边际成本不同的动态 Hotelling 博弈

于维生　牛凤梅

(吉林大学商学院，吉林长春，130012)

摘要：本文把传统的具有相同的边际成本的动态 Hotelling 博弈模型推广为边际成本不同的动态 Hotelling 模型，并给出了该模型的子博弈精炼纳什均衡结果。

关键词：边际成本；Hotelling 模型；子博弈精炼纳什均衡

中图分类号：F224.32　**文献标识码：**A

1　引言

Hotelling 价格竞争博弈模型是经济博弈论中一个著名的模型。它在理论上阐明了企业可通过把同类产品差异化的策略，缓和产品市场竞争强度，从而可采取高于边际成本的价格策略，使企业获得正的利润。在应用中，Hotelling 模型为企业对于价格.品牌.销售区域的选择等提供了有益的启示。同时，Hotelling 模型还是研究企业的工艺革新.产品兼容.广告等策略行为的基础模型。然而，在传统的 Hotelling 模型中，一个重要的假设是企业具有相同的边际成本，在此假设之下，两个企业实行最大差异化的策略是该模型的子博弈精炼纳什结果。在实际中，由于原材料市场的价格，企业技术水平的差异等原因，企业的边际成本往往不同，这时，产品最大差异化策略是否仍为该博弈的均衡结果是个值得研究的问题。为此，本文把具有相同的边际成本的动态 Hotelling 博弈模型推广为边际成本不同的博弈模型，并证明了在均衡时，产品差异化程度与两个企业的边际成本差 $\Delta c = c_2 - c_1$ 与移动成本率 θ 之比 $\lambda = \Delta c/\theta$ 有关，当 $|\lambda| \in [0, 1]$ 时，产品的差异化程度最大；当 $|\lambda| \in [1, 1.315]$ 时，产品的差异化程度随 $|\lambda|$ 递减，当 $|\lambda| \in [1.315, 3]$ 时，产品的差异化程度随 $|\lambda|$ 递增。

2　具有不同边际成本的动态 Hotelling 模型

在本文给出的具有不同边际成本的动态 Hotelling 模型中，除两企业的边际成本不同，即 $c_1 \neq c_2$ 外，其它假设均与传统的 Hotelling 模型相同。两个企业生产同类产品，企业 i $(=1, 2)$ 的产品位值(指企业 i 的销售区域或产品品牌等差异化参数)用 a_i 表示。这里 $a_i \in [0, 1]$，且 $a_1 \prec a_2$。消费者的位值偏好为服从 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量 ξ。当 ξ 与 a_i 不同时，消费者需支付移动成本 $\theta(\xi - a_i)^2$，这里 θ 为移动成本率，表示当 ξ 与 a_i 距离为 1 时，消费者付出的移动成本。因此，消费者购买单位产品 i 的总支出为：$p_i + \theta(\xi - a_i)^2$。设消费者位值偏好 $\xi = x^*$ 时，消费者对两种产品的购买无差异，因而 x^* 应满足：

$$p_1 + \theta(x^* - a_1)^2 = p_2 + \theta(a_2 - x^*)^2$$

故有：

$$x^* = \overline{a} + (p_2 - p_1)\ /2\theta\Delta a$$

其中 $\Delta a = a_2 - a_1$，可用以度量两个企业产品的差异化程度。$\overline{a} = (a_1 + a_2)/2$，可用以度量

企业 1 的自然客源，同样，可用 $1-\bar{a}$ 度量企业 2 的自然客源。自然客源指当企业价格相同时，对企业产品的需求。$1/2\theta\Delta a$ 表示市场竞争强度。易见：增大 Δa 和 θ，都能起到减缓市场竞争强度，增加本企业垄断力量的作用。

市场对企业 1 产品的需求函数为：

$$x_1(a_1,a_{2;}p_1,p_2)=p\{\xi\le x^*\}=x^*=\bar{a}+(p_2-p_1)/(2\theta\Delta a) \tag{1}$$

市场对企业 2 产品的需求函数为：

$$x_1(a_1,a_{2;}p_1,p_2)=p\{\xi> x^*\}=1-x^*=1-\bar{a}-(p_2-p_1)/(2\theta\Delta a) \tag{2}$$

企业 1 的利润函数为：

$$\pi_1\left(a_1,a_2;p_1,p_2\right)=\left(p_1-c_1\right)x_1=\left(p_1-c_1\right)\left(\bar{a}+(p_2-p_1)/2\theta\Delta a\right) \tag{3}$$

企业 2 的利润函数为：

$$\pi_2\left(a_1,a_2;p_1,p_2\right)=\left(p_2-c_2\right)x_2=\left(p_2-c_2\right)\left(1-\bar{a}-\left(p_2-p_1\right)\ /2\theta\Delta a\right) \tag{4}$$

Hotelling 动态博弈模型分两个阶段，第一阶段，两个企业同时选择本企业的位值 a_i $i=1,2$ 第二阶段，两个企业在观察到位值 a_1,a_2 的条件下，同时选择本企业的产品价格 p_i， $i=1,2$

3 边际成本不同的动态 Hotelling 模型的子博弈精炼纳什均衡

对于具有不同的边际成本的Hotelling动态博弈模型，可用逆序归纳法求其子博弈精炼纳什均衡。

在博弈的第二阶段，两个企业已观察到位值 a_1,a_2，同时选择本企业产品价格 $p_i(i=1,2)$，使本企业利润 π_i 最大化。企业 i 的问题是对于固定的对手的价格 p_j，求解最大化问题：

$$\max\pi_i\left(a_1,\ a_2;p_1,p_2\right)=\left(p_i-c_i\right)x_i$$

由一阶条件 $\partial\pi_i/\partial p_i=0$，$i=1,2$，可得如下价格反应函数：

$$p_1{}^R\left(a_1,a_2,p_2\right)=\left(2\bar{a}\Delta a\theta+c_1\right)\ /2+p_2/2 \tag{5}$$

$$p_2{}^R\left(a_1,a_2,p_1\right)=\left(2\left(1-\bar{a}\right)\Delta a\theta+c_2\right)\ /2+p_1/2 \tag{6}$$

由(3.1)，(3.2)式易知，对给定的产品位值 a_1,a_2，两个企业的价格与本企业成本正相关，两个企业的价格策略互动关系是对手价格高，本企业价格也高；对手价格低，本企业价格也低。这对现实中企业之间竞相提价，降价的行为给以了解释。

求解价格反应方程组(5)及(6)，可得含有位值参数 a_1,a_2 的纳什均衡价格

$$p_1{}^N\left(a_1,a_2\right)=\left(2\theta\Delta a\left(1+\bar{a}\right)+2c_1+c_2\right)/3 \tag{7}$$

$$p_2{}^N\left(a_1,a_2\right)=\left(2\theta\Delta a\left(2-\bar{a}\right)+c_1+2c_2\right)/3 \tag{8}$$

均衡价格随自然客源增加而增加，随市场竞争强度增加而下降，这是在传统的 Hotelling 模型中也能看到的结论。在传统的 Hotelling 模型中看不到的结论是：产品价格与两个企业的成本都正相关。

将(5)及(6 式代入(1)、(2)式，可得含有位值参数的均衡产量

$$x_1{}^N\left(a_1,a_2\right)=\left(1+\bar{a}+\Delta c\ \ /2\theta\Delta a\right)/3 \tag{9}$$

$$x_2{}^N\left(a_1,a_2\right)=\left(2-\bar{a}-\Delta c\ \ /2\theta\Delta a\right)/3 \tag{10}$$

均衡产量随自然客源增加而增加，随竞争强度增加而增加，随本企业成本增加而减少，随对手的成本增加而增加。

将(5)及(6)代入(4)、(5)式，可得含有位值参数的均衡利润函数，也称为降价利润函数。

$$\pi_1^N(a_1,a_2)=\Delta c^2/18\theta\Delta a+2\Delta c(1+\overline{a})/9+2\theta\Delta a(1+\overline{a})^2/9 \tag{11}$$

$$\pi_2^N(a_1,a_2)=\Delta c^2/18\theta\Delta a-2\Delta c(2-\overline{a})/9+2\theta\Delta a(2-\overline{a})^2/9 \tag{12}$$

企业的成本优势越大，自然客源越大，市场竞争强度越低，则利润越大。但企业在通过位值的选择增加自然客源的同时，也增大了市场竞争强度。因而企业为使利润最大化，需要选取适当的位值和扩大成本优势。

在博弈的第一阶段，两个企业已预期到价格反应函数和降价利润函数，同时选择本企业位值 $a_i,(i=1,2)$, 使 $\pi_i^N(a_1,a_2)$ 最大化。

首先考察位值 a_i 变化对 π_i^N 的效应，由包络定理知：

$$\begin{aligned}\partial\pi_1^N/\partial a_1&=\partial\pi_1/\partial a_1+\partial\pi_1/\partial p_1^N\times\partial p_1^N/\partial a_1+\partial\pi_1/\partial p_2^N\times\partial p_2^N/\partial a_1\\&=\partial\pi_1/\partial a_1+\partial\pi_1/\partial p_2^N\times\partial p_2^N/\partial a_1\end{aligned}$$

a_1 对于 π_1^N 的直接效应为：

$$\partial\pi_1/\partial a_1=(p_1^N-c_1)(1/2+(p_2^N-p_1^N)/2\theta\Delta a^2)$$

a_1 对于 π_1^N 的策略效应为：

$$\partial\pi_1/\partial p_2^N\times\partial p_2^N/\partial a_1=2(p_1^N-c_1)(a_1-2)/3\Delta a$$

此处：

$$p_2^N-p_1^N=(2\theta\Delta a(1-2\overline{a})+\Delta c)\ /\ 3$$

从而 a_1 对于 π_1^N 的综合效应为：

$$\partial\pi_1^N\ /\ \partial a_1=(p_1^N-c_1)f(a_1,a_2)\ /\ 6\Delta a^2 \tag{13}$$

其中：

$$f(a_1,a_2)=\Delta a(a_2-3a_1-2)+\Delta c\ /\theta$$

同理有：

$$\begin{aligned}\partial\pi_2^N/\partial a_2&=\partial\pi_2/\partial a_2+\partial\pi_2/\partial p_1^N\times\partial p_1^N/\partial a_2+\partial\pi_2/\partial p_2^N\times\partial p_2^N/\partial a_2\\&=\partial\pi_2/\partial a_2+\partial\pi_2/\partial p_1^N\times\partial p_1^N/\partial a_2\\&=(p_2^N-c_2)g(a_1,a_2)/6\Delta a^2\end{aligned} \tag{14}$$

其中：

$$g(a_1,a_2)=\Delta a(-3a_2+a_1+4)+\Delta c\ /\ \theta$$

两个企业能在市场上运行的前提条件是他们能获取非负的利润，即 $p_i^N-c_i\geq 0$，$i=1,2$.易知使 $p_i^N-c_i\geq 0$ 的充要条件是：

$$-2\Delta a(1+\overline{a})\leq\lambda\leq 2\Delta a(2-\overline{a}) \tag{15}$$

式中：$\lambda = \Delta c / \theta$ 。

在(15)式成立的条件下，可知，当$\lambda \le 0$时，$\partial \pi_1^N / \partial a_1 \le 0,\ \pi_1^N$随$a_1$递减，因而企业 1 的最优选择是$a_1^* = 0$，这说明当企业 2 具有成本优势时，企业 1 应采取防御策略。

同理，当$\lambda \ge 0$，即$\Delta c = c_2 - c_1 \ge 0$，$\pi_2^N$随$a_2$递增，因而企业 2 的最优选择是$a_2^* = 1$，即当企业 1 具有成本优势时，企业 2 应采取防御策略。

我们尚需回答的问题是：当$\lambda \ge 0$时，企业 1 应如何选择位值；当$\lambda \le 0$时，企业 2 应如何选择位值。

当$\lambda \ge 0$时，$a_2^* = 1$，$\partial \pi_1^N \ / \ \partial a_1 = \left(p_1^N - c_1\right) f\left(a_1, 1\right) / 6\Delta a^2$ ，这里：

$$f\left(a_1, 1\right) = 3a_1^2 - 2a_1 + (\lambda - 1)$$

是a_1的二次函数。其判别式$\Delta = 4(4 - \lambda \ / \ 3) \le 0$的充要条件是$\lambda \ge 4 \ /3$。故当$\lambda \ge 4/3$时，$\partial \pi_1^N / \partial a_1 \ge 0$，即$\pi_1^N$关于$a_1$递增。当$\lambda = 2\Delta a\left(2 - \bar{a}\right) = a_1^2 - 4a_1 - 3$时，$p_2^N - c_2 = 0$，因而企业 1 的最优位值是$a_1^* = 2 - \sqrt{1 + \lambda} = a_1^M$，它随$\lambda$增加而减少。当$\lambda = 3$时，$a_1^* = 0$，故当$\lambda \in \left[4 \ /3, 3\right]$时，$a_1^* = 2 - \sqrt{1 + \lambda}$ 。

当$\lambda \prec 4/3$时，$f\left(a_1, 1\right)$的两个零点是$a_1^- = \left(1 - \sqrt{4 - 3\lambda}\right) \ / \ 3$，$a_1^+ = \left(1 + \sqrt{4 - 3\lambda}\right) \ / \ 3$。且有$a_1^+ \in [0,1]$；当且仅当$\lambda \ge 1$时，$a_1^- \ge 0$ 。

还可证明：当$\lambda \in \left[0, 5 \ /4\right]$时，$a_1^M \le a_1^+$，并且：

$$a_1^+ = \left(1 + \sqrt{4 - 3\lambda}\right) \ / \ 3 \ge a_1^M = 2 - \sqrt{1 + \lambda} 。$$

这样，当$\lambda \in [0,\ 1]$时，$a_1^- \le 0,\ a_1^M \le a_1^+$，故对于$a_1 \in [0, a_1^M]$，$\pi_1^N\left(a_1, 1\right)$递减，从而企业 1 的最优位值是$a_1^* = 0$ 。

同理，当$\lambda \in [1,\ 4/3]$时，$a_1^- \ge 0$，当$a_1 \in [0, a_1^-]$时，$\pi_1^N\left(a_1, 1\right)$递增；当$a_1 \in [a_1^-, a_1^+]$时，$\pi_1^N\left(a_1, 1\right)$递减，当$a_1 \in \left[a_1^+, a_1^M\right]$时，$\pi_1^N\left(a_1, 1\right)$递增。又可算得，当$\lambda \in [1, 1.31534]$时，$\pi_1^N\left(a_1^-, 1\right) \ge \pi_1^N\left(a_1^M, 1\right)$；故企业 1 的最佳位值为 $a_1^* = a_1^- = \left(1 - \sqrt{4 - 3\lambda}\right) /3$；当$\lambda \in \left[1.31534, 4 \ /3\right]$时，$\pi_1^N\left(a_1^-, 1\right) \le \pi_1^N\left(a_1^M, 1\right)$，企业 1 的最佳位值为：$a_1^* = a_1^M = 2 - \sqrt{1 + \lambda}$ 。

当$\lambda \le 0$时，企业 2 具有成本优势，$a_1^* = 0$，$\partial \pi_2^N\left(0, a_2\right) = \left(p_2^N - c_2\right) g\left(0, a_2\right) \ / \ 6\Delta a^2$。其中，$g\left(0, a_2\right) = a_2\left(-3a_2 + 4\right) + \lambda$，其为$a_2$的二次函数，判别式$\Delta = 16 + 12\lambda \le 0$的充要条件是：$\lambda \le -4 \ /3$，故当$\lambda \le -4 \ / \ 3$时，$\partial \pi_2^N \ / \ \partial a_2 \le 0$，$\pi_2^N\left(0, a_2\right)$递减。由(8)式，企业 2 的最优位值是$a_2^* = \sqrt{1 - \lambda} - 1 = a_2^M$，它随$\lambda$减少而增加，当$\lambda = -3$时，$a_2^* = 1$，从而当$a_2 \in \left[-3, -4 \ / \ 3\right]$时，$a_2^* = a_2^M = \sqrt{1 - \lambda} - 1$。

当$\lambda \succ -4 \ /3$时，$g\left(0, a_2\right)$的两个零点是$a_2^- = \left(2 - \sqrt{4 + 3\lambda}\right) \ / \ 3$，$a_2^+ = \left(2 + \sqrt{4 + 3\lambda}\right) /3$。与$\lambda \ge 0$的情形同样可以证明：当$\lambda \in \left[-1, 0\right]$时，企业 2 的最优位值是$a_2^* = 1$；当$\lambda \in \left[-1.31534, -1\right]$时，企业 2 的最优位值是$a_2^* = a_2^+ = \left(2 + \sqrt{4 + 3\lambda}\right) \ / \ 3$；当$\lambda \in \left[-3, -1.31534\right]$时，企业 2 的最佳位值是$a_2^* = a_2^M = \sqrt{1 - \lambda} - 1$。

至此，我们可知，当$0 \le |\lambda| \le 1$时，或两个企业的成本差距$0 \le |\Delta c| \le \theta$时，两个企业产品的差异化程度最大，$\Delta a = 1$；当$1 \prec |\lambda| \prec 1.31534$或$\theta \prec |\Delta c| \prec 1.31534\theta$时，两个企业产品差异化程度为$\Delta a = a_2^* - a_1^* = 1 - a_1^- = a_2^+ = \left(2 + \sqrt{4 - 3|\lambda|}\right) /3$，它随$|\lambda|$增加而减少；当$1.31534 \prec |\lambda| \le 3$时，或$1.31534\theta \prec |\Delta c| \le 3\theta$时，两个企业产品差异化程度为$\Delta a = 1 - a_1^M = a_2^M = \sqrt{1+|\lambda|} - 1$，它随$|\lambda|$增加而增加。这说明企业的成本差异较大和较小时，都使产品具有较大的位值差异，其原因是，当企业成本差异较小时，两个企业为避免剧烈的竞争，都采取产品差异化策略；而当企业成本差异较大时，具有成本劣势的企业采取防御策略，而具有较大的成本优势的企业不需要太强的进攻，就可把成本劣势企业逐出市场。

将两个企业的最佳位值代入(4.1)(4.2),(5.1)(5.2)，(6.1)(6.2)式，可得具有不同边际成本的动态 Hotelling 博弈模型的子博弈精炼纳什均衡结果。

当$-3 \le \lambda \prec -1.31534$时，有

均衡位值　$a_1^* = 0$，$a_2^* = \sqrt{1-\lambda} - 1$；

均衡价格　$p_1^* = c_1$，$p_2^* = 2\theta\left(\sqrt{1-\lambda} - 1\right) + c_2$；

均衡需求　$x_1^* = 0$，$x_2^* = 1$；。

均衡利润　$\pi_1^* = 0$，$\pi_2^* = 2\theta\left(\sqrt{1-\lambda} - 1\right)$。

当$-1.31534 \le \lambda \prec -1$时，有

均衡位值　$a_1^* = 0$，$a_2^* = \left(2 + \sqrt{4+3\lambda}\right) / 3$；

均衡价格　$p_1^* = \left(20 + 10\sqrt{4+3\lambda}\right)\theta /27 + \left(4c_2 + 5c_1\right) /9$，

$$p_2^* = \left(16 + 8\sqrt{4+3\lambda}\right)\theta / 27 + \left(2c_1 + 7c_2\right) /9;$$

均衡需求　$x_1^* = \left(8 + \sqrt{4+3\lambda}\right) / 18 + \lambda / 2\left(2 + \sqrt{4+3\lambda}\right)$,

$$x_2^* = \left(10 - \sqrt{4+3\lambda}\right) / 18 - \lambda / 2\left(2 + \sqrt{4+3\lambda}\right);$$

均衡利润

$$\pi_1^* = \Delta c^2 /6\theta\left(2 + \sqrt{4+3\lambda}\right) + \Delta c\left(8 + \sqrt{4+3\lambda}\right) /27 + \theta\left(2 + \sqrt{4+3\lambda}\right)\left(8 + \sqrt{4+3\lambda}\right)^2 / 48,$$

$$\pi_2^* = \Delta c^2 /6\theta\left(2 + \sqrt{4+3\lambda}\right) + \Delta c\left(10 - \sqrt{4+3\lambda}\right) / 27 + \theta\left(2 + \sqrt{4+3\lambda}\right)\left(10 - \sqrt{4+3\lambda}\right)^2 / 486 。$$

当　$\lambda \in [-1,1]$时，有

均衡位值　$a_1^* = 0$，$a_2^* = 1$；

均衡价格　$p_1^* = \theta + \left(2c_1 + c_2\right) / 3$，$p_2^* = \theta + \left(c_1 + 2c_2\right) / 3$；

均衡需求 $x_1^* = (1+|\lambda| / 3) / 2$，$x_2^* = (1-|\lambda| / 3) / 2$；

均衡利润 $\pi_1^* = \Delta c^2 / 18\theta + |\Delta c| / 3 + \theta / 2$，$\pi_2^* = \Delta c^2 / 18\theta - |\Delta c| / 3 + \theta / 2$。

当$1 \prec \lambda \le 1.31534$时，有

均衡位值 $a_1^* = \left(1-\sqrt{4-3\lambda}\right) / 3$，$a_2^* = 1$；

均衡价格 $p_1^* = \left(16+8\sqrt{4-3\lambda}\right)\theta / 27 + (4c_2+5c_1) / 9$，

$p_2^* = \left(20+10\sqrt{4-3\lambda}\right)\theta / 27 + (2c_1+7c_2) / 9$；

均衡需求 $x_1^* = \left(10-\sqrt{4-3\lambda}\right) / 18 + \lambda / 2\left(2+\sqrt{4-3\lambda}\right)$,

$x_2^* = \left(8+\sqrt{4-3\lambda}\right) / 18 - \lambda / 2\left(2+\sqrt{4-3\lambda}\right)$;

均衡利润

$$\pi_1^* = \Delta c^2 / 6\theta\left(2+\sqrt{4-3\lambda}\right) + \Delta c\left(10-\sqrt{4-3\lambda}\right) / 27 + \theta\left(10-\sqrt{4-3\lambda}\right)^2\left(2+\sqrt{4-3\lambda}\right) / 486,$$

$$\pi_2^* = \Delta c^2 / 6\theta\left(2+\sqrt{4-3\lambda}\right) - \Delta c\left(8+\sqrt{4-3\lambda}\right) / 27 + \theta\left(8+\sqrt{4-3\lambda}\right)^2\left(2+\sqrt{4-3\lambda}\right) / 486。$$

当$1.31534 \prec \lambda \le 4 / 3$时，有

均衡位值 $a_1^* = 2-\sqrt{1+\lambda}$，$a_2^* = 1$；

均衡价格 $p_1^* = 20\left(\sqrt{1+\lambda}-1\right)+c_1$，$p_2^* = c_2$；

均衡需求 $x_1^* = 1$，$x_2^* = 0$；

均衡利润 $\pi_1^* = 2\theta\left(\sqrt{1+\lambda}-1\right)$，$\pi_2^* = 0$。

参考文献

[1] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海三联出版社, 1996.

[2] [德] 方伟翰·哈拉德·维泽. 市场竞争中的企业策略[M]. 上海: 上海科学院出版社, 2000.

Dynamicac Hotelling Game model of Different Marginal Cost

Yu Wei-sheng　　Niu Feng-mei

Abstract : In this paper, we extend the dynamicac Hotelling game model with the same margial cost to the model with the different marginal cost .and we gived the result of subgame perfact Nash equilibrium for this game model .

Keywords: Marginal Cost; Hotelling Model; subgame perfact Nash equilibrium

收稿日期：2003-04-17

作者介绍：于维生，男，吉林大学商学院教授。