基于直觉主义和维特根斯坦对哥德尔不完全定理的评论*

庄朝晖

(厦门大学计算机科学系，厦门，福建，361005)

摘要：本文首先从形式主义的角度介绍了哥德尔不完全性定理，提出“哥德尔不完备性定理”的说法是容易混淆的，说明一阶算术有非标准模型，哥德尔的证明是基于标准模型的，可以推出一阶算术在标准模型上的不完备。接下来，引入了维特根斯坦对于哥德尔定理的评论。Floyd 和 Putnam 从非标准模型的角度来解读维特根斯坦的评论，然而 Bays 对此提出了有力的批评，表明从非标准模型来解读维特根斯坦的评论是困难的。本文引入了直觉主义的思想，对维特根斯坦的评论进行了新的解读，指出哥德尔证明中所基于的一阶算术的解释是模糊的。对于维特根斯坦，可以接受的是一阶算术上的可证性，所以在他看来，自然数系统上的真，如果要有意义的话，只能定义为一阶算术上的可证性。然后，进一步基于直觉主义和维特根斯坦的观点，批评了康托尔的“对角线”方法，提出康托尔证明中基于可数集定义的康托尔数是一直处于构造之中的，而且可数集与康托尔数的展开是相互追随的。在定义这个数的时候，已经决定了后面想把这个数放回可数集，就会产生矛盾。因此，矛盾不是来自于前提错误，而是来自于不正当的对康托尔数的定义。同样，在直觉主义者看来，哥德尔定理证明中得到的矛盾，是来源于哥德尔对哥德尔数的不正当定义。这个结论还可以推广到递归函数和图灵机等这些等价的计算模型之上。比如，在直觉主义者看来，停机问题是没有意义的。

关键词：哥德尔不完全性定理；对角线方法；直觉主义；维特根斯坦；停机问题

中图分类号：B81　　　　**文献标识码：A**

1　引言

哥德尔不完全性定理，是 20 世纪最重要的定理之一，在逻辑学、计算机科学、数学和哲学领域都有广泛的影响。

哥德尔[1]在罗素系统上构造了一个公式（这个公式不妨称为哥德尔语句，本文也用 P 表示），证明了著名的哥德尔第一不完全性定理：如果罗素系统是一致的，那么这个公式在罗素系统中是不可证明，这个公式的否定在罗素系统中也是不可证明的。哥德尔的这个定理具有相当的一般性，在包含一阶算术的形式系统中都适用。在《数学家的逻辑》[2]这本书中，基于一阶算术，也给出了哥德尔不完全性定理的证明过程。基于罗素系统，还是基于后来的一阶算术，来讨论哥德尔不完全性定理，效果都是一样的。

2　形式系统的不完全与不完备

本节的讨论，基于形式主义，澄清一些概念问题。

“哥德尔不完全性定理”，有时也称为“哥德尔不完备性定理”。我认为“哥德尔不完备性定理”这样的说法是容易混淆的。

---

*收稿日期: 2007-06-27;

基金项目：无

作者简介：庄朝晖(1976-)，男,福建南安人，厦门大学讲师,工学硕士，研究方向为数理逻辑。

在形式系统中，“完全性”与“完备性”，这两个概念要区分清楚。所谓形式系统的完全性（complete）指的是形式系统中所有的语句，要么它的肯定形式可证要么它的否定形式可证。所谓形式系统的完备性(adequacy，有时也用 completeness)，则与形式系统的模型密切相关，指的是在所有模型下为真的语句，在形式系统中也可以得到证明。完备性与完全性并不一样，比如在形式主义者看来，命题逻辑和一阶逻辑都是完备的但不是完全的。

但是完备性与完全性容易被混淆，中文如此，英文也如此。事实上哥德尔得到的是不完全性定理。基于不完全性定理之上，当把一阶算术的模型指定为自然数系统时，又推出一阶算术在自然数系统上的不完备性。

这里有个地方值得思考。根据哥德尔第一不完全性定理，一阶算术如果是相容的，则一阶算术是不完全的，那么一阶算术至少有两个实质不同的模型。也就是说一阶算术除了自然数系统之外，还可能有第二个模型。 如果把自然数系统称为一阶算术的标准模型，那么一阶算术还可能有非标准模型。

所谓一阶算术是完备的，指的是在一阶算术的所有模型中为真的语句，在一阶算术中都可以得到证明。所谓一阶算术是不完备的，指的就是存在一个在一阶算术的所有模型中为真的语句，在一阶算术中是不可证的。

那么，如果我们要说一阶算术是不完备的，我们要讨论的不能仅仅在自然数系统之上，我们还要考虑一阶算术其他可能的模型。这样来看，现在常用的“哥德尔不完备性定理”这样的说法，是不严谨的或者说是容易混淆的。哥德尔事实上得到的是“哥德尔不完全性定理”。然后，可以推论得到一阶算术相对于自然数系统而言是不完备的。如果要说“哥德尔不完备性定理”，精确点应该说“一阶算术在自然数系统上的不完备性定理”。

澄清这一点，我们就注意到在哥德尔不完全性定理的证明中，一直针对的就是自然数系统，或称一阶算术的标准模型。哥德尔不完全性定理的证明，依赖于我们对自然数系统的直觉。另外，一阶算术还有许多非标准模型，比如引入无穷大的常元。

3 解读维特根斯坦的评论

有趣的是，维特根斯坦对哥德尔不完全性定理进行过评论[3]。哥德尔读了维特根斯坦（以下简称维氏）的评论后，认为维氏没有理解他的定理。此后，维氏的这段评论在数学哲学界，普遍被认为是“臭名昭著”的。维氏评论的中文翻译可参考文献[4] 。然而，维氏是罗素最优秀的学生之一，他不可能不熟悉罗素的形式系统。于是，一些学者也倾向于为维氏评论寻找好的解读方式。

2000 年，Floyd 和 Putnam 写了一篇论文“A Note on Wittgenstein’s “Notorious Paragraph” about the Gödel theorem” [5]，给出了他们对维氏评论的解读。他们从非标准模型的角度来解读维特根斯坦的评论。以下用 P 来指哥德尔构造出来的那个公式，表达“本公式是不可证明的”。 根据哥德尔第一不完全性定理：如果一阶算术是一致的，那么 P 在一阶算术下是不可证的；如果一阶算术是 ω 一致的，那么 ¬P 在一阶算术下是不可证的。

现在，不妨从另一方面解读，假设¬P 在一阶算术下是可证的，那么一阶算术不是 ω 一致的。当然，依然还要假设一阶算术是一致的。也就是说，一阶算术可能是一致的但不是 ω 一致的。

这样会导致自然数系统 N 不满足一阶算术，也就是说一阶算术只有非标准模型。这样的话，对于 P 的解释就不能还是照原来理解，应该放弃原有的理解方式。

针对 Floyd 和 Putnam 的解读，Bays 写了一篇论文“On Floyd and Putnam on Wittgenstein on Gödel” [6]对此进行了批评：Floyd 和 Putnam 对于“¬P 在一阶算术下是可证的”，没有给出适当的理由。其次，不承认自然数系统满足一阶算术，这点是很难接受的。另外，如果¬P 在一阶算术下是可证的，则数学家要做的事大概是修改一阶算术，也不会用非标准模型来解释一阶算术。

Bays 的回复是有说服力的， 使用非标准模型来解释一阶算术，确实与创立一阶算术的本意是相反的。Floyd 和 Putnam 的思路，说服力并不够。

所以，从非标准模型来解读维氏的评论，这条路不好走。那么，我们不妨从另一个方向入手。一般认为，自然数系统当然是满足一阶算术的呀。然而，对于自然数系统是什么，依然不是很清晰。

我们引入一阶算术，本来就是为了刻划自然数系统。我们希望得到一阶算术在 N 上的完备性，自然数系统中为真的语句都可以在一阶算术中得以证明。然而，哥德尔不完全性定理却使这样一种期望破灭。

哥德尔使用自然数系统上的解释来研究一阶算术，然而，何谓自然数系统上是真的？回头来看，关于何谓自然数系统中为真的语句，有没有一个构造性的方法来判定？自然数系统中的语句是不是非真即假，这又由谁保证？

4 基于直觉主义来解读维特根斯坦的评论

20 世纪初关于数学基础的讨论中，出现了三个大的流派，一个是弗雷格和罗素倡导的逻辑主义，一个是布劳维尔倡导的直觉主义，一个是希尔伯特倡导的形式主义。关于直觉主义，布劳维尔说道：“并不存在非经验的真理，逻辑也并非是发现真理的绝对可靠的工具。这个观点被数学所接受，远比被实际生活和被科学接受来得晚。严格地依照这个观点来进行探讨，并且专用内省构造的方法来推演定理的数学，叫做直觉主义数学。”（[7]P104）直觉主义的主要特点是：反对实无穷，认为只有潜无穷；反对基于无穷集上排中律的证明，强调构造性的证明。

直觉主义的思想给经典数学提出了挑战，希尔伯特为了应对直觉主义的挑战，提出了希尔伯特纲领：将古典数学表述为形式系统，并证明该形式系统的无矛盾性。在自然数系统方面，他的目标是使用一阶算术来保证自然数系统，并证明一阶算术的无矛盾性，来说服直觉主义者。然而哥德尔不完全性定理表明，如果一阶算术是一致的，那么一阶算术是不完全的，并且一阶算术的一致性在一阶算术内部是不可证明的。

这样来说，希尔伯特对于自然数系统的某种捍卫是失败的。希尔伯特并没能说服直觉主义者。那么，希尔伯特所要面对的直觉主义的质疑还是存在的。对于自然数系统，有些学者可能认为这自然就是对的。这是他们立论的基础，这些学者不妨暂归为形式主义者。然而，对于直觉主义者，他们依然要对传统的自然数系统提出置疑。

可以设想一位直觉主义者，继续追问： 对于无穷集，可以使用排中律吗？自然数系统的语句是不是非真即假？自然数系统所谓的真语句是什么意思？所谓自然数系统的真语句有没有一个构造性方法的证明？所谓完全性又是什么概念？

对于直觉主义者，可以认同的是可证性。一阶算术上可证的语句，直觉主义者都是认同的；直觉主义者不认同，超出可证性意义而讲的真的概念。直觉主义者接受构造性的证明；直觉主义者不承认无穷集上使用排中律和非构造性的证明。

那么，我们可以把维特根斯坦的评论作一个直觉主义的解读。以下把罗素系统简称为PM，也可以表达为一阶算术。

在对于哥德尔定理的评论中，维氏一开始就问： Just as we ask: "'provable' in what system?", so we must also ask: "'true' in what system?" 对于形式主义者，所谓可证性是在 PM 上而言，所谓真是指在自然数系统上而言。然而，对于直觉主义者，自然数系统上的真是没有意义的。**其实，在维氏看来，有意义的所谓自然数系统上的真就是 PM 上的可证性，也可称为 PM 上的真。**

接下来，维氏又说：'True in Russell's system' means, as was said: proved in Russell's system; and 'false in Russell's system' means: the opposite has been proved in Russell's system。维氏否认所谓自然数系统上的真，只承认 PM 上的可证性。他把 PM 上的真语句，理解为 PM 上可证的。PM 上的假，理解为 PM 上可否证的。 在形式主义者看来，有一阶算术和解释一阶算术的更大的系统，然而在维氏，有意义的只有一阶算术。

接下来，维氏说：Now what does your "suppose it is false" mean? In the Russell sense it means 'suppose the opposite is proved in Russell's system'; if that is your assumption, you will now presumably give up the interpretation that it is unprovable。 作出这样理解之后，维氏指出，如果假设这个语句是假的，在罗素系统中也就意味着这个语句的否定在罗素系统中被证明。如果这是你的假设，那么你大概就要放弃对于该语句原先的解释：它是不可证的。

接下来，维氏说：-if you assume that the proposition is provable in Russell's system, that means it is true in the Russell sense, and the interpretation "P is not provable" again has to be given up. If you assume that the proposition is true in the Russell sense, the same thing follows。如果假设这个语句是 PM 上可证的，那么也就是说这个语句在 PM 上是真的，那么也必须放弃对于该语句的原先解释：P 是不可证的。如果假设该语句在 PM 上是真的，同理可得。

维氏说：Further: if the proposition is supposed to be false in some other than the Russell sense, then it does not contradict this for it to be proved in Russell's system. (What is called "losing" in chess may constitute winning in another game.) 维氏在这里指出，如果该语句被认为是在某个 PM 之外的系统之上是假的，这与罗素系统上的可证性并不会导致冲突。（在不同的游戏规则里，在这个游戏里称为“输”了，在另外一个游戏里可以称为“赢”了。） 维氏在更前面已经指出：不能在罗素系统中证明的命题是在另一种意义上，在与《数学原理》中命题不同的意义上是“真的”或是“假的”。（[4]P75）

形式主义者来理解哥德尔不完全定理，基于自然数系统的真概念之上。然而，在直觉主义者来看，所谓自然数系统的真的概念本来就是模糊的。对于哥德尔定理的意义，形式主义者认为揭示了自然数系统的真与一阶算术上的可证性之间的界限。然而在直觉主义者来看，本来就没有自然数系统的真这个概念。

虽然哥德尔证明的不完全性定理批判了形式主义的，然而作为理念主义者，哥德尔还是倾向于形式主义。对于维氏的直觉主义式的评论，哥德尔首先就不能接受直觉主义的前提，当然也就不能接受维氏的评论。

在形式主义者来看，哥德尔定理的证明没什么问题，然而定理是在形式主义者内部揭示了形式主义的局限。在直觉主义者来看，哥德尔定理里用到的自然数上的解释是模糊的，他们甚至不承认哥德尔证明的前提。

或许可以这么说，对于直觉主义者，哥德尔不完全定理的意义就在于顺着形式主义的思路，揭示形式主义的局限。另外，哥德尔在证明不完全性定理时，还系统引入了递归函数，

对直觉主义的构造主义思想是一种推动和丰富。图灵基于哥德尔之上引入了图灵机可计算，进一步把构造主义思想发扬光大。

有人或许要说：“不要用直觉主义的观点来解读形式主义”，那么我们可以问：“希尔伯特纲领本来不就是为了说服直觉主义者吗？难道能因为从道理上说服不了直觉主义者，就要诉诸于不同体系此类原因来让直觉主义者不再批评吗？”事实上，第三次数学危机之后，迅速发展起来的计算机科学，走的就是直觉主义构造主义的思想路线。

5 基于直觉主义和维特根斯坦对于哥德尔不完全性定理的评论

以下用直觉主义和维特根斯坦的观点来进一步审视哥德尔的工作。

哥德尔的一阶完备性证明使用的并不是构造性的方法，还使用了基于排中律的反证法。因此，在直觉主义者看来，所谓一阶逻辑完备性的证明是可疑的。基于一阶逻辑完备性而说一阶算术的完备性，也是同样可疑的。

哥德尔证明了连续统假设与公理集合论是相容的，然而他的这项工作在直觉主义来看，没有意义，因为直觉主义者只承认可数无穷，根本不承认不可数无穷。布劳维尔在当时评论道：“他们认为这是数学中最艰难、最根本的问题之一，对它的解答仍在等待之中。然而对直觉主义者来说，上述问题是没有意义的。”（[7]P98）维特根斯坦也反问道：“不可数”这个概念可以用来干什么？（[4]P83）他还说：“在数学中应该避免‘无限的’这个词吗？是的；在它显得是把意义赋予计算而不是从计算中得到意义的地方，都应避免这个词。”（[4]P94）

对于哥德尔不完全性定理，哥德尔在证明中系统提出了递归函数，从另外一个层面对自然数系统进行公理化，提出了递归可计算的概念。进而，他又证明了，自然数之上的函数（或关系）是一阶算术上可表达的当且仅当它是递归的。这样来看，递归可计算的成果，都可以转化到一阶算术的可证性。这部分成果，直觉主义者都是接受的。所谓自然数系统上的真，在直觉主义者来看，就是递归可计算，也就等价于一阶算术可表达的，还是在一阶算术可证性的范围内来讨论。正是因为这一点，哥德尔才能够定义带有“自引用”性质的哥德尔语句。在直觉主义者看来，在考虑自然数系统这个范围，没有什么所谓一阶算术，或者 PM 系统之外的更大的系统。这也正是维特根斯坦所作评论的要点。（后来甘茨使用超穷归纳法证明一阶算术的完全性，这是希尔伯特纲领之外的，当时的形式主义者也不认同的。）

哥德尔在证明不完全性定理的时候，用到了类似于康托尔“对角线”的证明方法。

康托尔使用了“对角线”方法证明了实数集不是可数集。这个方法的大概思路是假设实数集是可数集，然后在这个可数集上定义一个新的数，这个数不妨称为康托尔数，如果说康托尔数属于可数集里的某一个数时，都会导致矛盾。因此，实数集不是可数集。

对于康托尔的“对角线”方法，直觉主义者是不赞同的。布劳维尔评论道：形式主义者作出结论：“连续统的势，即介于 0 与 1 之间的实数的集合的势，大于阿列夫零”，这是一个对直觉主义者来说没有意义的命题。（[7]P98）因为直觉主义者只接受潜无穷，不接受实无穷。在康托尔的证明中，依赖于可数集之上定义了康托尔数，这个思路是把可数集当成一个已完成的实无穷来考虑。然而，在直觉主义者看来，这个过程是可疑的。因为可数集始终处于构造之中，并不是已经完成的一个集合。所以，康托尔数可以说是一直处于构造之中的，处于永远未完成的状态。康托尔在证明中，又把这个随可数集的展开而变化的数试图放入已展开的可数集中，这样当然就产生矛盾了。

维特根斯坦也强调构造性的观点，他提到："因此有这样的争论：一个不是构造的存在证明是否真的是对于存在的证明。即是说，它问的是：如果我没有可能发现它存在于什么地方，我懂得命题'有……'吗？"（[4]P223）

对于对角线法证明，维特根斯坦指出，根据对角线方法，依赖于下一行的实数，才能确定康托尔数的下一位。这个过程是一直处于构造之中的，并不是已经完成的状态。"序列中始终有一个，它是否不同于对角序列这一点是不确定的。人们可以说：它们相互追随，趋于无穷，但总是原来的序列位居前面。"（[4]P82）康托尔的对角线方法包含了这种相互追随的序列，却又试图使本应在后的康托尔数倒放回来，这才导致了矛盾。

因此，维特根斯坦也是反对康托尔的对角线方法，认为康托尔证明中出现的矛盾，其实不是来自于假设的错误，而是来自于证明中使用了不适当的证明方法，这才导致了矛盾的出现。对于康托尔证明，维特根斯坦评论道：当一个证明所证明的东西超出了它的方法所允许的，我们总是应该保持怀疑。这可以叫做"夸大的证明"。（[4]P86）

康托尔认为矛盾来自于假设错了，所以实数集不是可数集。然而在直觉主义者和维氏看来，**在定义康托尔数的时候，已经决定了后面想把康托尔数放回可数集，就会产生矛盾。因此，矛盾不是来自于假设前提的错误，而是来自于不正当的对康托尔数的定义。**

在直觉主义者和维氏看来，可数集应该是不断膨胀的集合序列，永远处于一个不断展开的过程。这样来理解的话，当某一时候康托尔数要反过来等于某个数，这是可能的，并不会产生矛盾。因此，在直觉主义者看来，是因为康托尔证明中基于实无穷集合上的对于康托尔数的过分定义，才导致了矛盾的产生。因此，应该放弃的是康托尔对康托尔数的定义，而不是像康托尔那样推断出假设的前提是错误的。如此，康托尔得出的结论是不适当的，对于直觉主义者是不可接受的。

从直觉主义和维氏的角度，评论了康托尔对角线方法后，再回到哥德尔第一不完全性定理的证明。在证明中，哥德尔借鉴理查德悖论，基于哥德尔编码和递归函数论之上构造了哥德尔语句 P 这个全称语句。在证明中，先假设 P 是定理，又定义 q 是 P 的证明的哥德尔编码（这个编码以下不妨称为哥德尔数），接下来又试图把哥德尔数放入 P 这个全称语句覆盖的自然数范围，这样就导致了与相容性的矛盾。

注意到哥德尔语句是一个全称语句，它所实例化后得到的实例才是递归的，每个实例对应某个自然数。在哥德尔的证明中，P 这个全称语句对应的实例集是定义在实无穷的意义之上的，实例集对应的自然数集也是在实无穷意义上而言的。然而在直觉主义者看来，如果要说这个全称语句可证，那么必须要有一个构造性的证明过程。P 这个全称语句覆盖的实例集及其覆盖到的自然数集是始终处于构造之中的，并不是已经完成的一个集合。所以，哥德尔数，这个关于哥德尔语句的证明的编码，也是一直在变化之中的。哥德尔在证明中，又把这个一直在随 P 的证明展开而变化的哥德尔数试图放入 P 的证明展开中已覆盖到的自然数范围，这样当然就产生矛盾了。

类似于维氏于对角线方法的评论，P 的证明的展开与对 P 的已展开证明的编码 q，这两个序列的关系是相互追随，趋于无穷，但总是原来的序列位居前面。哥德尔定理的证明中包含了这种相互追随的序列，却又试图使本应在后的哥德尔数倒放回来，这才导致了矛盾。因此，在维氏看来，哥德尔定理的证明方法是不适当的。

哥德尔认为矛盾来自于假设错了，所以 P 不是定理。然而在直觉主义者和维氏看来，**哥德尔在定义哥德尔数的时候，已经决定了后面想把哥德尔数再放入哥德尔语句覆盖的自然数范围时，就会产生矛盾。因此，矛盾不是来自于假设前提的错误，而是来自于不正当的对哥德尔数的定义。**

在直觉主义者看来，全称公式所覆盖到的自然数范围应该是不断膨胀的集合序列比如｛0｝，｛0,1｝，｛0,1,2｝…… ，永远处于一个不断展开的过程。这样来理解的话，后面想把哥德尔数反过来等于某个自然数，并不会产生与相容性的矛盾。因此，在直觉主义者看来，是因为哥德尔证明中对于哥德尔数的过分定义，才导致了矛盾的产生。因此，应该放弃的是哥德尔对哥德尔数的定义，而不是像哥德尔那样推断出假设的前提是错误的。如此，哥德尔的证明方法，对于直觉主义者是不可接受的。因此，哥德尔得出的结论是不适当的，对于直觉主义者是不可接受的。

作为一个直接的推论，在直觉主义者和维氏看来，哥德尔第二不完全性定理也失去意义。另外，罗歇尔(Rosser)借助哥德尔证明工具而实现的罗歇尔形的哥德尔不完全性定理，在直觉主义者和维氏看来，也包含了类似的不正当的证明方法。

6 相关推论

因为在递归函数，在图灵机中都使用类似的“对角线”方法分别证明了存在非递归函数和图灵不可计算问题。基于直觉主义，我们也可以同样怀疑这两个证明。**在递归函数这边来看，证明中定义的非递归函数是没有意义的。在图灵可计算领域来看，停机问题是没有意义的。对于其他与图灵机等价的计算模型，以上的推论同理可得。**

作为形式主义，沉醉于古典数学，不易接受直觉主义的观点，然而对于计算机科学，以能行性构造性为特征的科学，本身也是发源于构造主义数学和有穷可证性的科学，倒应该是与直觉主义接近的。令人惊讶的是，没有看过一本计算理论的书，尝试从直觉主义的角度来评论停机问题。在直觉主义者看来，**停机问题没有意义，那么通过各种途径归约到停机问题的不可判定问题也将失去意义。**

如何从直觉主义和维氏的角度，重新思考逻辑系统的语法和语义，比如语法上的公理和推理规则，语义上的解释特别是关于无穷论域的解释等等，思考如何适当地证明逻辑系统的性质，思考如何正当地使用逻辑，也是摆在我们面前的课题。

另外，一些语义悖论，都与哥德尔不完全性定理相关。基于直觉主义思想，也可以解释和避免这些语义悖论。从直觉主义者和维特根斯坦的角度来看，**这些悖论都来源于对语言的不正当使用。**

致谢：本论文起源于哲学合作社论坛上的讨论，谢谢 fengye、游客和 chubai 等关于“数学真理是什么”的讨论！

参考文献:

[1] Kurt Gödel, Edited by Solomon Feferman. Kurt Gödel: Collected Works (Volume 1) [M]. Oxford University Press, 1986: 145-199.

[2] A.G.Hamilton 著,骆如枫译.《数学家的逻辑》[M].商务印书馆.1989.8

[3] Ludwig Wittgenstein, Edited by G. H. von Wright and R. Rhees. Translated by G. E. M. Anscombe. Remarks on the Foundations of Mathematics (revised edition) [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1978(I Appendix III).

[4] 维特根斯坦著，徐友渔,涂纪亮译.《维特根斯坦全集》第七卷[M]. 河北教育出版社，2003 年（第一篇附录三）.

[5] Floyd Juliet and Hilary Putnam. "A Note on Wittgenstein' s "Notorious Paragraph" about the Gödel theorem" [J]. The Journal of Philosophy 97(2000): 624-632

[6] Timothy Bays. "On Floyd and Putnam on Wittgenstein on Gödel" [J]. The Journal of Philosophy CI.4 (2004): 197-210

[7] 贝纳塞拉夫,普特南编，朱水林等译.《数学哲学》[M] . 商务印书馆，2003 年

Remarks on Gödel Incompleteness Theorem based on Intuitionism and Wittgenstein

ZHUANG Chao-hui

(Inst. of Software of Computer Science Dept. of Xiamen Univ., Xiamen 361005, P.R.China)

Abstract: This paper introduces Gödel incompleteness theorem in formalism perspective and shows that the proof of Gödel incompleteness theorem is based on some interpretation of first order arithmetic. Then, this paper criticizes the proof of Gödel incompleteness theorem from the perspective of Intuitionism and Wittgenstein. Intuitionists can accept expressibility of formal system and recursive functions, but will deny any concept of truth outside provability of first order arithmetic. Furthermore, Cantor's diagonalization method, which Gödel based his proof on, is unacceptable for intuitionists, because the definition of Cantor's real number, as well as the definition of Gödel number, has forecast the future contradiction in the proof. Results of their proof originate from unsuitable proof methods. As a conclusion, Gödel theorem is meaningless for Intuitionist. So is halting problem.

Key word: Gödel incompleteness theorem; Diagonalization method; Intuitionism; Wittgenstein; Halting Problem