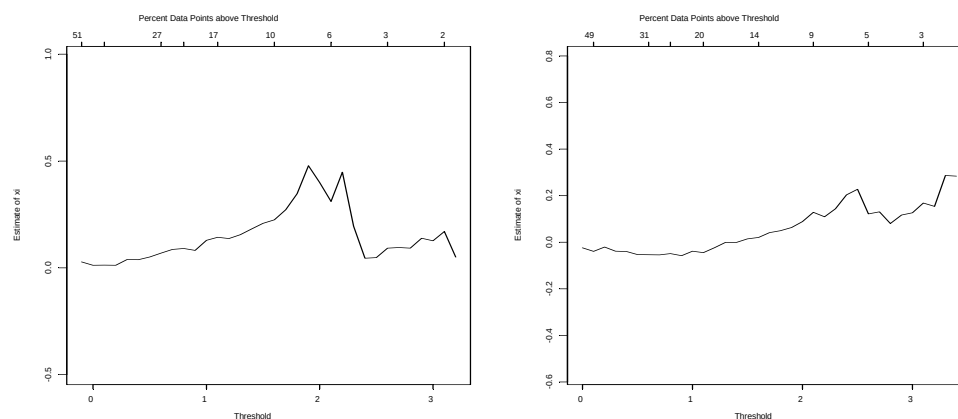


图 1：上证综指和香港恒生收益正态 Q-Q 图。通过图中收益分布和正态分布的比较可以看出，上证和恒生收益无论在上尾还是下尾都比正态分布的上、下尾部更厚，即风险更大。

通过 Q-Q 图和尾部形状拟合图我们可以确定上证指数的上尾门限为 1.5，下尾门限为 -1.85。按照上述确定门限的方法，可以保证每个尾部都有超过 12% 的数据即约有 110 个样本值用来进行尾部拟合。同样我们确定香港恒生的上尾门限为 1.2，下尾门限为 -1.2。确定两个指数的各自门限后，我们就可以通过 GPD 分布对数据的尾部进行估计建模。



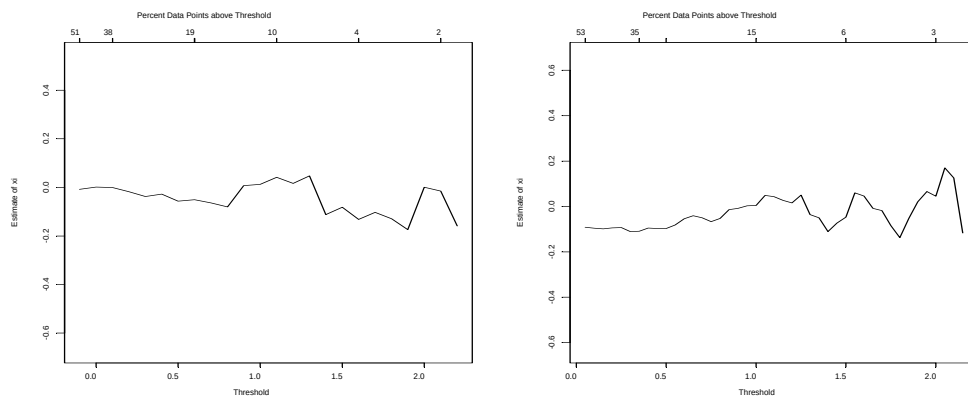


图 2：上证综指和香港恒生收益尾部形状图。左上为上证下尾，右上为上证上尾；左下为恒生下尾，右下为恒生上尾。

4.2 根据所选门限进行 GPD 的估计：

表 1：GPD 估计的相关参数列表

	门限	门限值	P	样本量	κ	α
上海	上	1.5	0.8838	108	0.2083	0.8095
	下	-1.85	0.8881	104	0.0825	0.8368
香港	上	1.2	0.9161	78	0.0166	0.6544
	下	-1.2	0.8957	97	0.0159	0.5706

注：表中 p 值表示整体样本中小于上门限和大于下门限的样本百分比。

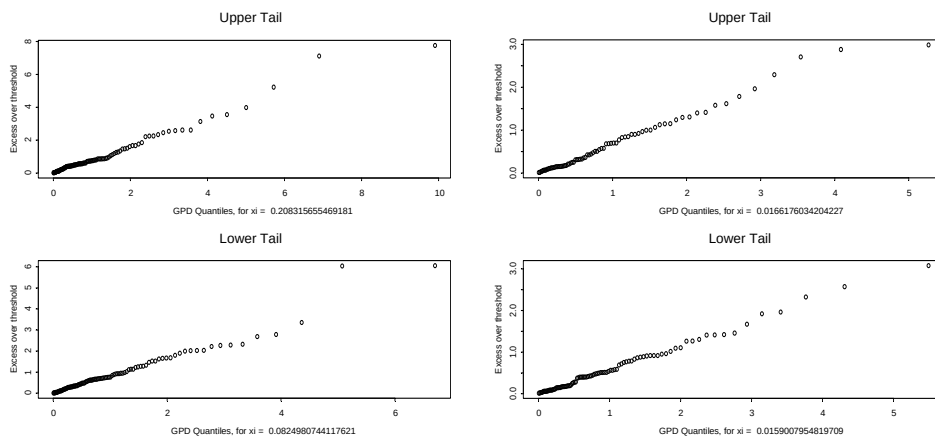


图 3：基于 GPD 上证综指和恒生指数日度对数收益的分布估计。左边一列分别为上证上下尾拟合图；右边一列分别为恒生上下尾拟合图

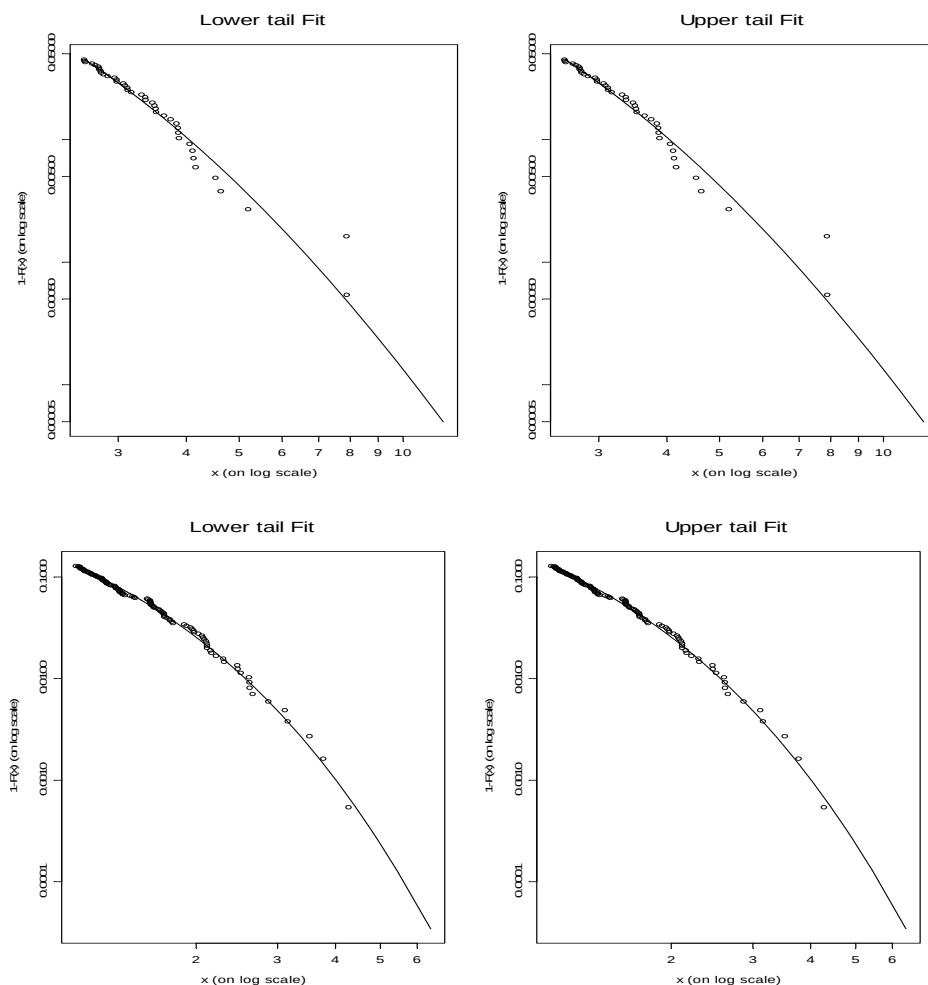


图 4：尾部拟合优度图。左边一列分别为上证上下尾拟合图；右边一列分别为恒生上下尾拟合图。

从图 3 和图 4 中可以看出，根据选定的门限绘制的分布拟合图的左边部分都基本接近线性关系，而拟合优度图中尾部的大部分点基本都落在图中的曲线上，说明了拟合分布效果非常理想。

4.3 GPD 分布的 Monte Carlo 模拟:

为了进一步验证 GPD 分布拟合效果，我们通过 GPD 分布估计出来的参数来产生与原来样本同样长度的随机样本，绘制样本和随机样本的 Q-Q 图。通过 Q-Q 图可以看出 GPD 分布的拟合效果，图 5 中两个市场的样本点只有少数几个没有落在拟合线上，我们可以推论 GPD 分布对于两个市场尾部的拟合的非常理想。这样一来，两个市场指数收益的边际分布特征我们已经可以确定，下一步我们需要通过 Copula 函数将两个市场尾部的分布连接起来，来分析极端市场情形下的组合投资风险。

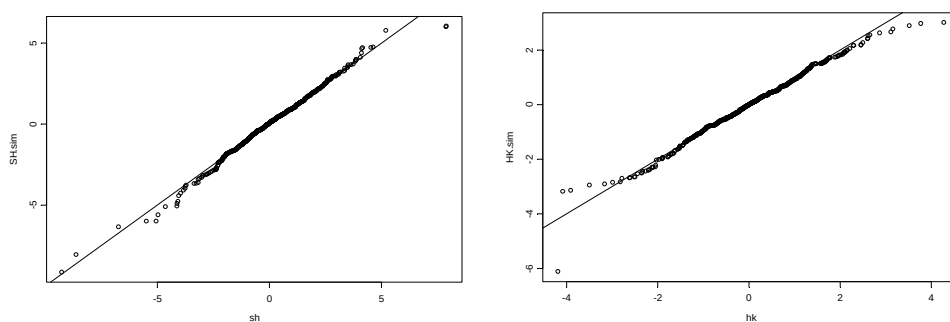


图 5：上证综指（左）和香港恒生（右）GPD 随机样本 Q-Q 图。

4.4 Copula函数的估计、模拟过程和相依性比较

在边际分布确定后，我们就可以用选定的边际分布来估计Copula函数，但是进行Copula函数的估计之前，我们还需要将每个指数的边际分布转化到均匀分布上，因为Copula函数要求其边际分布必须是[0,1]上的均匀。我们将两个指数收益序列门限外的收益序列通过GPD分布转化到[0,1]的均匀分布后，首先通过Empirical Copula函数来估计两个收益序列间的相依性关系，然后根据估计出来的相依性信息再用Gumbel Copula函数来估计描述这种相依性关系，以便我们后续进行组合投资风险度量使用。当然这里有的读者会问我们为什么不直接通过边际分布来估计Gumbel Copula函数的参数，我们之所以先用Empirical Copula函数来估计两个序列的相依关系，是因为Empirical Copula估计是基于一种非参方法的估计，它能够比其它方法更加有效的描述收益分布的更多信息，通过这些信息估计出来的Gumbel Copula函数的参数更加真实可靠，接近数据的实际分布。通过估计，我们算得Gumbel Copula函数的参数 $\theta = 1.116$ ，同时我们给出两种Copula函数估计的轮廓图叠加，来看两种函数的拟合差别。

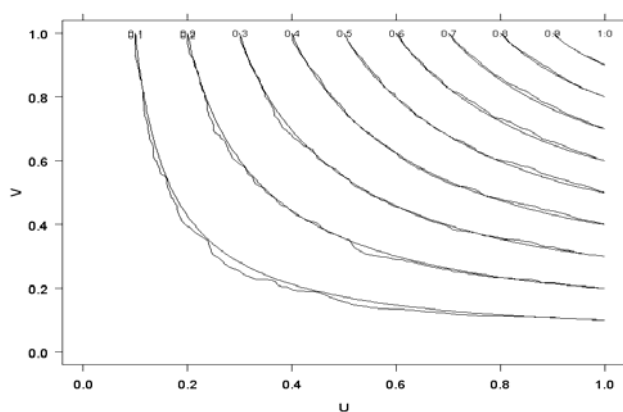


图 6：上证和恒生的 Gumbel Copula 和 empirical Copula 轮廓图比较

其中平滑的轮廓为 Gumbel Copula 函数的轮廓，曲折的轮廓为 Empirical Copula 函数轮廓，两者基本上是重合的。

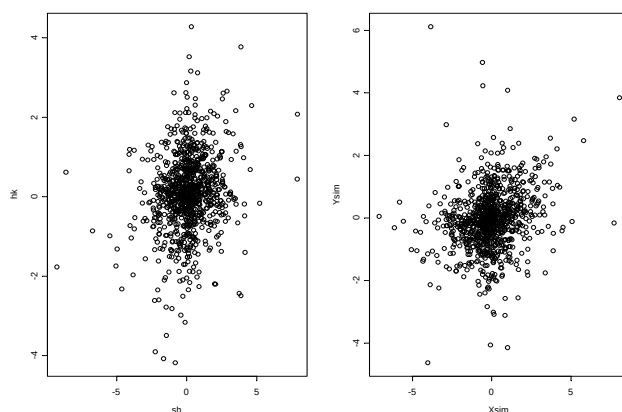


图 7：指数收益序列真实（左）和 Gumbel Copula 模拟（右）散点图对比

我们通过对比可以看出，两图虽然极端点的分布并不完全相同，但是点的重心分布和极端点的分布范围基本相同，我们有理由相信，Gumbel Copula 可以很好的模拟出真实的收益率联合分布情况，从而有效的度量联合分布下的组合投资的风险。接下来我们将给出两个市场不同权重下的组合投资的风险度量。

4.5 基于 Gumbel Copula 模拟计算的 VaR 和 ES

Copula 函数在市场风险管理中最广泛的应用就是模拟，在表 2 给出了基于 Gumbel Copula 函数，模拟产生 10000 组收益序列，9 组不同权重组合 99% 水平下的 VaR 和 ES 值。从表 2 可以看出每组对应的 ES 值都要明显大于 VaR 的数值，这说明 VaR 并非一致连续性估计，一旦风险情形发生，风险带来的损失可能远大与 VaR 的估计，极端情形下的风险情形更是如此，因此 ES 对于那些风险规避的投资者显得尤为有意义。另一方面，可以根据不同权重下模拟出的组合投资风险大小，在上证综指和香港恒生指数间确定合适的权重组合，以保证组合风险最小。从表 2 中可以发现，基于上证指数较低的权重有利于降低组合风险，但并非上证的权重越小越好，因为在(1, 9)的组合下的风险并不比其它组合的风险小，这种模拟方法对于组合投资的权重的确定有着明显的指导意义，当然这里面包含了模拟的随机偶然因素，可以通过多次模拟来获得更加准确的结果，这将作为本文的后续工作展开，这里仅给出一次的模拟估计结果，主要针对模型方法研究的实例演示。

表 2：不同权重下模拟计算的组合投资的 VaR 和 ES（99%）

	(1,9)	(2,8)	(3,7)	(4,6)	(5,5)	(6,4)	(7,3)	(8,2)	(9,1)
VaR	2.0512	1.8692	1.8869	1.8458	1.867	2.0059	2.1309	2.2739	2.6169
ES	2.4324	2.3644	2.3314	2.1974	2.2616	2.301	2.4816	2.6472	3.1005

5 结论部分

金融市场极端事件的发生，常常给投资者造成巨大的损失，人们一直都在寻求一种理想的手段来度量极端事件发生的风险。极值理论作为一种统计理论可以很好的描述序列的尾部极端分布情况，它对于金融数据同研究同样适用。人们似乎找到了度量极端事件风险的方法，

但是由于技术手段的限制多元极值理论的实际建模却成为极值理论向前发展的瓶颈。Copula 函数在金融理论中的应用，特别是在多元金融数据风险管理领域的应用，使多元实证建模有了突破性进展。本文将 Copula 函数和极值理论相结合，来研究上海和香港市场指数的组合投资的极端风险情况。两者结合的优势在于，基于极值理论的 GPD 分布可以很好的拟合金融序列的厚尾分布，能够更加真实地反映尾部的分布信息，因此本文分别用 GPD 分布拟合上证综指和香港恒指的尾部边际分布，来捕捉两个指数收益的尾部信息；Copula 函数可以将两个边际分布有效地连接在一起，合理构造两个市场指数尾部的联合分布，通过 Monte Carlo 模拟等技术手段，来度量两个市场间组合投资的联合风险。本文给出了一致性风险度量 Expected Shortfall 作为度量风险指标，通过 9 组不同权重组合下的风险度量，可以使投资者在两个市场间进行组合投资时，提供合理的参考依据和可靠的技术保证。

参考文献：

- [1]Acerbi, C.,Nordio, C., and Sirtori, C., Expected shortfall as a tool for financial risk management, Working paper,2001.
- [2]Acerbi, C., andTasche, D., On the coherence of expected shortfall, Journal of Banking & Finance, 26(2002), 1487-1503.
- [3]Artzner, P.,Delbaen, F.,Eber, J.-M., and Heath, D., Thinking coherently,Risk, 10(1997), 68-71.
- [4]Artzner, P.,Delbaen, F.,Eber, J.-M., and Heath, D., Coherent measures of risk, Mathematical Finance, 9(1999), 203-228.
- [5]CHEN X. and FAN, Y. 2002. "Estimation of Copula-Based Semi parametric Time Series Models," Working Papers, 0226, Department of Economics, Vanderbilt University
- [6]CHEN, X. and FAN, Y. 2006. "Estimation and Model Selection of Semi parametric Copula-Based Multivariate Dynamic Models Under Copula Misspecification," Journal of Econometrics, 135(1-2), 125-154.
- [7]Deheuvels, P. (1984): "Probabilistic Aspects of Multivariate Extremes,"in Statistical Extremes and Applications, ed. by J. Tiago de Oliveira, pp.117-130. D. Reidel Publishing Compan.
- [8]Embrechts, Paul, C. Kluppelberg, and T. Mikosch: Modelling Extremal Events. Springer, Berlin,1991.
- [9]Embrechts, P., Kluppelberg, C., and Mikosch, T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. New York: Springer-erlag ,1997.
- [10]Embrechts Paul,Kluppelberg C,Mikosch T..Modelling Extremal Events for Insurance and Finance[M].Berlin:Springer,1997.
- [11]Embrechts, Paul, A. McNeil, and D. Straumann: Correlationand dependency in risk management: properties and pitfalls," in Risk Management: Value at Risk and Beyond, ed. by M. Dempster, and H. Moffatt.Cambridge University Press,2001.
- [12]Hu, L. (2006). Dependence patterns across financial markets: A mixed copula approach. Applied Financial Economics, 10:717-729.
- [13]Hosking, J. R. M., and Wallis, J. R. Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. Technometrics, 29(3):339-349(1987).
- [14]Joe, Harry: Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman& Hall, London,1997.

- [15]Nelsen, R.: An Introduction to Copulas. Springer, New York,1999.
- [16]PATTON, A. J. 2001. "Applications of Copula Theory in Financial Econometrics," Unpublished Ph.D. dissertation, University of California, San Diego.
- [17]PATTON, A. 2006a. "Modeling Asymmetric Exchange Rate Dependence," International Economic Review, 47(2), 527-556
- [18]Prescott, P., and Walden, A. T. Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution. Biometrika, 67(3):723-724(1980).
- [19]Rene'A. Carmona.Statistical Analysis of Financial Data.University of Princeton Princeton, NJ 08544-5263,USA,2004 Springer-Verlag New York, Inc.
- [20]Stefano Demarta.Multivariate Extreme Value Theory and Copulas.Diploma Paper,2002.
- [21] 陈守东 , 胡铮洋. Copula 函数度量风险价值的 Monte Carlo 模拟 [J]. 吉林大学社会科学学报 , 2006,3:85-91.
- [22] 陈守东 , 孔繁利 , 胡铮洋.基于极值理论的 VaR 和 ES 度量[J].数量经济技术经济研究 ,2007 ,3:118-125.
- [23] 王春峰. 金融市场风险管理[M]. 天津 : 天津大学出版社 , 2001.
- [24] 张尧庭 连接函数(Copula)技术与金融风险分析[J].,统计研究,2002,4:48-51.

The Measurement of the Extreme Risk between Different Markets:

The Extreme Value Theory and Copula Method

Abstract: We have done a measurement on the extreme risk between different markets and taken a coherent measure of risk Expected shortfall and Value at Risk as the tools of measurement. In empirical research, we replaced multivariate normal distribution assumption by the copula functions which used to describe the joint distribution between the markets. This assumption will bring us many good by which we can model the multivariate extreme distribution without any other limits. A portfolio which made between the Shanghai Composite Index and Hong Kong's Hang Seng Index is used to do empirical research and measure the extreme risk between the two markets.