

几类刻画主体的逻辑*

李小五

(中山大学逻辑与认知研究所, 广东 广州 510275)

内容提要: 我们建立几类刻画主体的逻辑。第一类逻辑是处理以目的和背景知识为双条件的条件句的逻辑。第二类逻辑是比较主体能力的逻辑。第三类逻辑是刻画主体言行关系的逻辑。第四类逻辑是通过认知一个主体的言行来认知该主体的逻辑。第五类逻辑是刻画主体知行关系的逻辑。第六类逻辑是刻画知道一个活动的逻辑。第七类逻辑是刻画对认识概念或活动概念的认知的逻辑。第八类逻辑是活动生成后果的逻辑。第九类逻辑是主客观逻辑。

关键词: 以目的和背景知识为双条件的条件句; 比较主体能力; 主体言行关系; 通过认知一个主体的言行来认知该主体; 主体知行关系; 知道一个活动; 对认识概念或活动概念的认知; 活动生成后果; 主客观逻辑

中图分类号: B81

文献标识码: A

一、以目的和背景知识为双条件的逻辑 AKC

本节我们要研究一种特定的双条件句 $\varphi\psi\geq\theta$ 。在这样的条件句中, φ 表示某个主体 A 的目的(或意图), ψ 表示 A 的背景知识, θ 表示能认知的结果。所以 $\varphi\psi\geq\theta$ 刻画的是 A 的一个认知过程。主体 A 先有目的 φ , 再根据它的背景知识 ψ 能认知 θ 。不同的目的和不同的知识背景会使同一主体认知不同的结果。认知心理学已经有大量的实验证明这种情况。

主体的背景知识通常是一个有穷的命题集 Φ , 所以上述 ψ 可看作 Φ 中所有命题的一合取。

为了简单, 本节我们只研究单主体逻辑, 将来我们另外撰文将此推广到多主体逻辑。

1.1.1 定义 本文我们总用 $At=\{p_1, \dots, p_n, \dots\}$ 表示可数无穷多个原子公式的集合。归纳定义所有公式 φ 的集合 Form 如下:

$\varphi::=p|\neg\varphi|\varphi\wedge\psi|\varphi\psi\geq\theta$, 其中 $p\in At$ 。

以后我们总用 φ, ψ, θ 和 ξ (加或不加下标)表示 Form 中的元素。 $\perp$

$\varphi\psi\geq\theta$ 称为以目的和背景知识为双条件的条件句。

1.1.2 规定与缩写 联结符 $\vee, \rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 定义如通常。我们规定联结符的结合力从左到右依次减弱: $\neg, \wedge, \vee, \geq, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。

此外, 我们规定同形联结符满足右向结合原则。例如, $\varphi\rightarrow\psi\rightarrow\theta$ 表示 $\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\theta)$ 。

$\top$ 定义为 $p_1\vee\neg p_1$, $\perp$ 定义为 $\neg\top$ 。

我们也用 $\Leftrightarrow$ 表示“当且仅当”, 用 $\Rightarrow$ 表示“若..., 则...”, 用 $\sim$ 表示“并非”。 $\perp$

1.1.3 定义 以目的和背景知识为双条件的条件句系统 AKC 定义如下:

(TA) 所有重言式的代入特例,

(CTR $\geq$) $(\varphi\psi\geq\theta)\wedge(\varphi\theta\geq\xi)\rightarrow\varphi\psi\geq\xi$, (传递公理)

收稿日期: 2006-5-10

基金项目: 本文得到教育部基地重大项目《归纳逻辑及其应用》(项目编号 05JJD720.40001)和教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目(项目编号 04JZD0006)的资助。

作者简介: 李小五(1955-), 男, 河北人, 中山大学教授, 北京书生公司书生研究中心客座研究员。

电子邮箱: LXW121@yahoo.com.cn lxwlyy@hotmail.com

- (CC_≥) $(\varphi\psi \geq \theta_1) \wedge (\varphi\psi \geq \theta_2) \rightarrow \varphi\psi \geq \theta_1 \wedge \theta_2$, (结果合取公理)
 (CA_≥) $(\varphi_1\psi \geq \theta) \wedge (\varphi_2\psi \geq \theta) \rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\psi \geq \theta$, (目的析取公理)
 (CB_≥) $(\varphi\psi_1 \geq \theta) \wedge (\varphi\psi_2 \geq \theta) \rightarrow \varphi(\psi_1 \vee \psi_2) \geq \theta$, (背景知识析取公理)
 (CMP_≥) $(\varphi\psi \geq \theta) \wedge \varphi \wedge \psi \rightarrow \theta$, (能认知的实现公理)
 (ID_{⊥T}) $\perp T \geq \perp$, (无目的公理)
 (MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \theta / \theta$,
 (RAE_≥) $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 / \varphi_1\psi \geq \theta \leftrightarrow \varphi_2\psi \geq \theta$, (目的等价置换规则)
 (RBM_≥) $\psi \rightarrow \psi_0 / \varphi\psi_0 \geq \theta \rightarrow \varphi\psi \geq \theta$, (背景知识反单调规则)
 (RCM_≥) $\theta_0 \rightarrow \theta / \varphi\psi \geq \theta_0 \rightarrow \varphi\psi \geq \theta$. (认知结果单调规则) ⊢

说明: (1) 由 TA 和 MP 构成的系统称为经典句子系统, 记为 **PC**。我们用 **PC**₀ 表示用不含 $\geq$ 的语言表述的 **PC**。

(2) ID_{⊥T} 直观表示: 无目的导致无结果。ID_⊥ 可证等价 $(\varphi \wedge \neg \varphi)T \geq \varphi \wedge \neg \varphi$, 所以它也刻画了矛盾目的导致矛盾结果的情况。这个公理有一定道理。我们可以把它概括为

$$(ID_{\perp}) \quad \perp \psi \geq \perp,$$

但通常知识总是真的, 所以我们在本系统采用 ID_{⊥T} (另一个原因是技术上的: 采用 ID_{⊥T} 而不是 ID_⊥ 能大大简化框架完全性的证明)。若把 ID_{⊥T} 概括为

$$(ID_{\geq}) \quad \varphi\psi \geq \varphi$$

也可以。这样的主体应该有一定的反思能力。但我们认为并非每一主体都应具备这种能力。

(3) 由 RBM_≥ 易得

$$(\%) \quad \varphi\psi \geq \theta \rightarrow \varphi(\psi \wedge \xi) \geq \theta.$$

(%) 的直观意义是: 若主体 A 以目的 φ 和背景知识 ψ 为条件能认知 θ , 则 A 以目的 φ 和增加了的背景知识 $\psi \wedge \xi$ 为条件仍能认知 θ 。但 (%) 的一个特例是

$$\varphi\psi \geq \theta \rightarrow \varphi(\psi \wedge \neg \psi) \geq \theta.$$

这个公式看起来并不自然。这里的问题直观上来自用矛盾式作为背景知识, 本质上来自实质蕴涵怪论, 要消解它就要修改或取消 RBM_≥。比如, 把 RBM_≥ 减弱为下面 1.1.5 (1)。

1.1.4 定义 (1) 我们用 $\vdash \varphi$ 表示 φ 是 **AKC** 的**内定理**: φ 在 **AKC** 中有一个形式证明。

(2) **AKC** 的全体内定理的集合记为 $\text{Th}(\text{AKC})$ 。

(3) 我们也用 $\nvdash \varphi$ 表示 $\varphi \notin \text{Th}(\text{AKC})$ 。

(4) 称 $\varphi_1, \dots, \varphi_n / \theta$ 是 **AKC** 的**导出规则**, 当且仅当, 在 **AKC** 中有一个从 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 到 θ 的形式推演 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \theta$ 。⊢

1.1.5 引理 下面是 **AKC** 的内定理和导出规则:

- (1) $\psi \leftrightarrow \psi_0 / \varphi\psi \geq \theta \leftrightarrow \varphi\psi_0 \geq \theta$, (背景知识等价置换规则)
 (2) $\varphi\psi \geq \theta_1 \wedge \theta_2 \rightarrow (\varphi\psi \geq \theta_1) \wedge (\varphi\psi \geq \theta_2)$,
 (3) $\theta_0 \leftrightarrow \theta / \varphi\psi \geq \theta_0 \leftrightarrow \varphi\psi \geq \theta$, (认知结果等价置换规则)
 (4) $\varphi\psi \geq \theta \wedge \xi \rightarrow \varphi(\psi \wedge \theta) \geq \xi$.

证明: 据 RBM_≥ 易得 (1)。据 RCM_≥ 易得 (2) — (3)。下证 (4):

- ① $\psi \wedge \theta \rightarrow \psi$ TA
 ② $\varphi\psi \geq \theta \wedge \xi \rightarrow \varphi(\psi \wedge \theta) \geq \theta \wedge \xi$ ①, RBM_≥
 ③ $\theta \wedge \xi \rightarrow \xi$ TA
 ④ $\varphi(\psi \wedge \theta) \geq \theta \wedge \xi \rightarrow \varphi(\psi \wedge \theta) \geq \xi$ ③, RCM_≥
 ⑤ $\varphi\psi \geq \theta \wedge \xi \rightarrow \varphi(\psi \wedge \theta) \geq \xi$ ②, ③。⊢

1.1.6 定义 (1) 定义从语言 Form 到不含 $\leq$ 的子语言 Form₀ $\subseteq$ Form 的**翻译映射** t 如下:

$$t(p) = p, \quad \text{对所有原子公式 } p;$$

$$t(\neg \varphi) = \neg t(\varphi); \quad t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge t(\psi); \quad t(\varphi\psi \geq \theta) = t(\varphi) \rightarrow t(\theta).$$

(2) 对每一公式 $\varphi \in \text{Form}$, 我们称 $t(\varphi)$ 是 φ 的 **t-翻译**。⊥

说明: 易证 $t(\varphi \vee \psi) = t(\varphi) \vee t(\psi)$, $t(\varphi \rightarrow \psi) = t(\varphi) \rightarrow t(\psi)$, $t(\varphi \leftrightarrow \psi) = t(\varphi) \leftrightarrow t(\psi)$ 。

1.1.7 定义 令 **S** 和 **T** 是任意两个公理化系统。

我们称 **S** 能 **t-退化** 为 **T**, 当且仅当, **S** 的所有内定理的 **t-翻译** 都是 **T** 的内定理。⊥

1.1.8 定理 **AKC** 能 **t-退化** 为 **PC₀**。

证明: 据上述定义易证。⊥

1.1.9 定义 称系统 **S** 是**协调系统**, 当且仅当, 不存在 φ 使得 φ 和 $\neg\varphi$ 都是 **S** 的内定理。⊥

1.1.10 定理 **AKC** 是协调的。

证明: 假设 **AKC** 不协调, 则存在 φ 使得 φ 和 $\neg\varphi$ 都是 **AKC** 的内定理。再据上一定理, $t(\varphi)$ 和 $\neg t(\varphi)$ 都是 **PC₀** 的内定理, 矛盾于 **PC₀** 的协调性。⊥

因为 $\varphi\psi \geq \theta$ 的直观意义是“(主体 A) 根据目的 φ 和背景知识 ψ 能认知 θ ”, 所以这样的句子是模态句, 因此下面我们用有序邻域语义来解释它。

1.2.1 定义 任给集合 **X**, 我们用 $P(X)$ 表示 **X** 的幂集。

(1) 称 $\langle W, N \rangle$ 是**有序邻域框架**, 简称 **F** 是 **ON-框架**, 当且仅当, **W** 是非空的认知状态集, 且**邻域映射** **N** 是从 **W** 到 $P(P(W) \times P(W) \times P(W))$ 中的映射。

(2) 称 $\langle W, N, [] \rangle$ 是**有序邻域模型**, 简称 **M** 是 **ON-模型**, 当且仅当, $\langle W, N \rangle$ 是 **ON-框架** 且 $[]$ 是从全体句符到 $P(W)$ 中的映射。 $[]$ 也称为框架 $\langle W, N \rangle$ 上的指派映射。⊥

1.2.2 真值集定义 定义 φ 相对 **ON-模型** $\langle W, N, [] \rangle$ 的**真值集** $[\varphi]$ 如下: 对任意 $w \in W$,

(1) $w \in [\neg\varphi] \Leftrightarrow w \notin [\varphi]$, (2) $w \in [\varphi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\varphi] \text{ 且 } w \in [\psi]$,

(3) $w \in [\varphi\psi \geq \theta] \Leftrightarrow \langle [\varphi], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w)$ 。⊥

1.2.3 定义 称 **ON-框架** $F = \langle W, N \rangle$ 是以目的和背景知识为双条件的框架, 简称 **F** 是 **akc-框架**, 当且仅当, 下列**框架条件**成立: 对任意 $w \in W$ 和 $X, Y, Z, U, Z_1, Z_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq W$,

(ctr $\geq$) $\langle X, Y, Z \rangle \in N(w) \text{ 且 } \langle X, Z, U \rangle \in N(w) \Rightarrow \langle X, Y, U \rangle \in N(w)$,

(cc $\geq$) $\langle X, Y, Z_1 \rangle \in N(w) \text{ 且 } \langle X, Y, Z_2 \rangle \in N(w) \Rightarrow \langle X, Y, Z_1 \cap Z_2 \rangle \in N(w)$,

(ca $\geq$) $\langle X_1, Y, Z \rangle \in N(w) \text{ 且 } \langle X_2, Y, U \rangle \in N(w) \Rightarrow \langle X_1 \cup X_2, Y, Z \rangle \in N(w)$,

(cb $\geq$) $\langle X, Y_1, Z \rangle \in N(w) \text{ 且 } \langle X, Y_2, Z \rangle \in N(w) \Rightarrow \langle X, Y_1 \cup Y_2, Z \rangle \in N(w)$,

(cmp $\geq$) $\langle X, Y, Z \rangle \in N(w) \text{ 且 } w \in X \cap Y \Rightarrow w \in Z$,

(id $_{\perp T} \geq$) $\langle \emptyset, W, \emptyset \rangle \in N(w)$,

(rbm $\geq$) $Y \subseteq Y_0 \text{ 且 } \langle X, Y_0, Z \rangle \in N(w) \Rightarrow \langle X, Y, Z \rangle \in N(w)$,

(rcm $\geq$) $Z_0 \subseteq Z \text{ 且 } \langle X, Y, Z_0 \rangle \in N(w) \Rightarrow \langle X, Y, Z \rangle \in N(w)$ 。

所有的 **akc-框架** 的类记作 $\text{Frame}(\text{akc})$ 。⊥

1.2.4 有效性定义 令 $F = \langle W, N \rangle$ 是 **ON-框架**, $M = \langle W, N, [] \rangle$ 是 **ON-模型**。

(1) 称 φ 在 **M** 中**有效**, 记为 $M \models \varphi$, $\Leftrightarrow [\varphi] = W$; 否则称 φ 在 **M** 中**不有效**, 记为 $M \not\models \varphi$ 。

(2) 称 φ 在 **F** 中**有效**, 记为 $F \models \varphi$, $\Leftrightarrow$ 对 **F** 上的任意指派映射 $[]$, $[\varphi] = W$; 否则称 φ 在 **F** 中**不有效**, 记为 $F \not\models \varphi$ 。

(3) 称规则 $\varphi_1, \dots, \varphi_n / \theta$ 相对 **M** **保持有效性** $\Leftrightarrow$ 若 $[\varphi_1] = \dots = [\varphi_n] = W$, 则 $[\theta] = W$ 。⊥

1.2.5 引理 令 $\langle W, N, [] \rangle$ 是 **ON-模型**。则

(1) $[\neg\varphi] = W - [\varphi]$, $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$, $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$, $[\perp] = \emptyset$, $[T] = W$ 。

(2) $[\varphi] \cap [\varphi \rightarrow \psi] \subseteq [\psi]$ 。(3) $[\varphi \rightarrow \psi] = W \Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\psi]$ 。(4) $[\varphi \leftrightarrow \psi] = W \Leftrightarrow [\varphi] = [\psi]$ 。⊥

1.2.6 定义 令 **C** 是一个框架类。

称系统 **S** 相对 **C** 是**框架可靠系统** $\Leftrightarrow$ **S** 的内定理在 **C** 的所有框架中有效。

称系统 **S** 相对 **C** 是**框架完全系统** $\Leftrightarrow$ 在 **C** 的所有框架中有效的公式是 **S** 的内定理。⊥

1.2.7 框架可靠性定理 **AKC** 相对框架类 $\text{Frame}(\text{akc})$ 是可靠的。

证明: 任给 **akc-框架** $F = \langle W, N \rangle$ 和 **F** 上赋值 $[]$ 。

下面验证 **AKC** 的公理相对 $M = \langle F, [] \rangle$ 有效且 **AKC** 的推理规则相对 M 保持有效性。

验证公理 TA 和规则 MP: 显然。

验证公理 CTR_≥: 任给 $w \in [(\varphi\psi \geq \theta) \wedge (\varphi\theta \geq \xi)]$ 。则

$$\langle [\varphi], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w), \quad \langle [\varphi], [\theta], [\xi] \rangle \in N(w)。$$

再据 1.2.3 的(ctr_≥), $\langle [\varphi], [\psi], [\xi] \rangle \in N(w)$ 。再据真值集定义, $w \in [\varphi\psi \geq \xi]$ 。再据 1.2.5,

$$w \in [(\varphi\psi \geq \theta) \wedge (\varphi\theta \geq \xi) \rightarrow \varphi\psi \geq \xi]。$$

验证公理 CC_≥: 任给 $w \in [(\varphi\psi \geq \theta_1) \wedge (\varphi\psi \geq \theta_2)]$ 。则

$$\langle [\varphi], [\psi], [\theta_1] \rangle \in N(w), \quad \langle [\varphi], [\psi], [\theta_2] \rangle \in N(w)。$$

再据 1.2.3 的(cc_≥), $\langle [\varphi], [\psi], [\theta_1] \cap [\theta_2] \rangle \in N(w)$ 。再据 1.2.5, $\langle [\varphi], [\psi], [\theta_1 \wedge \theta_2] \rangle \in N(w)$ 。

所以 $w \in [\varphi\psi \geq \theta_1 \wedge \theta_2]$ 。

验证公理 CA_≥: 任给 $w \in [(\varphi_1\psi \geq \theta) \wedge (\varphi_2\psi \geq \theta)]$ 。则

$$\langle [\varphi_1], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w), \quad \langle [\varphi_2], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w)。$$

再据 1.2.3 的(ca_≥),

$$\langle [\varphi_1] \cup [\varphi_2], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w)。$$

再据 1.2.5, $\langle [\varphi_1 \vee \varphi_2], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w)$, 所以 $w \in [(\varphi_1 \vee \varphi_2)\psi \geq \theta]$ 。

验证公理 CB_≥: 任给 $w \in [(\varphi\psi_1 \geq \theta) \wedge (\varphi\psi_2 \geq \theta)]$ 。则

$$\langle [\varphi], [\psi_1], [\theta] \rangle \in N(w), \quad \langle [\varphi], [\psi_2], [\theta] \rangle \in N(w)。$$

再据 1.2.3 的(cb_≥),

$$\langle [\varphi], [\psi_1] \cup [\psi_2], [\theta] \rangle \in N(w)。$$

再据 1.2.5, $\langle [\varphi], [\psi_1 \vee \psi_2], [\theta] \rangle \in N(w)$, 所以 $w \in [(\varphi_1 \vee \varphi_2)\psi \geq \theta]$ 。

验证公理 CMP_≥: 任给 $w \in [(\varphi\psi \geq \theta) \wedge \varphi \wedge \psi]$ 。则

$$\langle [\varphi], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w), \quad w \in [\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]。$$

再据 1.2.3 的(cmp_≥), $w \in [\theta]$ 。所以 $w \in [(\varphi\psi \geq \theta) \wedge \varphi \wedge \psi \rightarrow \theta]$ 。

验证公理 ID_{⊥T}≥: 任给 $w \in W$, 据 1.2.3 的(id_{⊥T}≥), $\langle \emptyset, W, \emptyset \rangle \in N(w)$ 。再据 1.2.5, $w \in [\perp T \geq \perp]$ 。

验证规则 RAE_≥: 设 $[\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2] = W$ 。据 1.2.5 (4), $[\varphi_1] = [\varphi_2]$ 。任给 $w \in W$,

$$w \in [\varphi_1\psi \geq \theta] \Leftrightarrow \langle [\varphi_1], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w) \quad \text{据真值集定义}$$

$$\Leftrightarrow \langle [\varphi_2], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w) \quad \text{据} [\varphi_1] = [\varphi_2]$$

$$\Leftrightarrow w \in [\varphi_2\psi \geq \theta]。 \quad \text{据真值集定义}$$

因此据 w 的任意性, $[\varphi_1\psi \geq \theta] = [\varphi_2\psi \geq \theta]$, 再据 1.2.5 (4), $[\varphi_1\psi \geq \theta \leftrightarrow \varphi_2\psi \geq \theta] = W$ 。

验证规则 RBM_≥: 设 $[\psi \rightarrow \psi_0] = W$ 。据 1.2.5 (3), $[\psi] \subseteq [\psi_0]$ 。任给 $w \in W$,

$$w \in [\varphi\psi_0 \geq \theta] \Leftrightarrow \langle [\varphi], [\psi_0], [\theta] \rangle \in N(w) \quad \text{据真值集定义}$$

$$\Rightarrow \langle [\varphi], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w) \quad \text{据} [\psi] \subseteq [\psi_0] \text{ 和 1.2.3 的(rbm}_{\geq})$$

$$\Leftrightarrow w \in [\varphi\psi \geq \theta]。 \quad \text{据真值集定义}$$

因此据 w 的任意性, $[\varphi\psi_0 \geq \theta] \subseteq [\varphi\psi \geq \theta]$, 再据 1.2.5 (3), $[\varphi\psi_0 \geq \theta \rightarrow \varphi\psi \geq \theta] = W$ 。

验证规则 RCM_≥: 设 $[\theta_0 \rightarrow \theta] = W$ 。据 1.2.5 (3), $[\theta_0] \subseteq [\theta]$ 。任给 $w \in W$,

$$w \in [\varphi\psi \geq \theta_0] \Leftrightarrow \langle [\varphi], [\psi], [\theta_0] \rangle \in N(w) \quad \text{据真值集定义}$$

$$\Rightarrow \langle [\varphi], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w) \quad \text{据} [\theta_0] \subseteq [\theta] \text{ 和 1.2.3 的(rcm}_{\geq})$$

$$\Leftrightarrow w \in [\varphi\psi \geq \theta]。 \quad \text{据真值集定义}$$

因此据 w 的任意性, $[\varphi\psi \geq \theta_0] \subseteq [\varphi\psi \geq \theta]$, 再据 1.2.5 (3), $[\varphi\psi \geq \theta_0 \rightarrow \varphi\psi \geq \theta] = W$ 。┐

1.3.1 定义 令 w 是公式集。

(1) 称 w 是**一致集**, 当且仅当, 对所有有穷序列 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w$, $\not\models \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ 。

(2) 称 w 是**极大集**, 当且仅当, 对所有 $\varphi \in \text{Form}$, $\varphi \in w$ 或 $\neg\varphi \in w$ 。

(3) 称 w 是**极大一致集**, 当且仅当, w 既是一致的又是极大的。

(4) 称 **AKC** 是一致系统, 当且仅当, $\text{Th}(\text{AKC})$ 是一致的。┐

1.3.2 引理 **AKC** 是一致的。

证明: 假设 **AKC** 不一致。则 $\text{Th}(\text{AKC})$ 不一致, 所以存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Th}(\text{AKC})$ 使得

$$\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)。$$

另一方面, 因为 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Th}(\text{AKC})$, 所以易证 $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ 。据定义 1.1.9, **AKC** 不是协调的, 矛盾于 1.1.10。┐

因为 **AKC** 是 **PC** 的扩充, 所以如通常证明, 我们有下列结果。

1.3.3 引理 令 w 是极大一致集。

(1) $\neg\varphi \in w \Leftrightarrow \varphi \notin w$,

$$\varphi \wedge \psi \in w \Leftrightarrow \varphi \in w \text{ 且 } \psi \in w, \quad \varphi \vee \psi \in w \Leftrightarrow \varphi \in w \text{ 或 } \psi \in w,$$

$$\varphi \in w \text{ 且 } \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi \in w, \quad \varphi \in w \text{ 且 } \varphi \rightarrow \psi \in w \Rightarrow \psi \in w。$$

(2) $\text{Th}(\text{AKC}) \subseteq w$ 。

(3) 若 $\not\vdash \varphi$, 则存在极大一致集 u 使得 $\varphi \notin u$ 。┐

1.3.4 定义 $|\varphi| = \{w: w \text{ 是极大一致集使得 } \varphi \in w\}$ 。┐

1.3.5 引理 令 W 是所有极大一致集的集合。

(1) $|\neg\varphi| = W - |\varphi|$, $|\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi|$, $|\varphi \vee \psi| = |\varphi| \cup |\psi|$, $|\perp| = \emptyset$, $|T| = W$ 。

(2) $|\varphi| \cap |\varphi \rightarrow \psi| \subseteq |\psi|$ 。

(3) $|\varphi \rightarrow \psi| = W \Leftrightarrow |\varphi| \subseteq |\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$ 。

(4) $|\varphi \leftrightarrow \psi| = W \Leftrightarrow |\varphi| = |\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ 。

证明: 据上一引理易证。┐

1.3.6 定义 定义 **AKC** 的典范框架 $\langle W, N \rangle$ 如下: $W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}$, 且 N 是从 W 到 $P(P(W) \times P(W) \times P(W))$ 中的映射使得: 对任意 $w \in W$ 和公式 φ, ψ 和 θ ,

$$\langle |\varphi|, |\psi|, |\theta| \rangle \in N(w) \Leftrightarrow \varphi\psi \geq \theta \in w。$$

定义 **AKC** 的典范模型 $\langle W, N, [] \rangle$ 如下: $\langle W, N \rangle$ 是 **AKC** 的典范框架, 且

$$[p] = \{p\}, \quad \text{对每一原子公式 } p。┐$$

说明: 据引理 1.3.2, **AKC** 是一致的, 所以 W 非空。

1.3.7 典范模型基本定理 令 $\langle W, N, [] \rangle$ 是 **AKC** 的典范模型。任给 $w \in W$ 和公式 ξ ,

(1) $\xi \in w \Leftrightarrow w \in [\xi]$, (2) $[\xi] = [\xi]$ 。

证明: (2) 从 (1) 易得, 所以我们只须证 (1)。

施归纳于 ξ 的结构。原子公式的情况据上一定义。布尔联结词 $\neg$ 和 $\wedge$ 的情况如通常所证。

令 $\xi = \varphi\psi \geq \theta$ 。所以

$$\begin{aligned} w \in [\xi] &\Leftrightarrow w \in [\varphi\psi \geq \theta] \\ &\Leftrightarrow \langle [\varphi], [\psi], [\theta] \rangle \in N(w) && \text{据真值集定义} \\ &\Leftrightarrow \langle |\varphi|, |\psi|, |\theta| \rangle \in N(w) && \text{据归纳假设} \\ &\Leftrightarrow \varphi\psi \geq \theta \in w && \text{据 1.3.6} \\ &\Leftrightarrow \xi \in w。┐ \end{aligned}$$

1.3.8 定理 令 M 是 **AKC** 的典范模型。则

$$M \models \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi, \quad \text{对每一公式 } \varphi。$$

证明: 我们有

$$\begin{aligned} \vdash \varphi &\Leftrightarrow |\varphi| = W && \text{据 1.3.3 (2) - (3)} \\ &\Leftrightarrow [\varphi] = W && \text{据上一定理} \\ &\Leftrightarrow M \models \varphi。 && \text{据有效性定义 1.2.4 } \vdash \end{aligned}$$

1.3.9 定义 定义 **AKC** 的适当结构(proper structure) $\langle W, N, [] \rangle$ 如下:

(1) $W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}$;

(2) 对所有 $w \in W$, $N(w)$ 是下列集合

$\{ \langle |\varphi|, Y, Z \rangle : \text{存在 } \varphi\psi \geq \theta \in w \text{ 使得 } Y \subseteq |\psi| \text{ 且 } |\theta| \subseteq Z \} ;$

(3) $[p] = |p|$, 对每一句符 p 。

$\langle W, N \rangle$ 称为 **AKC** 的适当框架。⊥

1.3.10 引理 令 $M = \langle W, N, [] \rangle$ 是 **AKC** 的适当结构。则 M 是 **AKC** 的典范模型。

证明: 据定义 1.3.6, 只须证:

(1) $\langle |\varphi|, |\psi|, |\theta| \rangle \in N(w) \Leftrightarrow \varphi\psi \geq \theta \in w$, 对任意 $w \in W$ 和公式 φ, ψ 和 θ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $\varphi\psi \geq \theta \in w$ 。因为 $|\psi| \subseteq |\psi|$ 且 $|\theta| \subseteq |\theta|$, 所以据 $N(w)$ 的构造,

$\langle |\varphi|, |\psi|, |\theta| \rangle \in N(w)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $\langle |\varphi|, |\psi|, |\theta| \rangle \in N(w)$ 。因为等价类的代表元不是惟一的, 所以据 $N(w)$ 的构造,

(2) 存在 $\varphi_0\psi_0 \geq \theta_0 \in w$ 使得 $|\varphi_0| = |\varphi|$, $|\psi| \subseteq |\psi_0|$ 且 $|\theta_0| \subseteq |\theta|$ 。

据引理 1.3.5, $\vdash \varphi_0 \leftrightarrow \varphi$, $\vdash \psi \rightarrow \psi_0$ 且 $\vdash \theta_0 \rightarrow \theta$ 。据 $\vdash \varphi_0 \leftrightarrow \varphi$ 和 $RAE_{\geq}$,

$\vdash \varphi_0\psi_0 \geq \theta_0 \leftrightarrow \varphi\psi_0 \geq \theta_0$ 。

再据 $\vdash \psi \rightarrow \psi_0$ 和 $RBM_{\geq}$, $\vdash \varphi_0\psi_0 \geq \theta_0 \rightarrow \varphi\psi \geq \theta_0$ 。再据 $\vdash \theta_0 \rightarrow \theta$ 和 $RCM_{\geq}$,

$\vdash \varphi_0\psi_0 \geq \theta_0 \rightarrow \varphi\psi \geq \theta$ 。

因为 $\varphi_0\psi_0 \geq \theta_0 \in w$, 所以 $\varphi\psi \geq \theta \in w$ 。⊥

1.3.11 引理 **AKC** 的适当框架 F 是 **akc**-框架。

证明: 我们来验证 F 满足定义 1.2.3 给出的框架条件。

验证(ctr $_{\geq}$): 设 $\langle X, Y, Z \rangle \in N(w)$ 且 $\langle X, Z, U \rangle \in N(w)$ 。则

(1) 存在 $\varphi_1\psi_1 \geq \theta_1 \in w$ 使得 $|\varphi_1| = X$, $Y \subseteq |\psi_1|$ 且 $|\theta_1| \subseteq Z$, 且

(2) 存在 $\varphi_2\psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_2| = X$, $Z \subseteq |\psi_2|$ 且 $|\theta_2| \subseteq U$ 。

因为 $|\varphi_1| = |\varphi_2|$, 所以 $\vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, 因此据 (1) 的 $\varphi_1\psi_1 \geq \theta_1 \in w$ 和 $RAE_{\geq}$, 有 $\varphi_2\psi_1 \geq \theta_1 \in w$ 。因为 $|\theta_1| \subseteq |\psi_2|$, 所以 $\vdash \theta_1 \rightarrow \psi_2$, 再据 $RCM_{\geq}$, $\varphi_2\psi_1 \geq \psi_2 \in w$, 再据 (2) 的 $\varphi_2\psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 和公理 $CTR_{\geq}$, 易得

(3) 存在 $\varphi_2\psi_1 \geq \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_2| = X$, $Y \subseteq |\psi_1|$ 且 $|\theta_2| \subseteq U$ 。

所以 $\langle X, Y, U \rangle \in N(w)$ 。

验证(cc $_{\geq}$): 设 $\langle X, Y, Z_1 \rangle \in N(w)$ 且 $\langle X, Y, Z_2 \rangle \in N(w)$ 。则

(1) 存在 $\varphi_1\psi_1 \geq \theta_1 \in w$ 使得 $|\varphi_1| = X$, $Y \subseteq |\psi_1|$ 且 $|\theta_1| \subseteq Z_1$, 且

(2) 存在 $\varphi_2\psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_2| = X$, $Y \subseteq |\psi_2|$ 且 $|\theta_2| \subseteq Z_2$ 。

因为 $\vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \rightarrow \psi_1$ 且 $\vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \rightarrow \psi_2$, 所以据 $\varphi_1\psi_1 \geq \theta_1 \in w$, $\varphi_2\psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 和 $RBM_{\geq}$,

(3) $\varphi_1(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_1 \in w$, $\varphi_2(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_2 \in w$ 。

因为 $|\varphi_1| = |\varphi_2|$, 所以据 (3) 的后者和 $RAE_{\geq}$, 有 $\varphi_1(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_2 \in w$ 。再据 (3) 的前者和公理 $CC_{\geq}$, 易得

(4) 存在 $\varphi_1(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_1 \wedge \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_1| = X$, $Y \subseteq |\psi_1 \wedge \psi_2|$ 且 $|\theta_1 \wedge \theta_2| \subseteq Z_1 \cap Z_2$ 。

所以 $\langle X, Y, Z_1 \cap Z_2 \rangle \in N(w)$ 。

验证(ca $_{\geq}$): 设 $\langle X_1, Y, Z \rangle \in N(w)$ 且 $\langle X_2, Y, Z \rangle \in N(w)$ 。则

(1) 存在 $\varphi_1\psi_1 \geq \theta_1 \in w$ 使得 $|\varphi_1| = X_1$, $Y \subseteq |\psi_1|$ 且 $|\theta_1| \subseteq Z$, 且

(2) 存在 $\varphi_2\psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_2| = X_2$, $Y \subseteq |\psi_2|$ 且 $|\theta_2| \subseteq Z$ 。

因为 $\vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \rightarrow \psi_1$ 且 $\vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \rightarrow \psi_2$, 所以据 $\varphi_1\psi_1 \geq \theta_1 \in w$, $\varphi_2\psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 和 $RBM_{\geq}$,

(3) $\varphi_1(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_1 \in w$, $\varphi_2(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_2 \in w$ 。

因为 $\vdash \theta_1 \rightarrow \theta_1 \vee \theta_2$ 且 $\vdash \theta_2 \rightarrow \theta_1 \vee \theta_2$, 所以据 (3) 和 $RCM_{\geq}$,

$\varphi_1(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w$, $\varphi_2(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w$ 。

再据公理 $CA_{\geq}$, 易得

(4) 存在 $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(\psi_1 \wedge \psi_2) \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_1 \vee \varphi_2| = X_1 \cup X_2$, $Y \subseteq |\psi_1 \wedge \psi_2|$ 且 $|\theta_1 \vee \theta_2| \subseteq Z$ 。

所以 $\langle X_1 \cup X_2, Y, Z \rangle \in N(w)$ 。

验证(cb_≥): 设 $\langle X, Y_1, Z \rangle \in N(w)$ 且 $\langle X, Y_2, Z \rangle \in N(w)$ 。则

(1) 存在 $\varphi_1 \psi_1 \geq \theta_1 \in w$ 使得 $|\varphi_1| = X$, $Y_1 \subseteq |\psi_1|$ 且 $|\theta_1| \subseteq Z$, 且

(2) 存在 $\varphi_2 \psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_2| = X$, $Y_2 \subseteq |\psi_2|$ 且 $|\theta_2| \subseteq Z$ 。

因为 $\vdash \theta_1 \rightarrow \theta_1 \vee \theta_2$ 且 $\vdash \theta_2 \rightarrow \theta_1 \vee \theta_2$, 所以据 $\varphi_1 \psi_1 \geq \theta_1 \in w$, $\varphi_2 \psi_2 \geq \theta_2 \in w$ 和 $RCM_{\geq}$,

$$\varphi_1 \psi_1 \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w, \quad \varphi_2 \psi_2 \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w。$$

因为 $|\varphi_1| = |\varphi_2|$, 所以据 $RAE_{\geq}$,

$$\varphi_2 \psi_1 \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w, \quad \varphi_2 \psi_2 \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w。$$

再据公理 $CB_{\geq}$, 易得

(3) 存在 $\varphi_2(\psi_1 \vee \psi_2) \geq \theta_1 \vee \theta_2 \in w$ 使得 $|\varphi_2| = X$, $Y_1 \cup Y_2 \subseteq |\psi_1 \vee \psi_2|$ 且 $|\theta_1 \vee \theta_2| \subseteq Z$ 。

所以 $\langle X, Y_1 \cup Y_2, Z \rangle \in N(w)$ 。

验证(cmp_≥): 设 $\langle X, Y, Z \rangle \in N(w)$ 且 $w \in X \cap Y$ 。据前者,

(1) 存在 $\varphi \psi \geq \theta \in w$ 使得 $|\varphi| = X$, $Y \subseteq |\psi|$ 且 $|\theta| \subseteq Z$ 。

据 $\varphi \psi \geq \theta \in w$ 和公理 $CMP_{\geq}$, 有 $\varphi \wedge \psi \rightarrow \theta \in w$, 再据 1.3.3,

(2) $\varphi \wedge \psi \in w \Rightarrow \theta \in w$ 。

所以

(3) $w \in |\varphi \wedge \psi| \Rightarrow w \in |\theta|$ 。

因为 $|\varphi| = X$, $Y \subseteq |\psi|$, 所以 $X \cap Y \subseteq |\varphi| \cap |\psi| = |\varphi \wedge \psi|$ 。据设定, $w \in X \cap Y$, 所以 $w \in |\varphi \wedge \psi|$ 。据 (3), $w \in |\theta|$ 。因为 $|\theta| \subseteq Z$, 所以 $w \in Z$ 。

验证(id_{⊥T}_≥): 任给 $w \in W$ 。据公理 $ID_{\perp T_{\geq}}$, $\perp T \geq \perp \in w$, 再据 1.3.10 的证明中的 (1),

$$\langle \perp, |T|, |\perp| \rangle \in N(w)。$$

再据引理 1.3.5, $\langle \emptyset, W, \emptyset \rangle \in N(w)$ 。

验证(rbm_≥): 设 $Y \subseteq Y_0$ 且 $\langle X, Y_0, Z \rangle \in N(w)$ 。据后者,

(1) 存在 $\varphi \psi \geq \theta \in w$ 使得 $|\varphi| = X$, $Y_0 \subseteq |\psi|$ 且 $|\theta| \subseteq Z$ 。

因为 $Y \subseteq Y_0$, 所以易得

(2) 存在 $\varphi \psi \geq \theta \in w$ 使得 $|\varphi| = X$, $Y \subseteq |\psi|$ 且 $|\theta| \subseteq Z$ 。

所以 $\langle X, Y, Z \rangle \in N(w)$ 。

验证(rcm_≥): 设 $Z_0 \subseteq Z$ 且 $\langle X, Y, Z_0 \rangle \in N(w)$ 。据后者,

(1) 存在 $\varphi \psi \geq \theta \in w$ 使得 $|\varphi| = X$, $Y \subseteq |\psi|$ 且 $|\theta| \subseteq Z_0$ 。

因为 $Z_0 \subseteq Z$, 所以易得

(2) 存在 $\varphi \psi \geq \theta \in w$ 使得 $|\varphi| = X$, $Y \subseteq |\psi|$ 且 $|\theta| \subseteq Z$ 。

所以 $\langle X, Y, Z \rangle \in N(w)$ 。⊥

1.3.12 框架完全性定理 **AKC** 相对 $\text{Frame}(\text{akc})$ 是完全的。

证明: 只须证:

(%) 若 φ 不是 **AKC** 的内定理, 则 φ 在某个 **akc**-框架中不有效。

设 φ 不是 **AKC** 的内定理。令 $M = \langle W, N, [] \rangle$ 是 **AKC** 的适当结构。则 $F = \langle W, N \rangle$ 是 **AKC** 的适当框架。据引理 1.3.10, M 是 **AKC** 的典范模型。据设定和定理 1.3.8, $M \models \varphi$, 所以 $F \models \varphi$ 。再据上一引理, F 是 **akc**-框架, 所以有要证结果。⊥

结束语:

我们在定义 1.1.3 后面的说明 (3) 指出, **AKC** 有内定理

(%) $\varphi \psi \geq \theta \rightarrow \varphi(\psi \wedge \neg \psi) \geq \theta$ 。

但这个公式看起来并不自然, 所以我们下一步要做的工作是要建立一个弱于 **AKC** 的逻辑 **WAKC** 以避免 (%) 是内定理。

二、主体间能力之比较

上节提到的不少定义和结果对全文通用，所以不再专门给出。

本节我们从认知和活动两个方面（分别）比较两个主体的能力。

1、在认知能力方面之比较

2.1.1 定义 本文我们用 Agent 表示有穷多个主体的集合。归纳定义：

$$\varphi ::= p \mid A \geq B \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_A \varphi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, A, B \in \text{Agent}.$$

句符、形如 $A \geq B$ 的公式称为**原子公式**，其余的公式称为**复合公式**。

所有形如 $A \geq B$ 的公式的集合记为 CA 。⊥

说明： $K_A \varphi$ 的直观意义如通常规定：“A 知道 φ ”。 $A \geq B$ 的直观意义是：“A 在认知能力方面不弱于 B”，这是我们要研究的核心思想。

2.1.2 缩写与规定 缩写定义 $\langle K_A \rangle \varphi ::= \neg K_A \neg \varphi$, $A \equiv B ::= A \geq B \wedge B \geq A$ 。

我们规定**联结符的结合力**从左到右依次减弱： $\geq$, $\neg$, K_A , $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ 。⊥

2.1.3 定义 (1) **S5-型认知系统 ES5** 定义如下：对 $\varphi, \psi \in \text{Form}$, $A \in \text{Agent}$,

TA 和 MP 如前规定，

$$(K_A) \quad K_A(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow K_A \varphi \rightarrow K_A \psi,$$

$$(T_A) \quad K_A \varphi \rightarrow \varphi, \quad (\text{知识公理})$$

$$(5_A) \quad \neg K_A \varphi \rightarrow K_A \neg K_A \varphi, \quad (\text{负反思公理})$$

$$(RN_A) \quad \varphi / K_A \varphi.$$

从上述系统中删去 5_A 得到的系统称为 **T-型认知系统**，记作 **EST**。再从 **EST** 删去 T_A 得到的系统称为 **K-型认知系统**，记作 **ESK**。

(2) **比较主体间认知能力的系统 CEA1** 定义如下：在 **ES5** 上增加下列公理和规则：

$$(C_{AB}) \quad A \geq B \rightarrow K_B \varphi \rightarrow K_A \varphi, \quad \text{对所有 } \varphi \in \text{Form};$$

$$(RIG_{AB}) \quad \{K_B \varphi \rightarrow K_A \varphi : \varphi \in \text{Form}\} / A \geq B.$$

(3) 称 φ 是 **CEA1** 的内定理，当且仅当，存在可数公式序列 $\langle \varphi_\rho : \rho \leq \sigma \rangle$ 使得 σ 是某个自然数或可数无穷基数 $\aleph_0$ 使得对每一 $\rho \leq \sigma$, φ_ρ 是 **CEA1** 的公理或从 φ_ρ 更前面的公式据 **CEA1** 的推理规则推出，且 $\varphi = \varphi_\sigma$ 。⊥

说明：**CEA1** 是一种半无穷系统。这里所谓**半无穷系统**是指该系统的公理（模式）都是有穷长的，但有**无穷（推理）规则**；这样的规则允许从可数无穷多个前提推出一个结论。

C_{AB} 称为**比较公理**，它的直观意义比较自然。既然 A 在认知能力方面不弱于 B，那么 A 知道 B 知道的东西。这里之所以用“不弱于”而不用“强于”是因为 B 可以是 A。

C_{AB} 也称为 **CEA1** 的**代表公理**或**核心公理**或**主公理**或**解析公理**。后者的意思是：此公理解析了核心公式直观表示的思想。

RIG_{AB} 称为**无穷概括规则**或**无穷归纳规则**：从无穷多个公式中概括或归纳出核心公式直观表示的思想。此规则多少有些不自然，因为它要求主体具有无穷概括或归纳的能力，这对主体的智能是一个很高的要求。

这种用无穷推理规则从另一个方向揭示核心公式 ($A \geq B$) 的方法称为**半无穷方法**。

2.1.4 引理 下面是 **CEA1** 的导出规则和内定理：

$$(1) \quad \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi / K_A \varphi_1 \wedge \dots \wedge K_A \varphi_n \rightarrow K_A \varphi,$$

$$(2) \quad A \geq B / \{K_B \varphi \rightarrow K_A \varphi : \varphi \in \text{Form}\}, \quad ①$$

$$(3) \quad A \geq A,$$

$$(4) \quad A \geq B, B \geq C / A \geq C,$$

$$(5) \quad A \equiv B \rightarrow (K_B \varphi \leftrightarrow K_A \varphi).$$

证明：据 RN_A 和 K_A 易得 (1)。据 C_{AB} 易得 (2)。据 RIG_{AB} 易得 (3)。据 (2) 和 RIG_{AB}

① (2) 表示从 $A \geq B$ 能得到结论集 $\{K_B \varphi \rightarrow K_A \varphi : \varphi \in \text{Form}\}$ 。这是一种不太合法的缩写。

易得 (4)。据 C_{AB} 易得 (5)。⊥

2.1.5 定义 定义从 Form 到不含 K_A 和 $A \geq B$ 的子语言 $\text{Form}_0 \subseteq \text{Form}$ 的翻译映射 t 如下:

$$t(p) = p, \quad t(A \geq B) = t(T); \quad t(\neg\phi) = \neg t(\phi); \quad t(\phi \wedge \psi) = t(\phi) \wedge t(\psi); \quad t(K_A \phi) = t(\phi). \quad \perp$$

如前定义 t -翻译、 t -退化和协调概念, 易证:

2.1.6 定理 CEA1 是协调的。⊥

2.1.7 定义 称 $F = \langle W, R \rangle$ 是 (认知) 框架, 记作 $F \in \text{Frame}(\text{ek})$, 当且仅当, W 是非空认知状态集, R 是 Agent 上的映射使得: 对每一 $A \in \text{Agent}$, R_A 是 W 上的二元通达关系。^①

令 $\text{Frame}(\text{et})$ 是 $\text{Frame}(\text{ek})$ 中所有满足下列框架条件的框架构成的类: 对所有 $w \in W$,

$$(t_A) \quad w R_A w. \quad (\text{自返})$$

令 $\text{Frame}(\text{es5})$ 是 $\text{Frame}(\text{et})$ 中所有满足下列框架条件的框架构成的类: 对所有 $w, u, v \in W$,

$$(e_A) \quad w R_A u \text{ 且 } w R_A v \Rightarrow u R_A v. \quad (\text{欧性})$$

称 $\langle W, R, [\] \rangle$ 是模型, 当且仅当, $\langle W, R \rangle \in \text{Frame}(\text{ek})$ 且 $[\]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。⊥

说明: 对 $\text{Frame}(\text{es5})$ 中框架的通达关系 R_A , $w R_A u$ 表示 A 在认知上无法分辨 w 和 u , 即 A 根据它在 w 中掌握的信息认为 u 是可能的 (参见 [3] 第 18 页), 即它在认知上无法分辨 u 和 w 有不同之处。易证这样的 R_A 是等价关系。

2.1.8 定义 令 $\langle W, R \rangle$ 是框架。任给 $w \in W$, $R_A(w) ::= \{u \in W : w R_A u\}$ 。⊥

说明: $R_A(w)$ 直观表示: 相对 w , A 无法分辨的所有可能世界的集合。

2.1.9 真值集定义 定义 ϕ 相对模型 $\langle W, R, [\] \rangle$ 的真值集 $[\phi]$ 如下: 对所有 $w \in W$,

$$(1) \quad w \in [\neg\phi] \Leftrightarrow w \notin [\phi], \quad (2) \quad w \in [\phi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\psi], \\ (3) \quad w \in [K_A \phi] \Leftrightarrow R_A(w) \subseteq [\phi], \quad (4) \quad w \in [A \geq B] \Leftrightarrow \forall \phi \in \text{Form} (w \in [K_B \phi \rightarrow K_A \phi]). \quad \perp$$

说明: 本文以后 $[\neg\phi]$, $[\phi \wedge \psi]$ 和 $[K_A \phi]$ 总如上定义, 故不再提。

2.1.10 框架可靠性定理 CEA1 相对 $\text{Frame}(\text{es5})$ 可靠。

证明: 任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上的赋值 $[\]$ 。

T_A , K_A , MP 和 RN_A 的验证如通常。据框架条件 (t_A) , (e_A) 和真值集定义容易验证 T_A 和 5_A 。据真值集定义 (4) 容易验证 C_{AB} 和 RIG_{AB} 。⊥

说明: 我们认为根据 [7] 给出的方法可以证明 CEA1 相对 $\text{Frame}(\text{es5})$ 完全。

我们也可以根据 [8] 给出的方法来证明完全性定理。这时我们可以把 $A \geq B$ 看作是可数无穷个公式的合取的缩写:

$$A \geq B ::= \bigwedge \{K_B \phi \rightarrow K_A \phi : \phi \in \text{Form}\}.$$

令 CEA2 是从 CEA1 中删去 RIG_{AB} 得到的系统 (即 CEA2 是在 ES5 上增加 C_{AB} 得到的系统)。^② 下面我们采用 [2] 使用过的拟赋值方法来证明 CEA2 相对 $\text{Frame}(\text{es5})$ 可靠且完全。

2.1.11 拟赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $[\] : \text{Form} \rightarrow P(W)$ 是映射。

称 $[\]$ 为 F 上的拟赋值, 当且仅当, 对每一复合公式 ϕ , $[\phi]$ 满足 2.1.9 的 (1) — (3)。⊥

2.1.12 拟赋值惟一存在定理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $f : \text{At} \rightarrow P(W)$ 和 $g : CA \rightarrow P(W)$ 是两个映射。则 F 上存在唯一的拟赋值 $[\]$ 满足下列条件:

$$(1) \quad [p] = f(p), \quad \text{对每一 } p \in \text{At}; \\ (2) \quad [A \geq B] = g(A \geq B), \quad \text{对每一 } A \geq B \in CA.$$

证明: 递归定义

$$[p] = f(p), \quad \text{对每一 } p \in \text{At}; \\ [A \geq B] = g(A \geq B), \quad \text{对每一 } A \geq B \in CA; \\ [\neg\phi] = W - [\phi]; \quad [\phi \wedge \psi] = [\phi] \cap [\psi]; \quad [K_A \phi] = \{w : R_A(w) \subseteq [\phi]\}.$$

^① 上述每一 R_A 是 $R(A)$ 的缩写。

^② 这时内定理的定义如通常: 有穷长的形式证明的最后一项。

易见 $[]$ 是惟一满足上述条件(1) — (2)的拟赋值。 $\dashv$

2.1.13 赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $[]$ 是 F 上的拟赋值。

(1) 称 $[]$ 是 F 上的**赋值**, 当且仅当, $[]$ 还满足下列条件:

(#) $[A \geq B] \subseteq [K_B \phi \rightarrow K_A \phi], \quad \forall \phi \in \text{Form}.$

(2) 称 $\langle F, [] \rangle$ 是**模型**, 当且仅当, $[]$ 是 F 上的赋值。 $\dashv$

2.1.14 赋值存在定理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 令 $f: \text{At} \rightarrow P(W)$ 。则存在 F 上赋值 $[]$ 使得
 $[p] = f(p), \quad \text{对每一 } p \in \text{At}.$

证明: 令 $g: CA \rightarrow P(W)$ 使得

$g(A \geq B) = \{w: R_A(w) \subseteq R_B(w)\}, \quad \text{对每一 } A \geq B \in CA.$

据拟赋值惟一存在定理, F 上存在唯一的拟赋值 $[]$, 满足下列条件:

(1) $[p] = f(p), \quad \text{对每一 } p \in \text{At};$

(2) $[A \geq B] = g(A \geq B), \quad \text{对每一 } A \geq B \in CA.$

下证 $[]$ 是赋值, 即证上一定义的(#)成立: 任给 $w \in [A \geq B]$, 据(2), $w \in g(A \geq B)$, 再据 g 的定义, 有 $R_A(w) \subseteq R_B(w)$ 。由此易证

$w \in [K_B \phi \rightarrow K_A \phi], \quad \forall \phi \in \text{Form}. \dashv$

$R_A(w) \subseteq R_B(w)$ 说明: 相对 w , A 在认知上无法分辨的可能世界不多于 B 在认知上无法分辨的可能世界, 因此 A 在认知能力方面不弱于 B 。

2.1.15 框架可靠性定理 **CEA2** 相对 $\text{Frame}(\text{es5})$ 可靠。

证明: 任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[]$ 。

验证公理 C_{AB} : 任给 $\phi \in \text{Form}$, 据拟赋值定义(#), 易证 $[A \geq B \rightarrow K_B \phi \rightarrow K_A \phi] = W$ 。

CEA2 的其余公理和规则的验证如 2.1.10。 $\dashv$

2.1.16 定义 令 w 是公式集。 $w^{-K_A} ::= \{\phi: K_A \phi \in w\}.$ $\dashv$

2.1.17 定义 定义 **CEA2** 的**典范框架** $F = \langle W, R \rangle$ 如下:

(1) $W = \{w: w \text{ 是 CEA2-极大一致集}\},$

(2) $R = \{R_A: A \in \text{Agent}\}$ 使得每一 $R_A = \{\langle w, u \rangle \in W^2: w^{-K_A} \subseteq u\}.$ $\dashv$

2.1.18 典范框架主引理 令 $\langle W, R \rangle$ 是 **CEA2** 的典范框架, 令 $w \in W$ 。则

$K_A \phi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_A u \Rightarrow \phi \in u).$

证明: 参见 [2] 的 3.14 的证明。 $\dashv$

2.1.19 定义 (1) $|\phi| ::= \{w: w \text{ 是 CEA2-极大一致集使得 } \phi \in w\}.$

(2) 称 $[]$ 为**典范赋值**, 当且仅当, $[]$ 是从 Form 到 $P(W)$ 中的映射使得 $[\phi] = |\phi|.$ $\dashv$

2.1.20 定理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是 **CEA2** 的典范框架, 令 $[]$ 是典范赋值。则 $[]$ 是 F 上的赋值。

证明: 先证 $[]$ 是拟赋值。首先, 据 $[]$ 的定义, 易证

(1) $[\neg \phi] = |\neg \phi| = W - |\phi| = W - [\phi].$

(2) $[\phi \wedge \psi] = |\phi \wedge \psi| = |\phi| \cap |\psi| = [\phi] \cap [\psi].$

此外我们还有

(3) $w \in [K_A \phi] \Leftrightarrow w \in |K_A \phi|$

据 $[]$ 的定义

$\Leftrightarrow K_A \phi \in w$

据 2.1.19

$\Leftrightarrow \forall u \in W (w R_A u \Rightarrow u \in |\phi|)$

据典范框架主引理

$\Leftrightarrow \forall u \in W (w R_A u \Rightarrow u \in [\phi])$

据 $[]$ 的定义

$\Leftrightarrow R_A(w) \subseteq [\phi].$

最后我们来证 $[]$ 是赋值。据公理 C_{AB} , 有

$\vdash A \geq B \rightarrow K_B \phi \rightarrow K_A \phi, \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form}.$

由此易证

$[A \geq B] \subseteq [K_B \phi \rightarrow K_A \phi], \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form}.$

再据[]的定义, 有

$$[A \geq B] \subseteq [K_B \phi \rightarrow K_A \phi], \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form}。 \perp$$

2.1.21 定义 称 $\langle W, R, [] \rangle$ 是 **CEA2** 的典范模型, 当且仅当, $\langle W, R \rangle$ 是 **CEA2** 的典范框架, 且[]是典范赋值。 $\perp$

2.1.22 完全性定理 **CEA2** 相对 $\text{Frame}(\text{es5})$ 完全。

证明: 我们只须证:

(%) 若 $\not\models \phi$, 则存在框架 $F \in \text{Frame}(\text{es5})$ 使得 $F \not\models \phi$ 。

令 $M = \langle W, R, [] \rangle$ 是 **CEA2** 的典范模型。设 $\not\models \phi$ 。如通常易证, 存在 **CEA2**-极大一致集 u 使得 $\phi \notin u$, 故 $u \notin |\phi|$, 故 $|\phi| \neq W$ 。因为 $[\phi] = |\phi|$, 故 $[\phi] \neq W$, 所以 $M \not\models \phi$, 故 $\langle W, R \rangle \not\models \phi$ 。

如前易证 $\langle W, R \rangle \in \text{Frame}(\text{es5})$ 。 $\perp$

说明: 若我们用下列公理

$$(D_{AB}) \quad A \geq B \vee K_B A \geq B$$

替换 RIG_{AB} , 且用

$$w \in [A \geq B] \Leftrightarrow R_A(w) \subseteq R_B(w)$$

替换 2.1.9 (4), 则我们可以如 [1] 那样证明框架可靠性定理和框架完全性定理 (特别是后者)。但据 D_{AB} 和 T_A 能得内定理 $A \geq B$ 。这当然是我们不想要的。下面我们引入一个较自然的系统。

令 **CEA3** 是在 **ES5** 上增加核心公理 C_{AB} 和下列公理得到的系统:

$$(E_{AB}) \quad \langle K_A \rangle K_B A \geq B。$$

E_{AB} 的直观意义要比 D_{AB} 自然些。从形式上看也弱些, 即从 D_{AB} , RN_A 和 T_A 能推出 E_{AB} 。^①

令 $\text{Frame}(\text{cea3})$ 是由 $\text{Frame}(\text{es5})$ 中所有满足下列框架条件的框架构成的类 (参见 2.1.7):

$$(e_{AB}) \quad \exists u \in W (w R_A u \text{ 且 } \forall v \in W (u R_B v \Rightarrow R_A(v) \subseteq R_B(v)))。$$

我们把 2.1.9 (4) 替换为 $w \in [A \geq B] \Leftrightarrow R_A(w) \subseteq R_B(w)$ 。

2.1.23 框架可靠性定理 **CEA3** 相对 $\text{Frame}(\text{cea3})$ 可靠。

证明: 任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值[]。

验证 C_{AB} : 任给 $w \in W$ 使得 $w \in [A \geq B]$ 。据真值集定义 (4), 有 $R_A(w) \subseteq R_B(w)$ 。任给 ϕ , 易证 $w \in [K_B \phi \rightarrow K_A \phi]$ 。

验证 E_{AB} : 据框架条件 (e_{AB}) 和真值集定义易证。

其余公理和规则的验证如通常。 $\perp$

2.1.24 框架完全性定理 **CEA3** 相对 $\text{Frame}(\text{cea3})$ 完全。

证明: 定义 **CEA3** 的典范框架如 2.1.17。

框架完全性的证明中有许多部分都是类似的, 所以这里略去不提。笔者认为惟一不平凡之处就是证明下面的主引理:

典范框架主引理 $A \geq B \in w \Leftrightarrow R_A(w) \subseteq R_B(w)$ 。

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $A \geq B \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $w R_A u$ 。则

$$\textcircled{1} \quad w^{-K_A} \subseteq u。$$

要证 $w R_B u$, 即要证: $w^{-K_B} \subseteq u$ 。任给 $\phi \in w^{-K_B}$, 则 $K_B \phi \in w$, 再据设定 $A \geq B \in w$ 和公理 C_{AB} , 有 $K_A \phi \in w$, 再据 $\textcircled{1}$, 有 $\phi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $A \geq B \notin w$ 。要证:

$$\textcircled{2} \quad \text{存在 } u \in W \text{ 使得: (a) } w^{-K_A} \subseteq u, \text{ 且 (b) } w^{-K_B} \not\subseteq u。$$

先证(a): 假设 $w^{-K_A} \cup \{K_B A \geq B\}$ 不一致, 则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-K_A}$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \neg K_B A \geq B。$$

^① 严格说, 据规则 RN_B 。

再据 K_A 和 RN_A (也即据 2.1.4 (1)) 易得

$$\vdash K_A\phi_1 \wedge \dots \wedge K_A\phi_n \rightarrow K_A \neg K_B A \geq B.$$

因为 $K_A\phi_1, \dots, K_A\phi_n \in w$, 所以 $K_A \neg K_B A \geq B \in w$, 矛盾 E_{AB} 属于 w , 因此 $w^{-K_A} \cup \{K_B A \geq B\}$ 一致, 据 Lindenbaum-引理, ^①存在 $u \in W$ 使得

$$\textcircled{3} \quad w^{-K_A} \subseteq u \text{ 且 } \neg K_B A \geq B \notin u.$$

因此上述(a)成立。

最后证(b)成立: 据设定, 有 $\neg A \geq B \in w$, 再据公理 T_A , 有 $\neg K_B A \geq B \in w$, 再据公理 5_A , 有 $K_B \neg K_B A \geq B \in w$, 所以 $\neg K_B A \geq B \in w^{-K_B}$. 再据 $\textcircled{3}$, 易见(b)成立。

这样我们证明了主引理。据主引理, 如通常易证典范模型基本定理。

另一方面, 据主引理和公理 E_{AB} , 易证(e_{AB})成立。

据这两个结果, 如 2.1.22, 我们不难证明框架完全性定理。 $\dashv$

说明: 从上述证明看, 我们甚至可以用更弱的 $A \geq B \vee \langle K_A \rangle K_B A \geq B$ 代替公理 E_{AB} 。但这里我们还是用 E_{AB} 构造系统, 因为 E_{AB} 的直观意义比较自然。

从上述证明还能看到, 我们可以把 **CEA3** 减弱为系统 **CEA3***: **ESK** 加 C_{AB} 和 E_{AB} 以及下列公理:

$$(B_A) \quad \phi \rightarrow K_A \langle K_A \rangle \phi. \quad (\text{对应的框架条件调整为对称性: } wR_A u \Rightarrow uR_A w.)$$

更弱一些, 我们只需要如下极小系统 **CEA3₀**: **ESK** 加 C_{AB} 和 E_{AB} 以及下列公理:

$$(WB_A) \quad \neg A \geq B \rightarrow K_B \langle K_B \rangle \neg A \geq B, \quad \text{对所有 } A, B \in \text{Agent}. \textcircled{2}$$

以上我们构造 **CEA3**—**CEA3₀** 所采用的方法是用核心公式生成的常公式对代表公理进行代入的方法, 简称自代入方法。这里的核心公式是指 $A \geq B$ 。 $A \geq B$ 生成的常公式是指用 $A \geq B$ 通过 $\neg$, $\wedge$ 和 K_A 构造起来的公式。这样的公式称为自代入公式。虽然 C_{AB} 相对当下语义是有效式, 但在证明框架完全性定理时, 还需要它的一个逆公式作为公理:

$$(1) \quad (K_B \phi_0 \rightarrow K_A \phi_0) \rightarrow A \geq B, \quad \text{存在 } \phi_0 \in \text{Form}.$$

而(1)等价

$$(2) \quad \neg A \geq B \rightarrow K_B \phi_0 \wedge \neg K_A \phi_0, \quad \text{存在 } \phi_0 \in \text{Form}.$$

此公理等价下面两个公理:

$$\textcircled{1} \quad \neg A \geq B \rightarrow K_B \phi_0, \quad \text{和}$$

$$\textcircled{2} \quad \neg A \geq B \rightarrow \neg K_A \phi_0.$$

考虑 $\langle K_B \rangle \neg A \geq B$ 。易见它是 $A \geq B$ 生成的常公式。用此自代入公式代入 $\textcircled{1}$ 和 $\textcircled{2}$ 的 ϕ_0 , 有

$$\textcircled{1}^* \quad \neg A \geq B \rightarrow K_B \langle K_B \rangle \neg A \geq B, \quad \text{和}$$

$$\textcircled{2}^* \quad \neg A \geq B \rightarrow \neg K_A \langle K_B \rangle \neg A \geq B.$$

易见 $\textcircled{1}^*$ 就是 WB_A , 而 E_{AB} 蕴涵 $\textcircled{2}^*$ 。 $A \geq B$ 生成的常公式 $\textcircled{1}^*$ 和 $\textcircled{2}^*$ 以后也称为代表公理 C_{AB} 的自代入公理或辅公理。根据情况省略 $\textcircled{1}^*$ 和 $\textcircled{2}^*$ 的某个前件也称自代入公理。

用自代入方法构造起来的系统称为自代入系统。**CEA3**—**CEA3₀** 就是自代入系统。如前所见, 自代入系统可以有相应的变种。或者说, 自代入系统不是惟一的。

本文以后我们常用自代入方法。

可以证明 $\textcircled{1}^*$ 和 $\textcircled{2}^*$ 相对当下系统等价

$$\textcircled{3} \quad (K_B \langle K_B \rangle \neg A \geq B \rightarrow K_A \langle K_B \rangle \neg A \geq B) \rightarrow A \geq B.$$

因此我们有内定理

$$A \geq B \leftrightarrow (K_B \langle K_B \rangle \neg A \geq B \rightarrow K_A \langle K_B \rangle \neg A \geq B).$$

这样的公式以后称为固定点公式。

^① 参见后列文献 [13] 的 2.2.5 (2)。

^② 也要相应调整框架条件。

本小节结束时，我们给出以下说明：

1、任给非空集 $\Phi \subseteq \text{Form}$ ，我们还可以把 C_{AB} 和 RIG_{AB} 相对化：

$$(C_{AB, \Phi}) \quad A \geq B \rightarrow K_B \phi \rightarrow K_A \phi, \quad \text{对所有 } \phi \in \Phi;$$

$$(RIG_{AB, \Phi}) \quad \{K_B \phi \rightarrow K_A \phi: \phi \in \Phi\} / A \geq B.$$

这样的 Φ 可以表示某个领域（中的所有命题的集合）。注意： Φ 有两个极限： Φ 是单元集 $\{\phi\}$ 或 Φ 是全体公式集 Form 。若是后者则退化为 C_{AB} 和 RIG_{AB} ，若是前者则刻画相对特定 ϕ 两个主体在认知能力方面的比较。

2、 C_{AB} 还有一个变种：

$$(Cb_{AB}) \quad K_A B \rightarrow K_A (K_B \phi \rightarrow \phi).$$

读者可以考虑若用 Cb_{AB} 代替 C_{AB} ，我们如何得到框架可靠性定理和框架完全性定理。

3、令 $G \subseteq \text{Agent}$ 。我们还可以增加表达式 $A \geq G$ 。它表示 A 在认知能力方面不弱于 G 。因此我们可以把下列公式作为公理加入上述系统：

$$A \geq G \leftrightarrow \bigwedge \{A \geq B: B \in G\}.$$

显然， $A \geq G$ 是 $A \geq B$ 的概括。

任给 Agent 的主体构成的不为空的序列 $s = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ 和 $t = \langle B_1, \dots, B_m \rangle$ ，令 K_s 是 $K_{A_1} \dots K_{A_n}$ 且令 K_t 是 $K_{B_1} \dots K_{B_m}$ 。引入核心公式 $s \geq t$ ，我们还可以如下把 C_{AB} 和 RIG_{AB} 相对化：

$$(C_{st}) \quad s \geq t \rightarrow K_s \phi \rightarrow K_t \phi;$$

$$(RIG_{st}) \quad \{K_s \phi \rightarrow K_t \phi: \phi \in \Phi\} / s \geq t.$$

4、我们在 [1]、[2] 和 [4] 分别刻画了如下思想：认知一个命题、认知一个活动（本文第 6 节我们也要给出几类这样的系统）、认知一个主体、认知一个个体、认知一个关系、认知一个概念（本文第 7 节我们也要给出几类这样的系统）、认知一个范畴。令 X 分别是 [1]、[2]、[4] 和后面第 6—7 节给出的全体命题、活动、主体、个体、关系、概念、或范畴的集合，则我们可以把下面一组公理和规则加到适当的系统上（正像前面我们构造 **CEA1** 那样：在那里 $X = \text{Form}$ ）：

$$(C_{AB, X}) \quad A \geq B \rightarrow K_B X \rightarrow K_A X, \quad \text{对所有 } x \in X;$$

$$(RIG_{AB, X}) \quad \{K_B X \rightarrow K_A X: x \in X\} / A \geq B.$$

我们还可以取 Y 是上述所有 X 的并集的一个子集，然后如上引入 $C_{AB, Y}$ 和 $RIG_{AB, Y}$ 。这组公理和规则刻画了主体在多层次的认知能力方面的比较。

5、我们还可以考虑反思型的逻辑：只须把公理 $C_{AB, X}$ 改成 $A \geq B \rightarrow K_A (K_B X \rightarrow K_A X)$ ，规则 $RIG_{AB, X}$ 不变。

2、在活动能力方面之比较

本节我们用 $A \geq B$ 直观表示：“ A 在活动能力方面不弱于 B ”。

2.2.1 定义 本文我们用 Act 表示可数无穷多个（原子）活动的集合。关于复合活动的情况，以后我们另发文。

归纳定义集合 Form_1 如下：

$$\phi ::= p \mid A \geq B \mid \neg \phi \mid (\phi \wedge \psi) \mid [\alpha_A] \phi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, A \in \text{Agent}, \alpha \in \text{Act}.$$

归纳定义集合 Form_2 如下：

$$\phi ::= p \mid A \geq B \mid A \alpha \mid \neg \phi \mid (\phi \wedge \psi) \mid [\alpha_A] \phi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, A \in \text{Agent}, \alpha \in \text{Act}.$$

所有形如 $A \geq B$ 的公式的集合记为 DA 。此外， $\langle \alpha_A \rangle \phi ::= \neg [\alpha_A] \neg \phi$ 。

2.2.2 定义 (1) Form_1 表述的动态系统 **DS** 定义如下：对 $\phi, \psi \in \text{Form}$, $A \in \text{Agent}$, $\alpha \in \text{Act}$, **TA** 和 **MP** 如前规定，

$$(K_{\alpha A}) \quad [\alpha_A] (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha_A] \phi \rightarrow [\alpha_A] \psi,$$

$$(RN_{\alpha A}) \quad \phi / [\alpha_A] \phi.$$

(2) Form_1 表述的**比较主体间活动能力的系统 CAA1** 定义如下：在 **DS** 上增加：

(C1_{AB}) $A \cong B \rightarrow \langle \alpha_B \rangle T \rightarrow \langle \alpha_A \rangle T$, 对所有 $\alpha \in \text{Act}$;

(RIG1_{AB}) $\{ \langle \alpha_B \rangle T \rightarrow \langle \alpha_A \rangle T : \alpha \in \text{Act} \} / A \cong B$ 。

(3) Form_1 表述的**比较主体间活动能力的系统 CAA2** 定义如下：在 **DS** 上增加：

(C2_{AB}) $A \cong B \rightarrow [\alpha_B] \varphi \rightarrow [\alpha_A] \varphi$, 对所有 $\alpha \in \text{Act}$ 和 $\varphi \in \text{Form}$;

(RIG2_{AB}) $\{ [\alpha_B] \varphi \rightarrow [\alpha_A] \varphi : \alpha \in \text{Act}, \varphi \in \text{Form} \} / A \cong B$ 。

(4) Form_2 表述的**比较主体间活动能力的系统 CAA3** 定义如下：在 **DS** 上增加：

(A _{α A}) $[\alpha_A] A\alpha$;

(R _{α A}) $\langle \alpha_A \rangle A\alpha \rightarrow [\alpha_A] \varphi / A\alpha \rightarrow \varphi$;

(C3_{AB}) $A \cong B \rightarrow B\alpha \rightarrow A\alpha$, 对所有 $\alpha \in \text{Act}$;

(RIG3_{AB}) $\{ B\alpha \rightarrow A\alpha : \alpha \in \text{Act} \} / A \cong B$ 。 $\dashv$

说明：CAA1 比较的是主体在潜能意义上的活动能力，CAA2 比较的是主体在活动造成的的结果的意义上的活动能力，CAA3 比较的是主体在做过活动的意义上的活动能力（这里的 $X\alpha$ 直观表示主体 X 做过 α ）。如前易证：

2.2.3 定理 上述系统是协调的。 $\dashv$

2.2.4 定义 称 $\langle W, R \rangle$ 是**动态框架**，本节简称**框架**，当且仅当， W 是非空状态集， R 是定义域为 $\text{Act} \times \text{Agent}$ 的映射，使得对每一 $\langle \alpha, A \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}$ ， $R_{\alpha A}$ 是 W 上的二元通达关系。

所有上述框架的类记作 $\text{Frame}(\text{ds})$ 。 $\dashv$

说明：上述每一 $R_{\alpha A}$ 是 $R(\alpha, A)$ 的缩写。

2.2.5 真值集定义 定义 φ 相对模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 的**真值集** $[\varphi]$ 如下：对所有 $w \in W$,

(1) — (2) $[\neg \varphi]$ 和 $[\varphi \wedge \psi]$ 如前定义；

(3) $w \in [[\alpha_A] \varphi] \Leftrightarrow R_{\alpha A}(w) \subseteq [\varphi]$, 其中 $R_{\alpha A}(w) ::= \{u \in W : wR_{\alpha A}u\}$;

相对 **CAA1**, **CAA2** 和 **CAA3**, $[A \cong B]$ 分别定义为

(41) $w \in [A \cong B] \Leftrightarrow$ 对所有 $\alpha \in \text{Act}$, $w \in [\langle \alpha_B \rangle T \rightarrow \langle \alpha_A \rangle T]$,

(42) $w \in [A \cong B] \Leftrightarrow$ 对所有 $\alpha \in \text{Act}$ 和 $\varphi \in \text{Form}$, $w \in [[\alpha_B] \varphi \rightarrow [\alpha_A] \varphi]$,

(43) $w \in [A \cong B] \Leftrightarrow$ 对所有 $\alpha \in \text{Act}$, $w \in [B\alpha \rightarrow A\alpha]$, 其中 $[A\alpha]$ 定义为

$w \in [A\alpha] \Leftrightarrow \exists u \in W (uR_{\alpha A}w)$ 。 $\dashv$

说明：本文以后 $[\alpha_A] \varphi$ 总如上定义，故不再提。如前我们可以证明相应的框架可靠性定理（对 **CAA3** 中关于 $A\alpha$ 的部分，可以参见 [5] 的第 3 节的相关证明）。

以后 $\exists u \in W (uR_{\alpha A}w)$ 缩写为 $\exists uR_{\alpha A}w$ 。

令 **CAA1***, **CAA2*** 和 **CAA3*** 是分别从 **CAA1**, **CAA2** 和 **CAA3** 删去各自的无穷推理规则得到的系统。用前面给出的拟赋值方法，我们还可以仿效 2.1.11—2.1.22，分别证明 **CAA1***, **CAA2*** 和 **CAA3*** 的框架可靠性定理和框架完全性定理（**CAA3*** 中关于 $A\alpha$ 的部分，可以参见 [5] 的第 3 节的相关证明）。这里证明的关键是证明赋值存在定理。为此仿效 2.1.14 的证明，我们相对 **CAA1***, **CAA2*** 和 **CAA3*** 分别定义从 DA 到 $\text{P}(W)$ 中的映射 g_1 , g_2 和 g_3 如下：

$g_1(A \cong B) = \{w : R_{\alpha B}(w) \neq \emptyset \Rightarrow R_{\alpha A}(w) \neq \emptyset\}$,

$g_2(A \cong B) = \{w : R_{\alpha A}(w) \subseteq R_{\alpha B}(w)\}$,

$g_3(A \cong B) = \{w : \exists uR_{\alpha B}w \Rightarrow \exists uR_{\alpha A}w\}$ 。

其余的证明如前。

注意：相对 **CAA2**，我们可以删去无穷推理规则，然后用自代入方法通过增加自代入公理和对应的框架条件来证明框架完全性，而 **CAA1** 和 **CAA3** 不行，除非我们引入原子活动生成的复合活动，且代入是对复合活动进行的（也不是前面的自代入），正像后列文献 [4] 给出的刻画**通过活动来否定**的逻辑那样（那里我们用测试活动作为一种特定活动进行代入，从而证明的也是模型完全性定理）。

3、在认知能力和活动能力两方面之比较

我们用 $A \gg B$ 直观表示 A 在认知能力和活动能力两个方面都不弱于 B 。

最简单的方案是把前面比较主体间认知能力的系统和比较主体间活动能力的系统聚合在一起，然后增加公理： $A \gg B \leftrightarrow A \geq B \wedge A \cong B$ 。

此外，我们还可以定义下列表达式且如上引入相应的公理：

A 在认知能力方面不弱于 B 但在活动能力方面弱于 B ： $A \geq B \wedge \neg A \cong B$ ，

A 在认知能力方面弱于 B 但在活动能力方面不弱于 B ： $\neg A \geq B \wedge A \cong B$ 。

A 在认知能力和活动能力两个方面都弱于 B ： $\neg A \geq B \wedge \neg A \cong B$ 。

结束语：我们也可以如前一小节最后指出的那样，给出上述逻辑的各种变种。

三、关于主体言行的逻辑

本节我们考虑主体的言行关系。这里的言就是言说，行看作是活动。

为了简单，本节我们只给出一些思路。想必读者能根据前面的内容，给出相应的形式化定义，并证明相应的结果。

3.1 定义 归纳定义集合 Form 如下：其中 $p \in At$, $A \in Agent$, $\alpha \in Act$,

$$\varphi ::= p \mid A\alpha \mid C_1A \mid C_2A \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha_A]\varphi \mid S_A\varphi.$$

所有形如 C_1A 和 C_2A 的公式的集合记为 EA 。另外， $CA ::= C_1A \wedge C_2A$ 。⊥

说明： $S_A\varphi$ 直观表示： A 公开说过 φ 。^① C_1A 直观表示： A 公开说过它做过的活动皆做

过。 C_2A 直观表示： A 做过的活动 A 都公开说过。

3.2 定义 称 $\langle W, S, R \rangle$ 是 **sa-框架**，本节简称**框架**，当且仅当， W 是非空状态集， S 是定义域为 Act 的映射，使得对每一 $A \in Agent$, S_A 是从 W 到 $P(Form)$ 的映射，且 R 是定义域为 $Act \times Agent$ 的映射，使得对每一 $\langle \alpha, A \rangle \in Act \times Agent$, $R_{\alpha A}$ 是 W 上的二元通达关系。

所有上述框架的类记作 $Frame(sa)$ 。⊥

说明： $S_A(w)$ 表示 A 在 w 中公开说出的全部话。根据需要，我们可以规定 $S_A(w)$ 具有什么性质。这样的性质通常是用某种封闭性来表示。

3.3 真值集定义 定义 φ 相对模型 $\langle W, S, R, [\] \rangle$ 的**真值集** $[\varphi]$ 如下：对所有 $w \in W$,

$$(4) w \in [S_A\varphi] \Leftrightarrow \varphi \in S_A(w), \quad (5) w \in [A\alpha] \Leftrightarrow \exists u R_{\alpha A} w,$$

$$(6) w \in [C_1A] \Leftrightarrow \forall \alpha \in Act (w \in [S_A A\alpha \rightarrow A\alpha]),$$

$$(7) w \in [C_2A] \Leftrightarrow \forall \alpha \in Act (w \in [A\alpha \rightarrow S_A A\alpha]). \quad \perp$$

3.4 定义 关于主体言行的系统 **SA** 定义如下：在 **DS** 上增加下列公理和规则：

$$(A_{\alpha A}) \quad [\alpha_A]A\alpha; \quad (R_{\alpha A}) \quad \langle \alpha_A \rangle A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi / A\alpha \rightarrow \varphi;$$

$$(C_{1A}) \quad C_1A \rightarrow S_A A\alpha \rightarrow A\alpha, \quad \text{对所有 } \alpha \in Act;$$

$$(RIG_{1A}) \quad \{S_A A\alpha \rightarrow A\alpha : \alpha \in Act\} / C_1A.$$

^① 公开说过，可理解为公布 (public announcement)。它是一种被逻辑学研究过的活动，参见文献 [9]。

(C_{2A}) $C_2A \rightarrow A\alpha \rightarrow S_A A\alpha$, 对所有 $\alpha \in \text{Act}$;

(RIG_{2A}) $\{A\alpha \rightarrow S_A A\alpha: \alpha \in \text{Act}\} / C_2A. \vdash$

不难证明 **SA** 相对 **Frame(sa)** 的框架可靠性定理。

从 **SA** 中删去 RIG_{1A} 和 RIG_{2A}, 用前面给出的拟赋值方法, 不难证明框架完全性定理。仿效 2.1.14 的证明, 我们定义从 **EA** 到 **P(W)** 中的映射 g 如下:

$$g(C_1A) = \{w: A\alpha \in S_A(w) \Rightarrow \exists u R_{\alpha A} w\},$$

$$g(C_2A) = \{w: \exists u R_{\alpha A} w \Rightarrow A\alpha \in S_A(w)\}.$$

其余的证明如前。

注意: 在如 2.1.17 构造典范模型时, 对每一极大一致集 w , 我们还要增加下列定义:

$$S_A(w) = \{\varphi: S_A \varphi \in w\}.$$

结束语: (1) 我们也可以修改 3.3 的 (6) 和 (7) 如下:

$$(6_{\exists}) w \in [C_{\exists 1}A] \Leftrightarrow \exists \alpha \in \text{Act} (w \in [S_A A\alpha \rightarrow A\alpha]),$$

$$(7_{\exists}) w \in [C_{\exists 2}A] \Leftrightarrow \exists \alpha \in \text{Act} (w \in [A\alpha \rightarrow S_A A\alpha]).$$

但这又是另一类逻辑了, 因为 $C_{\exists 1}A$ 和 $C_{\exists 2}A$ 的直观意义已经不同于 C_1A 和 C_2A 的。

(2) 通常我们也用“敢说敢做”来刻画一个主体。但我们认为“敢说敢做”的“说”不同于“公开说过”的“说”, 因为这里的“敢”是一个模态词。

(3) 读者可以考虑对复合活动进行代入的方法证明完全性定理。

四、通过认知一个主体的言行来认知该主体

如何认知一个主体? 我们在 [6]、[4] 和 [2] 已经给出了几个方案, 建立了几类逻辑。

本节我们要从逻辑上刻画下列思想: 通过认知一个主体的言行来认知该主体。

本节我们用 K_AB 直观表示: “A 通过认知 B 的言行来认知 B”。

4.1 定义 归纳定义集合 **Form** 如下:

$$\varphi ::= p \mid A\alpha \mid K_AB \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha_A]\varphi \mid K_A\varphi \mid S_A\varphi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, A \in \text{Agent}, \alpha \in \text{Act}.$$

所有形如 K_AB 的公式的集合记为 **FA**。⊥

4.2 定义 称框架 $\langle W, S, R \rangle$ 是**言行框架**, 本节简称**框架**, $\Leftrightarrow W$ 是非空 (认知) 状态集, S 如 3.2 定义, R 是定义域为 $(\text{Act} \times \text{Agent}) \cup \text{Agent}$ 的映射, 使得对每一 $\langle \alpha, A \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}$, $R_{\alpha A}$ 是 W 上的二元通达关系; 且对每一 $A \in \text{Agent}$, R_A 是 W 上的二元自返欧性关系。

所有上述框架的类记作 **Frame(kag6)**。⊥

4.3 真值集定义 $[S_A\varphi]$ 和 $[A\alpha]$ 如前定义, 此外, 对所有 $w \in W$,

$$(7) w \in [K_AB] \Leftrightarrow \forall \varphi \in \text{Form} (w \in [S_B\varphi \rightarrow K_AS_B\varphi]) \text{ 且 } \forall \alpha \in \text{Act} (w \in [B\alpha \rightarrow K_AB\alpha]). \vdash$$

说明: (7) 直观表示: A 知道 B 意味 A 不仅知道 B 说过什么, 还知道 B 做过什么。

4.4 定义 (1) **经典动态认知系统 DES5** 定义如下: 在 **ES5** 上增加下列公理和规则:

- (K_{αA}) $[\alpha_A](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow [\alpha_A]\psi$, (RN_{αA}) $\varphi / [\alpha_A]\varphi$.
- (2) 知道一个主体的系统 **KAG6** 定义如下: 在基础系统 **DES5** 上增加下列公理和规则:
- (A_{αA}) $[\alpha_A]A\alpha$, (R_{αA}) $\langle \alpha_A \rangle A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi / A\alpha \rightarrow \varphi$,
- (K6_{AB}) $K_AB \rightarrow (S_B\varphi \rightarrow K_AS_B\varphi) \wedge (B\alpha \rightarrow K_AB\alpha)$, 对所有 $\alpha \in \text{Act}$ 和 $\varphi \in \text{Form}$;
- (RIG6_{AB}) $\{S_B\varphi \rightarrow K_AS_B\varphi: \varphi \in \text{Form}\}, \{B\alpha \rightarrow K_AB\alpha: \alpha \in \text{Act}\} / K_AB. \vdash$

说明: 据 K6_{AB}, 易得内定理 $K_AB \rightarrow S_B\varphi \wedge B\alpha \rightarrow K_A(S_B\varphi \wedge B\alpha)$ 。

不难证明 **KAG6** 相对 $\text{Frame}(\text{kag6})$ 可靠。

令 **KAG7** 是从 **KAG6** 删去 RIG6_{AB} 得到的系统。用前面给出的拟赋值方法, 不难证明 **KAG7** 有框架完全性定理。为了证明赋值存在定理, 仿效 2.1.14 的证明, 我们定义从 FA 到 P(W) 中的映射 g 如下:

$$g(K_AB) = \{w: \forall u \in W (wR_A u \Rightarrow S_B(u) \subseteq S_B(w)) \\ \text{且 } \forall v u \in W (vR_{\alpha_B} w \text{ 且 } wR_A u \Rightarrow \exists u_0 R_{\alpha_B} u)\}.$$

其余的证明如前。

我们把 4.3 的 (7) 替换为

$$(7B) \quad w \in [K_AB]$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in \text{Form} (w \in [(S_B\varphi \wedge \varphi \rightarrow K_A(S_B\varphi \wedge \varphi)) \wedge (S_B\varphi \wedge \neg \varphi \rightarrow K_A(S_B\varphi \wedge \neg \varphi))])$$

$$\text{且 } \forall \alpha \in \text{Act} (w \in [B\alpha \rightarrow K_AB\alpha]). \vdash$$

(7B) 直观表示: A 知道 B 意味 A 不仅知道 B 说过的话是真是假, 还知道 B 做过什么。

4.5 定义 知道一个主体的系统 **KAG8** 定义如下: 在 **KAG6** 中用下列公理和规则替换 K6_{AB} 和 RIG6_{AB}:

$$(K8_{AB}) \quad K_AB \rightarrow (S_B\varphi \wedge \varphi \rightarrow K_A(S_B\varphi \wedge \varphi)) \wedge (S_B\varphi \wedge \neg \varphi \rightarrow K_A(S_B\varphi \wedge \neg \varphi)) \wedge (B\alpha \rightarrow K_AB\alpha),$$

对所有 $\alpha \in \text{Act}$ 和 $\varphi \in \text{Form}$;

$$(RIG8_{AB}) \quad \{(S_B\varphi \wedge \varphi \rightarrow K_A(S_B\varphi \wedge \varphi)) \wedge (S_B\varphi \wedge \neg \varphi \rightarrow K_A(S_B\varphi \wedge \neg \varphi)): \varphi \in \text{Form}\}, \\ \{B\alpha \rightarrow K_AB\alpha: \alpha \in \text{Act}\} / K_AB. \vdash$$

说明: 不难证明相应的框架可靠性定理。

读者可以把自代入方法和对复合活动进行代入的方法结合起来证明完全性定理。

五、一种刻画主体知行关系的逻辑

第 1 种方案: 我们从技术上平移第 2 节第 1 小节最后的内容 (关于 **CEA3** 的内容), 但这里提出的逻辑所刻画的思想与那里用 $A \geq B$ 直观表示的思想不同。

我们在 [1] 给出 “知道活动 α ” 的逻辑。刻画这个思想的代表公理的多主体化是

$$(KA1_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow K_A\varphi.$$

它直观表示: 若 A 知道 α , 则 A 知道自己做了 α 的一切后果。现在我们倒过来考虑下列公式:

$$(AK1_{\alpha A}) \quad \alpha_A K \rightarrow K_A\varphi \rightarrow [\alpha_A]\varphi.$$

AK1_{αA} 也刻画了主体的一种知行关系。AK1_{αA} 的右边直观表示: A 知道的都是 A 做 α 的后果。所以我们可以把 $\alpha_A K$ 直观理解为: A 通过做 α 达到知 (知状态或知概念)。如我们把 α 看作是学习这一活动, 则 AK1_{αA} 直观表示: 若 A 通过学习达到知, A 知道的都是 A 学习的结果。

严格地说，我们应该把 $\alpha_A K$ 表示为 $\alpha_A K_A$ 。后者直观理解为：A通过做 α 达到A的知。这说明，不同的主体通过 α 达到的是不同的（它自己的）知。但为了简单，下面我们还是用 $\alpha_A K$ 表示为 $\alpha_A K_A$ 。以后我们还可以把 $\alpha_A K_A$ 概括到 $\alpha_A K_B$ 。

我们可以说， $\alpha_A K$ 刻画的是：A通过活动 α 达到一种用K来表示的（静止的）认知状态。这是一种从动到静的刻画。说它达到一种认知状态是指我们还可以达到其他不同的认知状态。它们可以用下列代表公理表示：

$$\begin{aligned} \alpha_A K \rightarrow \langle K_A \rangle \varphi \rightarrow [\alpha_A] \varphi, \quad \alpha_A K \rightarrow K_A \varphi \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \varphi, \\ \alpha_A K \rightarrow K_A \varphi \rightarrow [\alpha_A] K_A \varphi, \quad \dots \end{aligned}$$

归纳定义：

$$\varphi ::= p \mid \alpha_A K \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha_A] \varphi \mid K_A \varphi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, A \in \text{Agent}, \alpha \in \text{Act}.$$

令 **AK1** 是在 **DES5** 上增加 $\text{AK1}_{\alpha A}$ 和下列公理得到的系统：

$$(\text{WAK1}_{\alpha A}) \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha_A K.$$

从后面典范框架主引理的证明可见，我们甚至可以用更弱的 $\alpha_A K \vee \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha_A K$ 代替 $\text{WAK1}_{\alpha A}$ 。但这里我们还是用 $\langle \alpha_A \rangle K_A \alpha_A K$ ，因为它的直观意义很自然。

据 $\text{WAK1}_{\alpha A}$ 和公理 T_A 易得 **AK1** 的内定理 $\langle \alpha_A \rangle \alpha_A K$ ，其直观意义也较自然。

另外，易证 **AK1** 有下面的固定点公式为内定理：

$$\alpha_A K \leftrightarrow (K_A \neg K_A \alpha_A K \rightarrow [\alpha_A] \neg K_A \alpha_A K).$$

5.1 定义 称 $F = \langle W, R \rangle$ 是动态认知框架，本节简称**框架**，记作 $F \in \text{Frame}(\text{dek})$ ，当且仅当，W 如前定义，R 是定义域为 $(\text{Act} \times \text{Agent}) \cup \text{Agent}$ 的映射，使得对每一 $\langle \alpha, A \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}$ ， $R_{\alpha A}$ 是 W 上的二元通达关系；且对每一 $A \in \text{Agent}$ ， R_A 是 W 上的二元通达关系。

令 $\text{Frame}(\text{det})$ 是 $\text{Frame}(\text{dek})$ 中所有自返框架构成的类。

令 $\text{Frame}(\text{des5})$ 是 $\text{Frame}(\text{det})$ 中所有欧性框架构成的类。

令 $\text{Frame}(\text{ak1})$ 是 $\text{Frame}(\text{des5})$ 中所有满足下列框架条件的框架构成的类：对 $w \in W$ ，

$$(\text{wak1}_{\alpha A}) \exists u \in W (w R_{\alpha A} u \text{ 且 } \forall v \in W (u R_A v \Rightarrow R_{\alpha A}(v) \subseteq R_A(v))).$$

5.2 真值集定义 $w \in [\alpha_A K] \Leftrightarrow R_{\alpha A}(w) \subseteq R_A(w)$ ，对所有 $w \in W$ 。

5.3 框架可靠性定理 **AK1** 相对 $\text{Frame}(\text{ak1})$ 可靠。

证明：任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[\]$ 。

验证 $\text{AK1}_{\alpha A}$ ：任给 $w \in W$ 使得 $w \in [\alpha_A K]$ 。据上述真值集定义，有 $R_{\alpha A}(w) \subseteq R_A(w)$ 。任给 $\varphi \in \text{Form}$ ，易证 $w \in [K_A \varphi \rightarrow [\alpha_A] \varphi]$ 。

验证 $\text{WAK1}_{\alpha A}$ ：据框架条件 $(\text{wak1}_{\alpha A})$ 和真值集定义易证。

其余公理和规则的验证如通常。⊥

5.4 框架完全性定理 **AK1** 相对 $\text{Frame}(\text{ak1})$ 完全。

证明：定义 **AK1** 的**典范框架** $\langle W, R \rangle$ 如下：W 是所有 **AK1**-极大一致集的集合，对每一 $A \in \text{Agent}$ ， R_A 如 2.1.24 定义，且对每一 $\alpha \in \text{Act}$ ，

$$R_{\alpha A} = \{ \langle w, u \rangle \in W^2 : w^{-[\alpha_A]} \subseteq u \}, \quad \text{其中 } w^{-[\alpha_A]} ::= \{ \varphi : [\alpha_A] \varphi \in w \}.$$

只证**典范框架主引理** $\alpha_A K \in w \Leftrightarrow R_{\alpha A}(w) \subseteq R_A(w)$ 。

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $\alpha_A K \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $w R_{\alpha A} u$ 。则

$$\textcircled{1} \quad w^{-[\alpha_A]} \subseteq u.$$

要证 $w R_A u$ ，即要证： $w^{-K_A} \subseteq u$ 。任给 $\varphi \in w^{-K_A}$ ，则 $K_A \varphi \in w$ ，再据设定 $\alpha_A K \in w$ 和公理 $\text{AK1}_{\alpha A}$ ，有 $[\alpha_A] \varphi \in w$ ，再据 $\textcircled{1}$ ，有 $\varphi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $\alpha_A K \notin w$ 。要证：

$$\textcircled{2} \quad \text{存在 } u \in W \text{ 使得 (a) } w^{-[\alpha_A]} \subseteq u, \text{ 且 (b) } w^{-K_A} \not\subseteq u.$$

先证(a): 假设 $w^{-[\alpha_A]} \cup \{K_A \alpha_A K\}$ 不一致, 则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg K_A \alpha_A K.$$

再据 K_{α_A} 和 RN_{α_A} 易得

$$\vdash [\alpha_A] \varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A] \varphi_n \rightarrow [\alpha_A] \neg K_A \alpha_A K.$$

因为 $[\alpha_A] \varphi_1, \dots, [\alpha_A] \varphi_n \in w$, 故 $[\alpha_A] \neg K_A \alpha_A K \in w$, 矛盾于 $WAK1_{\alpha_A}$ 属于 w , 故 $w^{-[\alpha_A]} \cup \{K_A \alpha_A K\}$ 一致, 据 Lindenbaum-引理, 存在 $u \in W$ 使得

$$\textcircled{3} \quad w^{-[\alpha_A]} \cup \{K_A \alpha_A K\} \subseteq u.$$

因此上述(a)成立。

最后证(b)成立: 据设定, 有 $\neg \alpha_A K \in w$, 再据公理 T_A , 有 $\neg K_A \alpha_A K \in w$, 再据公理 5_A , 有 $K_A \neg K_A \alpha_A K \in w$, 所以 $\neg K_A \alpha_A K \in w^{-K_A}$ 。而据 $\textcircled{3}$, 有 $\neg K_A \alpha_A K \notin u$ 。所以(b)成立。 $\dashv$

说明: 从上述证明最后一部分可见, 我们可以构造极小系统 $AK1_0$ 。它由 $DESK$ (=从 $DES5$ 中删去 T_A 和 5_A 得到的系统) 加 $AK1_{\alpha_A}$ 和 $WAK1_{\alpha_A}$ 以及下列公理:

$$\neg \alpha_A K \rightarrow K_B < K_B > \neg \alpha_A K. \quad \textcircled{1}$$

第2种方案: 考虑真值集定义

$$w \in [\alpha_A K] \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_{\alpha_A} u \Rightarrow u R_A u), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

这说明: 若 A 通过做(认知)活动 α 把状态 w 改变为 u , 则 u 也是 A 在 u 中能认知的状态。 A 通过做 α 改变的状态 A 事后知道。这里的认知通达关系并非如第2节那样指不可辨关系。

令 $AK2$ 是在 $DES5$ 上增加下列公理得到的系统:

$$(AK21_{\alpha_A}) \quad \alpha_A K \rightarrow [\alpha_A] (K_A \varphi \rightarrow \varphi),$$

$$(AK22_{\alpha_A}) \quad [\alpha_A] (K_A \alpha_A K \rightarrow \alpha_A K) \rightarrow \alpha_A K.$$

由此系统易得固定点公式 $\alpha_A K \leftrightarrow [\alpha_A] (K_A \alpha_A K \rightarrow \alpha_A K)$ 。

定义 $AK2$ 的典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证典范框架主引理:

$$\alpha_A K \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_{\alpha_A} u \Rightarrow u R_A u), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $\alpha_A K \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $w^{-[\alpha_A]} \subseteq u$ 。据设定和公理 $AK21_{\alpha_A}$, 易证

$$K_A \varphi \rightarrow \varphi \in u, \quad \text{对所有 } \varphi \in \text{Form}.$$

由此易证 $u^{-K_A} \subseteq u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $\alpha_A K \notin w$ 。要证:

$$\textcircled{1} \quad \text{存在 } u \in W \text{ 使得 } w^{-[\alpha_A]} \subseteq u \text{ 且 } u^{-K_A} \not\subseteq u.$$

假设 $\Phi = w^{-[\alpha_A]} \cup \{\neg (K_A \alpha_A K \rightarrow \alpha_A K)\}$ 不是 $KA2$ -一致的, 则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow K_A \alpha_A K \rightarrow \alpha_A K.$$

易证 $\vdash [\alpha_A] \varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A] \varphi_n \rightarrow [\alpha_A] (K_A \alpha_A K \rightarrow \alpha_A K)$, 所以 $[\alpha_A] (K_A \alpha_A K \rightarrow \alpha_A K) \in w$, 再据公理 $AK22_{\alpha_A}$, 有 $\alpha_A K \in w$, 矛盾于设定。所以 Φ 是 $KA2$ -一致的, 据 Lindenbaum-引理,

$$\textcircled{2} \quad \text{存在 } u \in W \text{ 使得 } w^{-[\alpha_A]} \subseteq u \text{ 且 } K_A \alpha_A K \wedge \neg \alpha_A K \in u.$$

易见 $\alpha_A K \in u^{-K_A}$ 且 $\alpha_A K \notin u$, 所以 $u^{-K_A} \not\subseteq u$ 。所以 $\textcircled{1}$ 成立。 $\dashv$

易见 $KA2_{\alpha_A}$ 是有效式。如前增加 $\alpha_A K$ 生成的常公式 $AK22_{\alpha_A}$ 对应的框架条件, 我们不难

^① 当然, 为了证明框架可靠性定理和框架完全性定理, 我们还要相应调整框架条件。

证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

结束语：我们可以把上面系统的知道算子 K_A 都换成相信算子 B_A 。考虑

$$(AB_{\alpha A}) \alpha_A B \rightarrow B_A \varphi \rightarrow [\alpha_A] \varphi.$$

$AB_{\alpha A}$ 的右边直观表示：A 相信的都是 A 自己做 α 的后果。所以我们可以把 $\alpha_A B$ 直观理解为：A 通过做 α 达到信这一思想。如我们把 α 看作是一种实践活动，则 $AB_{\alpha A}$ 直观表示：A 通过实践活动 α 达到信就是 A 相信的都是 A 自己做 α 的结果。当然，关于相信算子 B_A 的系统不应该有公理（或内定理） $B_A \varphi \rightarrow \varphi$ ，所以我们要弱化系统。一个方案是用下列公理替换关于 B_A 的公理 T_A 和 5_A ：

$$B_A \alpha_A B \rightarrow \alpha_A B, \quad \neg B_A \alpha_A B \rightarrow B_A \neg B_A \alpha_A B.$$

另一个方案是采用 **DESK** 加 $AB_{\alpha A}$ 的系统，并用拟赋值方法来证明框架可靠性定理和框架完全性定理。

六、刻画知道一个活动的逻辑

考虑第 5 节我们提到 $KA1_{\alpha A}$ 。再据 T_A 易得 $K_A \alpha \wedge [\alpha_A] \varphi \rightarrow \varphi$ 。中山大学逻辑与认知研究所 2004 级王景周硕士生在他的硕士论文 [11] 中指出（下面的内容笔者稍加修改）：

$K_A \alpha \wedge [\alpha_A] \varphi \rightarrow \varphi$ 作为内定理好像不太直观，比如：如果我知道吃这一活动，并且我吃过必产生饱了的结果，那么我饱了这一结果成立。所以，把 $K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \varphi \rightarrow K_A \varphi$ 和 $K_A \varphi \rightarrow \varphi$ 同时作为公理是否有点问题呢？如果去掉了 $K_A \varphi \rightarrow \varphi$ ，用其它的认知概念来替代知道这一概念，从实际意义上是否又显得有点弱呢？

笔者认为王景周提出的意见有一定的道理。这也是笔者在 [1] 还提出其他方案的一个重要原因。下面我们再给出几组知道一个活动的逻辑，力图从各方面消解上面提到的问题。

归纳定义：

$$\varphi ::= p \mid K_A \alpha \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha_A] \varphi \mid K_A \varphi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, A \in \text{Agent}, \alpha \in \text{Act}.$$

平凡的方案有下面几种。

(1) 把 $K_A \varphi \rightarrow \varphi$ 减弱为 $K_A (K_A \varphi \rightarrow \varphi)$ ，也可同时把 $K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \varphi \rightarrow K_A \varphi$ 减弱为

$$K_A \alpha \rightarrow K_A ([\alpha_A] \varphi \rightarrow \varphi).$$

下面两类方案无非把 $K_A \alpha$ 看作是一种缩写：

(2) 本质上是单主体逻辑。

① $K_A \alpha \leftrightarrow K_A \langle \alpha_A \rangle T$, (肯定性知道：知道 α 就是知道自己能做 α)

$K_A \alpha \leftrightarrow K_A \neg \langle \alpha_A \rangle T$, (否定性知道：知道 α 就是知道自己不能做 α)

$$K_A \alpha \leftrightarrow K_A \langle \alpha_A \rangle T \vee K_A \neg \langle \alpha_A \rangle T,$$

.....

② $K_A \alpha \leftrightarrow K_A [\alpha_A] K_A \langle \alpha_A \rangle T$, (如上可以写出其他变种)

③ $K_A \alpha \leftrightarrow \langle \alpha_A \rangle K_A \langle \alpha_A \rangle T$, (A 知道 α 意味 A 做 α 后有可能知道自己能做 α)

.....

④ $K_A \alpha \leftrightarrow K_A A \alpha$, 其中 $A \alpha$ 如前定义（此时 Form 中还要引入形如 $A \alpha$ 的公式）

(3) 本质上是多主体逻辑。

令 $X_B \in \{K_B \langle \alpha_B \rangle T, K_B \neg \langle \alpha_B \rangle T, \dots, \langle \alpha_B \rangle K_B \langle \alpha_B \rangle T, \dots\}$ 。

① $K_A \alpha \leftrightarrow K_A \vee \{X_B: B \in \text{Agent}\}$, ② $K_A \alpha \leftrightarrow K_A \wedge \{X_B: B \in \text{Agent}\}$,

③ $K_A \alpha \leftrightarrow \vee \{K_A B \alpha: B \in \text{Agent}\}$.^①

^① 这里的概念还可以对群体相对化。

下面我们考虑几组我们认为是不平凡的方案。

本节若不特别指出，我们总考虑 2.1.7 给定的 $\text{Frame}(\text{des5})$ 。

第 1 组方案：

第 1 个方案：在要建立的系统中去掉公理 T_A 。这种方案不是为了解决王景周提出的问题，而是对 [1] 提出的系统 **KA1** 的修正。

定义知道一个活动的系统 **KA1*** 是在 **DESK** 上增加下列公理得到的系统：

($\text{KA1}_{\alpha A}$) $K_A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow K_A\varphi$, (代表公理)

($\text{K5}_{\alpha A}$) $\neg K_A\alpha \rightarrow \langle K_A \rangle K_A \neg K_A\alpha$, (自代入公理 1)

($\text{AKK}_{\alpha A}$) $[\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A\alpha$. (自代入公理 2)

易证 **KA1*** 有下面的固定点公式为内定理：

$$K_A\alpha \leftrightarrow ([\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A\alpha \rightarrow K_A \langle K_A \rangle K_A\alpha).$$

真值集定义 $w \in [K_A\alpha] \Leftrightarrow R_K(w) \subseteq R_\alpha(w)$, 对所有 $w \in W$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**：

$$K_A\alpha \in w \Leftrightarrow R_K(w) \subseteq R_\alpha(w), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $K_A\alpha \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $w^{-K_A} \subseteq u$ 。要证 $w^{-[\alpha_A]} \subseteq u$ 。任给 $\varphi \in w^{-[\alpha_A]}$ ，有 $[\alpha_A]\varphi \in w$ ，再据设定和公理 $\text{KA1}_{\alpha A}$ ，有 $K_A\varphi \in w$ ，再据 $w^{-K_A} \subseteq u$ ，有 $\varphi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K_A\alpha \notin w$ 。要证：

① 存在 $u \in W$ 使得 $w^{-K_A} \subseteq u$ 且 $w^{-[\alpha_A]} \not\subseteq u$ 。

假设 $\Phi = w^{-K_A} \cup \{\neg \langle K_A \rangle K_A\alpha\}$ 不是 **KA1***-一致的，则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-K_A}$ 使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg \langle K_A \rangle K_A\alpha.$$

易证 $\vdash K_A\varphi_1 \wedge \dots \wedge K_A\varphi_n \rightarrow K_A \langle K_A \rangle K_A\alpha$ ，所以 $K_A \langle K_A \rangle K_A\alpha \in w$ ，据公理 $\text{K5}_{\alpha A}$ ，有 $K_A\alpha \in w$ ，矛盾于设定。所以 Φ 是 **KA2**-一致的，据 Lindenbaum-引理，

② 存在 $u \in W$ 使得 $w R_A u$ 且 $\neg \langle K_A \rangle K_A\alpha \in u$ 。

另一方面，公理 $\text{AKK}_{\alpha A}$ 属于 w ，所以有 $\langle K_A \rangle K_A\alpha \in w^{-[\alpha_A]}$ 。据②，有 $\langle K_A \rangle K_A\alpha \notin u$ ，所以有 $w^{-[\alpha_A]} \not\subseteq u$ 。⊥

易见 $\text{KA1}_{\alpha A}$ 是有效式。如前增加 $\text{K5}_{\alpha A}$ 和 $\text{AKK}_{\alpha A}$ 对应的框架条件，我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第 2 个方案：这种方案的提出考虑到 **KA1*** 的代表公理 $\text{KA1}_{\alpha A}$ 的第 2 前件的对称性。

定义知道一个活动的系统 **KA2** 是在 **DESK** 上增加下列公理得到的系统：

($\text{KA2}_{\alpha A}$) $K_A\alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow K_A\varphi$,

($\text{M5}_{\alpha A}$) $\neg K_A\alpha \rightarrow \langle K_A \rangle \neg K_A\alpha$,

($\text{AKM}_{\alpha A}$) $\langle \alpha_A \rangle K_A\alpha$. ⊥

$\text{KA2}_{\alpha A}$ 是在很强的意义上从一个方向揭示了 $K_A\alpha$ 的含义。

这里我们没有引入公理 T_A ，因为用它和 $\text{KA2}_{\alpha A}$ 可以推出 $K_A\alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow \varphi$ 。

注意： $\text{M5}_{\alpha A}$ 的逆对偶公式是 $K_A K_A\alpha \rightarrow K_A\alpha$ ，它是 T_A 的一个特例。

易证 **KA2** 有下面的固定点公式为内定理：

$$K_A\alpha \leftrightarrow (\langle \alpha_A \rangle K_A\alpha \rightarrow K_A K_A\alpha).$$

真值集定义 $w \in [K_A\alpha] \Leftrightarrow \forall uv \in W (w R_{\alpha A} u \text{ 且 } w R_A v \Rightarrow u = v)$, 对所有 $w \in W$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**：

$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (wR_{\alpha A} u \text{ 且 } wR_A v \Rightarrow u = v)$, 对所有 $w \in W$ 。

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $K_A \alpha \in w$ 。任给 $u, v \in W$ 使得 $wR_{\alpha A} u$ 且 $wR_A v$ 。要证 $u = v$ 。据极大一致集的反链性，只须证 $u \subseteq v$ 。任给 $\phi \in u$ ，再据 $wR_{\alpha A} u$ ，有 $\langle \alpha_A \rangle \phi \in w$ ，再据设定和公理 $KA2_{\alpha A}$ ，有 $K_A \phi \in w$ ，再据 $wR_A v$ ，易证 $\phi \in v$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证：

① 存在 $u, v \in W$ 使得 $wR_{\alpha A} u$ 且 $wR_A v$ 且 $u \neq v$ 。

假设 $\Phi = w^{-[\alpha_A]} \cup \{K_A \alpha\}$ 不是 **KA2**-一致的，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \neg K_A \alpha。$$

易证 $\vdash [\alpha_A] \phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A] \phi_n \rightarrow [\alpha_A] \neg K_A \alpha$ ，所以 $[\alpha_A] \neg K_A \alpha \in w$ ，矛盾于公理 $AKM_{\alpha A}$ 属于 w 。所以 Φ 是 **KA2**-一致的，据 Lindenbaum-引理，

② 存在 $u \in W$ 使得 $wR_{\alpha A} u$ 且 $K_A \alpha \in u$ 。

假设 $\Psi = w^{-K_A} \cup \{\neg K_A \alpha\}$ 不是 **KA2**-一致的，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-K_A}$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow K_A \alpha。$$

易证 $\vdash K_A \phi_1 \wedge \dots \wedge K_A \phi_n \rightarrow K_A K_A \alpha$ ，所以 $K_A K_A \alpha \in w$ ，再据公理 $M5_{\alpha A}$ ，有 $K_A \alpha \in w$ ，矛盾于设定。所以 Ψ 是 **KA2**-一致的，据 Lindenbaum-引理，

③ 存在 $v \in W$ 使得 $wR_A v$ 且 $\neg K_A \alpha \in v$ 。

据②和③，易见①成立。 $\dashv$

易见 $KA2_{\alpha A}$ 是有效式。如前增加 $M5_{\alpha A}$ 和 $AKM_{\alpha A}$ 对应的框架条件，我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第 3 个方案：直接弱化 **KA1*** 的代表公理 $KA1_{\alpha A}$ 的后件。

定义知道一个活动的系统 **KA3** 如下：**KA3** 是在 **DES5** 中加下列公理：

$$(KA3_{\alpha A}) \quad K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \phi,$$

$$(W5_{\alpha A}) \quad \neg K_A \alpha \rightarrow K_A \neg K_A \alpha, \quad (\text{一种负反思。注意：此公理不是 } 5_A \text{ 的特例！})$$

$$(AKK_{\alpha A}) \quad [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha。$$

说明：从后面典范框架主引理的证明可见，我们甚至可以用更弱的 $K_A \alpha \vee [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 代替 $AKK_{\alpha A}$ 。但这里我们还是用 $AKK_{\alpha A}$ ，因为它的直观意义很自然。

用 $W5_{\alpha A}$ 和 T_A ，易证 $\neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle K_A \neg K_A \alpha$ ，从而 **KA3** 有下列**固定点公式**为内定理：

$$K_A \alpha \leftrightarrow ([\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha \rightarrow K_A \langle K_A \rangle K_A \alpha)。$$

真值集定义 $w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \exists u \in W (wR_{\alpha A} u \text{ 且 } wR_A u)$ ， 对所有 $w \in W$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。我们只证**典范框架主引理**：

$$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \exists u \in W (wR_{\alpha A} u \text{ 且 } wR_A u), \quad \text{对所有 } w \in W。$$

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $K_A \alpha \in w$ 。据 Lindenbaum-引理，只须证 $w^{-[\alpha_A]} \cup w^{-K_A}$ 是 **KA3**-一致的。

假设要证结果不成立，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-[\alpha_A]}$ 和 $\psi_1, \dots, \psi_m \in w^{-K_A}$ 使得

$$\vdash \neg (\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m)。$$

令 $\phi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ 且 $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m$ ，则易得 $\vdash K_A \psi \rightarrow K_A \neg \phi$ 。易证 $K_A \psi \in w$ ，所以 $K_A \neg \phi \in w$ 。再据 $K_A \alpha \in w$ 和公理 $KA3_{\alpha A}$ ，我们有 $\neg [\alpha_A] \phi \in w$ 。另一方面，易证 $[\alpha_A] \phi \in w$ 。矛盾。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证：对所有 $u \in W$ ，若 $wR_{\alpha A} u$ ，则 $\sim wR_A u$ 。

任给 $u \in W$ 使得 $w^{-[\alpha_A]} \subseteq u$ 。要证：

① $w^{-K_A} \not\subseteq u$ 。

据 $AKK_{\alpha A}$, $[\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha \in w$ 。再据 $w^{-[\alpha_A]} \subseteq u$, 我们有 $\langle K_A \rangle K_A \alpha \in u$, 所以

② $\neg \langle K_A \rangle K_A \alpha \notin u$ 。

另一方面, 因为 $K_A \alpha \notin w$ 。所以 $\neg K_A \alpha \in w$ 。据 $W5_{\alpha A}$, 有 $K_A \neg K_A \alpha \in w$, 再据 **DES5** 的内定理 $K_A \phi \rightarrow K_A K_A \phi$, 有 $K_A K_A \neg K_A \alpha \in w$, 所以 $K_A \neg \langle K_A \rangle K_A \alpha \in w$, 因此 $\neg \langle K_A \rangle K_A \alpha \in w^{-K_A}$ 。再据②, 易见①成立。 $\perp$

说明: (1) 易见 $KA3_{\alpha A}$ 是有效式。如前增加 $W5_{\alpha A}$ 和 $AKK_{\alpha A}$ 对应的框架条件, 我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

(2) 易证下列是 **KA3** 的内定理:

$$K_A \alpha \rightarrow K_A \phi \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \phi, \quad [\alpha_A] \phi \wedge K_A \neg \phi \rightarrow \neg K_A \alpha。$$

第 2 个公式似乎仍有不自然之处。

第 4 个方案: 从另一方面弱化 **KA1** 的代表公理:

$$(KA4_{\alpha A}) K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \phi。$$

本质上 $KA4_{\alpha A}$ 就是第 5 节的 $AK1_{\alpha A}$, 如我们把其中的 $\alpha_A K$ 改成 $K_A \alpha$ 。仿效 **AK** 我们可以建立相应的系统 **KA4** 且证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理: 下面我们考虑 **KA4** 的一个弱化系统。

定义知道一个活动的系统 **KA4_K** 是在 **DEK** 上增加下列公理得到的系统:

$$(KA4_{\alpha A}) K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \phi,$$

$$(W5_{\alpha A}) \neg K_A \alpha \rightarrow K_A \neg K_A \alpha,$$

$$(AKM_{\alpha A}) \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha。$$

易见 **KA4_K** 有下列固定点公式为内定理: $K_A \alpha \leftrightarrow (\langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle K_A \alpha)$ 。

真值集定义 $w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow R_{\alpha A}(w) \subseteq R_A(w)$, 对所有 $w \in W$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。这里我们换一种方法 (不同于第 5 节的相关内容) 证明典范框架主引理。我们先证:

$$(\%) R_{\alpha A}(w) \subseteq R_A(w) \Leftrightarrow \text{对所有 } \phi \in \text{Form}, \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \phi \in w。$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $R_{\alpha A}(w) \subseteq R_A(w)$ 。任给 $\phi \in \text{Form}$ 使得 $\langle \alpha_A \rangle \phi \in w$ 。如通常易证:

存在 $u \in W$ 使得 $w R_{\alpha A} u$ 且 $\phi \in u$ 。

据设定, 存在 $u \in W$ 使得 $w R_A u$ 且 $\phi \in u$ 。由此易证 $\langle K_A \rangle \phi \in w$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $R_{\alpha A}(w) \not\subseteq R_A(w)$ 。设存在 $u \in W$ 使得 $w^{-[\alpha_A]} \subseteq u$ 且 $w^{-K_A} \not\subseteq u$ 。据后者, 存在 $\phi \in \text{Form}$

使得 $K_A \phi \in w$ 且 $\phi \notin u$ 。据后者和 $w^{-[\alpha_A]} \subseteq u$, 有 $\phi \notin w^{-[\alpha_A]}$, 所以 $[\alpha_A] \phi \notin w$, 故 $\langle \alpha_A \rangle \neg \phi \in w$ 。

另一方面, 据 $K_A \phi \in w$, 有 $\neg \langle K_A \rangle \neg \phi \in w$ 。总之,

存在 $\neg \phi \in \text{Form}$ 使得 $\langle \alpha_A \rangle \neg \phi \wedge \neg \langle K_A \rangle \neg \phi \in w$ 。

这样我们证明了 (%)。再证:

$$(\#) K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \text{对所有 } \phi \in \text{Form}, \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \phi \in w。$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 据公理 $KA3_{\alpha A}$ 显然。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证:

① 存在 $\phi \in \text{Form}$ 使得 $\langle \alpha_A \rangle \phi \wedge \neg \langle K_A \rangle \phi \in w$ 。

据设定和公理 $W5_{\alpha A}$, 我们有 $K_A \neg K_A \alpha \in w$, 所以

② $\neg \langle K_A \rangle K_A \alpha \in w$ 。

另一方面, 据公理 $AKM_{\alpha A}$, 有

③ $\langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \in w$ 。

令 $\varphi = K_A \alpha$ 。据③和②, 易见①成立。这样我们证明了 (＃) 成立。

据 (％) 和 (＃) 有:

典范框架主引理 $K_A \alpha \in w \Leftrightarrow R_{\alpha A}(w) \subseteq R_A(w)$ 。┐

易见 $KA4_{\alpha A}$ 是有效式。如前增加 $W5_{\alpha A}$ 和 $AKM_{\alpha A}$ 对应的框架条件, 我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第 2 组方案: 这组方案考虑代表公理的后件模态叠加的情况。

第 1 个方案: 定义知道一个活动的系统 **KAI1** 如下: **KAI1** 是在 **DES5** 中加下列公理:

($KAI1_{\alpha A}$) $K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \varphi \rightarrow K_A [\alpha_A] \varphi$,

($5I1_{\alpha A}$) $\neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \neg K_A \alpha$, (一种负反思)

($AKK_{\alpha A}$) $[\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。

说明: 代表公理 $KAI1_{\alpha A}$ 表示: 若 A 知道 α , 则 A 知道它做了 α 产生的后果。这很自然。自代入公理 $5I1_{\alpha A}$ 和 $AKK_{\alpha A}$ 在我们看来也很自然。

易见 **KAI1** 有下列固定点公式为内定理:

$K_A \alpha \leftrightarrow ([\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha \rightarrow K_A [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha)$ 。

真值集定义 $w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \forall uv \in W (wR_A u \text{ 且 } uR_{A\alpha} v \Rightarrow wR_{A\alpha} v)$, 对所有 $w \in W$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**:

$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \forall uv \in W (wR_A u \text{ 且 } uR_{A\alpha} v \Rightarrow wR_{A\alpha} v)$, 对所有 $w \in W$ 。

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \in w$ 。任给 $u, v \in W$ 使得 $wR_A u$ 且 $uR_{A\alpha} v$ 。要证 $wR_{A\alpha} v$ 。任给 $[\alpha_A] \varphi \in w$, 再据设定和公理 $KAI1_{\alpha A}$, 有 $K_A [\alpha_A] \varphi \in w$, 再据 $wR_A u$ 且 $uR_{A\alpha} v$, 易证 $\varphi \in v$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证:

① 存在 $u, v \in W$ 使得 $wR_A u$ 且 $uR_{A\alpha} v$ 且 $\sim wR_{A\alpha} v$ 。

据 $AKK_{\alpha A}$, 我们有

② $\langle K_A \rangle K_A \alpha \in w^{-[\alpha_A]}$ 。

假设 $\Phi = w^{-K_A} \cup \{ \neg [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha \}$ 不是 **KAI1**-一致的, 则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-K_A}$ 使得

$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。

易证 $\vdash K_A \varphi_1 \wedge \dots \wedge K_A \varphi_n \rightarrow K_A [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。据 $5I1_{\alpha A}$, 易证 $K_A \alpha \in w$, 矛盾于设定。所以 Φ 是 **KAI1**-一致的, 据 Lindenbaum-引理,

③ 存在 $u \in W$ 使得 $wR_A u$ 且 $\neg [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha \in u$ 。

假设 $\Psi = u^{-[\alpha_A]} \cup \{ \neg \langle K_A \rangle K_A \alpha \}$ 不是 **KAI1**-一致的, 则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in u^{-[\alpha_A]}$ 使得

$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。

易证 $\vdash [\alpha_A] \varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A] \varphi_n \rightarrow [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。所以 $[\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha \in u$, 矛盾于③。所以 Ψ 是 **KAI1**-一致的, 据 Lindenbaum-引理,

④ 存在 $v \in W$ 使得 $uR_{A\alpha} v$ 且 $\neg \langle K_A \rangle K_A \alpha \in v$ 。

据 $\neg \langle K_A \rangle K_A \alpha \in v$ 和②, 易见 $\sim wR_{A\alpha} v$ 。再据③和④, 易见①成立。┐

易见 $KAI1_{\alpha A}$ 是有效式。如前增加 $5I1_{\alpha A}$ 和 $AKK_{\alpha A}$ 对应的框架条件, 我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第 2 个方案: 定义知道一个活动的系统 **KAI2** 如下: **KAI2** 是在 **DES5** 中加下列公理:

$$(KAI2_{\alpha A}) K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow K_A \langle \alpha_A \rangle \phi,$$

$$(5I2_{\alpha A}) \neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A] \neg K_A \alpha, \quad (\text{一种负反思})$$

$$(AKM_{\alpha A}) \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha.$$

说明： $KAI2_{\alpha A}$ 表示：若 A 知道 α ，则 A 知道它做了 α 可能产生的后果。从直观意义看，上述公理可以自然地表述为：

$$(KAI2^*_{\alpha A}) K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha \rangle \phi \rightarrow K_A \langle \alpha \rangle \phi,$$

$$(5I2^*_{\alpha A}) \neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha] \neg K_A \alpha,$$

$$(AKM^*_{\alpha A}) \langle \alpha \rangle K_A \alpha.$$

上述 α 可以看作是一种抽象活动。前面和后面的系统也可如此处理。后面我们还要讨论。

下列是 **KAI2** 的内定理：

$$(1) K_A \alpha \leftrightarrow (\langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \rightarrow K_A \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha), \quad (\text{固定点公式})$$

$$(2) \neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A] [\alpha_A] \neg K_A \alpha.$$

证明 (2)：据 $AKM_{\alpha A}$ 和关于 K_A 的单调规则，有 $K_A \langle \alpha_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \rightarrow K_A \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha$ ，再逆否，有 $\langle K_A \rangle [\alpha_A] \neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A] [\alpha_A] \neg K_A \alpha$ ，再据 $5I2_{\alpha A}$ 。

真值集定义 $w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \forall uv \in W (wR_{\alpha A} u \text{ 且 } wR_A v \Rightarrow vR_{\alpha A} u)$ ，对所有 $w \in W$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**：

$$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \forall uv \in W (wR_{\alpha A} u \text{ 且 } wR_A v \Rightarrow vR_{\alpha A} u), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $K_A \alpha \in w$ 。任给 $u, v \in W$ 使得 $wR_{\alpha A} u$ 且 $wR_A v$ 。要证 $vR_{\alpha A} u$ 。任给 $[\alpha_A] \phi \in v$ ，再据 $wR_A v$ ， $\langle K_A \rangle [\alpha_A] \phi \in w$ ，再据设定和公理 $KAI2_{\alpha A}$ ，有 $[\alpha_A] \phi \in w$ ，再据 $wR_{\alpha A} u$ ，易证 $\phi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证：

$$\textcircled{1} \text{ 存在 } u, v \in W \text{ 使得 } wR_{\alpha A} u \text{ 且 } wR_A v \text{ 且 } \sim vR_{\alpha A} u.$$

假设 $\Phi = w^{-[\alpha_A]} \cup \{K_A \alpha\}$ 不是 **KAI2**-一致的，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \neg K_A \alpha.$$

易证 $\vdash [\alpha_A] \phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A] \phi_n \rightarrow [\alpha_A] \neg K_A \alpha$ ，所以 $[\alpha_A] \neg K_A \alpha \in w$ ，矛盾于公理 $AKM_{\alpha A}$ 属于 w 。所以 Φ 是 **KAI2**-一致的，据 Lindenbaum-引理，

$$\textcircled{2} \text{ 存在 } u \in W \text{ 使得 } wR_{\alpha A} u \text{ 且 } K_A \alpha \in u.$$

假设 $\Psi = w^{-K_A} \cup \{\neg \langle \alpha_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha\}$ 不是 **KAI2**-一致的，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-K_A}$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \neg \langle \alpha_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha.$$

易证 $\vdash K_A \phi_1 \wedge \dots \wedge K_A \phi_n \rightarrow K_A \neg \langle \alpha_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha$ ，所以 $K_A \neg \langle \alpha_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \in w$ ，再据上面的内定理 (2)，有 $K_A \alpha \in w$ ，矛盾于设定。所以 Ψ 是 **KAI2**-一致的，据 Lindenbaum-引理，

$$\textcircled{3} \text{ 存在 } v \in W \text{ 使得 } wR_A v \text{ 且 } \neg \langle \alpha_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \in v.$$

假设 $vR_{\alpha A} u$ ，据 $\textcircled{3}$ 的 $\neg \langle \alpha_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \in v$ ，有 $\neg \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \in u$ ，矛盾于公理 $AKM_{\alpha A}$ 属于 u 。所以 $\sim vR_{\alpha A} u$ 。再据 $\textcircled{2}$ 和 $\textcircled{3}$ ，易见 $\textcircled{1}$ 成立。⊥

易见 $KAI2_{\alpha A}$ 是有效式。如前增加 $5I2_{\alpha A}$ 和 $AKM_{\alpha A}$ 对应的框架条件，我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第 3 个方案：定义知道一个活动的系统 **KAI3** 如下：**KAI3** 是在 **DES5** 中加下列公理：

$$(KAI3_{\alpha A}) K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle \phi,$$

$$(5I3_{\alpha A}) \neg K_A \alpha \rightarrow K_A [\alpha_A] \langle K_A \rangle \neg K_A \alpha,$$

$$(AKKM_{\alpha A}) \langle \alpha_A \rangle K_A K_A \alpha.$$

说明： $KAI3_{\alpha A}$ 表示：若 A 知道 α ，则 A 可能知道它做了 α 可能产生的后果。这是在一种非常弱的意义上刻画知道一个活动这一思想：“A 知道 α ”表示“A 可能知道 α ”。 $5I3_{\alpha A}$ 在某

种程度上刻画了一种负反思。我们认为此公理也比较自然。

易证 **KAI3** 有下面的固定点公式为内定理：

$$K_A\alpha \leftrightarrow (\langle \alpha_A \rangle K_A K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A K_A \alpha).$$

真值集定义 $w \in [K_A\alpha] \Leftrightarrow \forall u \in W(wR_{A\alpha}u \Rightarrow \exists v \in W(wR_{AV} \text{ 且 } vR_{A\alpha}u))$, 对所有 $w \in W$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**：

$$K_A\alpha \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(wR_{A\alpha}u \Rightarrow \exists v \in W(wR_{AV} \text{ 且 } vR_{A\alpha}u)), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $K_A\alpha \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}u$ 。要证：存在 $v \in W$ 使得 wR_{AV} 且 $vR_{A\alpha}u$ 。

据 Lindenbaum-引理，只须证 $w^{-K_A} \cup u^{+\langle \alpha_A \rangle}$ 是 **KAI3**-一致的。设要证结果不成立，则存在 $\phi_1, \dots,$

$\phi_n \in w^{-K_A}$ 和 $\langle \alpha_A \rangle \psi_1, \dots, \langle \alpha_A \rangle \psi_m \in u^{+\langle \alpha_A \rangle}$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \neg(\langle \alpha_A \rangle \psi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha_A \rangle \psi_m).$$

令 $\phi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ 且 $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m$ ，易证 $\vdash K_A\phi \rightarrow K_A\neg\langle \alpha_A \rangle\psi$ 。因为 $K_A\phi \in w$ ，所以我们有 $K_A\neg\langle \alpha_A \rangle\psi \in w$ ，再据设定 $K_A\alpha \in w$ 和 **KAI3** $_{\alpha A}$ ， $\neg\langle \alpha_A \rangle\psi \in w$ ，再据 $wR_{A\alpha}u$ ，有 $\neg\psi \in u$ 。另一

方面， $\langle \alpha_A \rangle \psi_1, \dots, \langle \alpha_A \rangle \psi_m \in u^{+\langle \alpha_A \rangle}$ ，所以 $\psi \in u$ 。矛盾。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K_A\alpha \notin w$ 。要证：

① 存在 $u \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}u$ 且任给 $v \in W$ ，若 wR_{AV} ，则 $\sim vR_{A\alpha}u$ 。

假设 $w^{-[\alpha_A]} \cup \{\neg\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha\}$ 不是 **KAI3**-一致的，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \langle K_A \rangle \neg K_A\alpha.$$

易证 $\vdash [\alpha_A]\phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A]\phi_n \rightarrow [\alpha_A]\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha$ ，所以 $[\alpha_A]\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha \in w$ ，矛盾于 **AKKM** $_{\alpha A}$ 属于 w 。据 Lindenbaum-引理，

② 存在 $u \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}u$ 且 $\neg\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha \in u$ 。

任给 $v \in W$ 使得 wR_{AV} 。为了证明①，据②，我们只须证 $\sim vR_{A\alpha}u$ 。据设定和 **5I3** $_{\alpha A}$ ，我们有 $K_A[\alpha_A]\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha \in w$ ，再据 wR_{AV} ，有 $[\alpha_A]\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha \in v$ ，所以 $\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha \in v^{-[\alpha_A]}$ ，再据②的 $\neg\langle K_A \rangle \neg K_A\alpha \in u$ ，易见 $\sim vR_{A\alpha}u$ 。┐

易见 **KAI3** $_{\alpha A}$ 是有效式。如前增加 **5I3** $_{\alpha A}$ 和 **AKKM** $_{\alpha A}$ 对应的框架条件，我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第 4 个方案：定义知道一个活动的系统 **KAI4** 如下：**KAI4** 是在 **DES5** 中加下列公理：

$$(\text{KAI4}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A]\phi,$$

$$(\text{5I4}_{\alpha A}) \quad \neg K_A\alpha \rightarrow K_A\langle \alpha_A \rangle K_A\neg K_A\alpha, \quad (\text{一种负反思})$$

$$(\text{AKKM2}_{\alpha A}) \quad \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A\alpha.$$

说明：**KAI4** $_{\alpha A}$ 也在一种非常弱的意义上刻画知道一个活动这一思想：“A 知道 α ”表示一种“A 可能知道 α ”。

易证 **KAI4** 有下面的固定点公式为内定理：

$$K_A\alpha \leftrightarrow (\langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A\alpha \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A]\langle K_A \rangle K_A\alpha).$$

真值集定义 对所有 $w \in W$,

$$w \in [K_A\alpha] \Leftrightarrow \forall u \in W(wR_{A\alpha}u \Rightarrow \exists v \in W(wR_{AV} \text{ 且 } \forall x \in W(vR_{A\alpha}x \Rightarrow x=u))).$$

说明：上述 v 是 $R_{A\alpha}$ -死点或据 $R_{A\alpha}$ 只通达 u 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**：对所有 $w \in W$,

$$K_A\alpha \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(wR_{A\alpha}u \Rightarrow \exists v \in W(wR_{AV} \text{ 且 } \forall x \in W(vR_{A\alpha}x \Rightarrow x=u))).$$

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $K_A\alpha \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}u$ 。要证：

① $\exists v \in W(wR_{A\alpha}v \text{ 且 } \forall x \in W(vR_{A\alpha}x \Rightarrow x=u))$ 。

令 $u^{+[\alpha_A]} = \{[\alpha_A]\varphi : \varphi \in u\}$ 。先证：

② $w^{-K_A} \cup u^{+[\alpha_A]}$ 是 **KAI4**-一致的。

设要证结果不成立，则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-K_A}$ 和 $[\alpha_A]\psi_1, \dots, [\alpha_A]\psi_m \in u^{+[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg([\alpha_A]\psi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A]\psi_m)。$$

令 $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ 且 $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m$ ，易证 $\vdash K_A\varphi \rightarrow K_A\neg[\alpha_A]\psi$ ，所以 $K_A\neg[\alpha_A]\psi \in w$ ，再据设定 $K_A\alpha \in w$ 和公理 **KAI4** _{α_A} ， $[\alpha_A]\neg\psi$ ，再据 $wR_{A\alpha}u$ ，有 $\neg\psi \in u$ 。因为 $[\alpha_A]\psi_1, \dots, [\alpha_A]\psi_m \in u^{+[\alpha_A]}$ ，所以 $\psi \in u$ 。矛盾。据 Lindenbaum-引理，

③ 存在 $v \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}v$ 且 $u^{+[\alpha_A]} \subseteq v$ 。

任给 $x \in W$ 使得 $vR_{A\alpha}x$ 。为证①，据③，我们只须证 $x=u$ 。据极大一致集的反链性，只须证 $u \subseteq x$ 。任给 $\varphi \in u$ ，有 $[\alpha_A]\varphi \in u^{+[\alpha_A]}$ ，据③，有 $[\alpha_A]\varphi \in v$ 。再据 $vR_{A\alpha}x$ ，有 $\varphi \in x$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K_A\alpha \notin w$ 。要证：

① 存在 $u \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}u$ 且任给 $v \in W$ ，若 $wR_{A\alpha}v$ ，则存在 $x \in W$ 使得 $vR_{A\alpha}x$ 且 $x \neq u$ 。

假设 $w^{-[\alpha_A]} \cup \{<K_A>K_A\alpha\}$ 不是 **KAI4**-一致的，则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg <K_A>K_A\alpha。$$

易证 $\vdash [\alpha_A]\varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A]\varphi_n \rightarrow [\alpha_A]\neg <K_A>K_A\alpha$ ，所以 $[\alpha_A]\neg <K_A>K_A\alpha \in w$ ，矛盾于 **AKKM2** _{α_A} 属于 w 。据 Lindenbaum-引理，

② 存在 $u \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}u$ 且 $<K_A>K_A\alpha \in u$ 。

任给 $v \in W$ 使得 $wR_{A\alpha}v$ 。为了证明①，据②，我们只须证：

③ 存在 $x \in W$ 使得 $vR_{A\alpha}x$ 且 $x \neq u$ 。

假设 $v^{-[\alpha_A]} \cup \{<K_A>K_A\alpha\}$ 不是 **KAI4**-一致的，则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in v^{-[\alpha_A]}$ 使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow <K_A>K_A\alpha。$$

易证 $\vdash [\alpha_A]\varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A]\varphi_n \rightarrow [\alpha_A]<K_A>K_A\alpha$ ，所以 $[\alpha_A]<K_A>K_A\alpha \in w$ ，再据公理 **T**_A，我们有 $<K_A>[\alpha_A]<K_A>K_A\alpha \in w$ ，再据 **5I4** _{α_A} ，有 $K_A\alpha \in w$ ，矛盾于设定。据 Lindenbaum-引理，

④ 存在 $x \in W$ 使得 $vR_{A\alpha}x$ 且 $\neg <K_A>K_A\alpha \in x$ 。

据②和④，易见 $x \neq u$ 。再据④，易见③成立。 $\dashv$

易证 **KAI4** _{α_A} 是有效式。如前增加 **5I4** _{α_A} 和 **AKKM2** _{α_A} 对应的框架条件，我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第5个方案：定义知道一个活动的系统 **KAI5** 如下：**KAI5** 是在 **DES5** 中加下列公理：

$$(\text{KAI5}_{\alpha_A}) K_A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow <K_A>[\alpha_A]\varphi,$$

$$(\text{5I5}_{\alpha_A}) \neg K_A\alpha \rightarrow K_A<\alpha_A>K_A\neg K_A\alpha,$$

$$(\text{AKK}_{\alpha_A}) [\alpha_A]<K_A>K_A\alpha。$$

说明：**KAI5** _{α_A} 也在一种比较弱的意义上刻画知道一个活动这一思想：“A 知道 α ”表示一种“A 可能知道 α ”。**5I5** _{α_A} 在某种程度上刻画了一种负反思。我们认为此公理也比较自然。

易证 **KAI5** 有下列固定点公式为内定理:

$$K_A\alpha \leftrightarrow ([\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A\alpha \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A\alpha).$$

真值集定义 $w \in [K_A\alpha] \Leftrightarrow \exists u \in W(wR_Au \text{ 且 } R_{A\alpha}(u) \subseteq R_{A\alpha}(w))$, 对所有 $w \in W$.

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4. 下证 **典范框架主引理**:

$$K_A\alpha \in w \Leftrightarrow \exists u \in W(wR_Au \text{ 且 } R_{A\alpha}(u) \subseteq R_{A\alpha}(w)), \text{ 对所有 } w \in W.$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $K_A\alpha \in w$. 要证:

$$\textcircled{1} \text{ 存在 } u \in W \text{ 使得 } w^{-K_A} \subseteq u \text{ 且 } \forall v \in W(u^{-[\alpha_A]} \subseteq v \Rightarrow w^{-[\alpha_A]} \subseteq v).$$

假设 $w^{-K_A} \cup \{[\alpha_A]\varphi: [\alpha_A]\varphi \in w\}$ 不是 **KAI5**-一致的. 则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-K_A}$ 和 $[\alpha_A]\psi_1, \dots, [\alpha_A]\psi_m \in w$ 使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg([\alpha_A]\psi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A]\psi_m).$$

令 $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ 且 $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m$, 易证 $\vdash K_A\varphi \rightarrow K_A\neg[\alpha_A]\psi$, 所以 $K_A\neg[\alpha_A]\psi \in w$, 再据设定 $K_A\alpha \in w$ 和公理 **KAI5** $_{\alpha A}$, 有 $\neg[\alpha_A]\psi \in w$. 另一方面, 易见 $[\alpha_A]\psi \in w$. 矛盾.

据 Lindenbaum-引理, 存在 $u \in W$ 使得

$$\textcircled{2} \text{ } w^{-K_A} \subseteq u \text{ 且 } \{[\alpha_A]\varphi: [\alpha_A]\varphi \in w\} \subseteq u.$$

任给 $v \in W$ 使得 $u^{-[\alpha_A]} \subseteq v$. 为了证明 $\textcircled{1}$, 只须证 $w^{-[\alpha_A]} \subseteq v$. 任给 $\varphi \in w^{-[\alpha_A]}$, 则 $[\alpha_A]\varphi \in w$,

据 $\textcircled{2}$, $[\alpha_A]\varphi \in u$, 再据 $u^{-[\alpha_A]} \subseteq v$, 有 $\varphi \in v$.

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $K_A\alpha \notin w$. 要证:

$$\textcircled{3} \text{ 任给 } u \in W, \text{ 若 } w^{-K_A} \subseteq u, \text{ 则存在 } v \in W \text{ 使得 } u^{-[\alpha_A]} \subseteq v \text{ 且 } w^{-[\alpha_A]} \not\subseteq v.$$

任给 $u \in W$ 使得 $w^{-K_A} \subseteq u$. 假设 $u^{-[\alpha_A]} \cup \{\neg \langle K_A \rangle K_A\alpha\}$ 不是 **KAI5**-一致的, 则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in u$

$u^{-[\alpha_A]}$ 使得 $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \langle K_A \rangle K_A\alpha$. 易证

$$\vdash [\alpha_A]\varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A]\varphi_n \rightarrow [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A\alpha,$$

所以 $[\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A\alpha \in u$, 因为 $w^{-K_A} \subseteq u$, 故 $\langle K_A \rangle [\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A\alpha \in w$, 再据公理 **5I5** $_{\alpha A}$, $K_A\alpha \in w$. 矛盾于设定. 据 Lindenbaum-引理,

$$\textcircled{4} \text{ 存在 } v \in W \text{ 使得 } u^{-[\alpha_A]} \subseteq v \text{ 且 } \neg \langle K_A \rangle K_A\alpha \in v.$$

因为公理 **AKK** $_{\alpha A} \in w$, 故 $\langle K_A \rangle K_A\alpha \in w^{-[\alpha_A]}$, 再据 $\textcircled{4}$ 的 $\neg \langle K_A \rangle K_A\alpha \in v$, 有 $w^{-[\alpha_A]} \not\subseteq v$. $\perp$

易证 **KAI5** $_{\alpha A}$ 是有效式. 如前增加 **5I5** $_{\alpha A}$ 和 **AKK** $_{\alpha A}$ 对应的框架条件, 我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理.

根据排列组合, 我们可以列出全部相应的代表公理:

$$\begin{aligned} (\text{KAI1}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow K_A[\alpha_A]\varphi, & \quad (\text{KAI2}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow K_A \langle \alpha_A \rangle \varphi, \\ (\text{KAI3}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle \varphi, & \quad (\text{KAI4}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A]\varphi, \\ (\text{KAI5}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A]\varphi, & \quad (\text{KAI6}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow K_A[\alpha_A]\varphi, \\ (\text{KAI7}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle \varphi, & \quad (\text{KAI8}_{\alpha A}) \quad K_A\alpha \rightarrow [\alpha_A]\varphi \rightarrow \langle K_A \rangle [\alpha_A]\varphi, \end{aligned}$$

相对最后 3 个公式我们可以构造相应的自代入系统 **KAI6—KAI8**, 并证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理.

现在我们考虑另一类模态叠加. 比方说, 我们先考虑真值集定义

(#) $w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \forall uv \in W (uR_{A\alpha}v \text{ 且 } wR_Au \Rightarrow wR_Av)$, 对所有 $w \in W$ 。

此定义是相当自然的。它表示 A 在一定程度上认知^① 它做了活动 α 引起的状态改变。

下证这样的语义可以对应系统 **KAI9**。^② **KAI9** 定义为 **DES5** 加下列公理：

(**KAI9** _{αA}) $K_A \alpha \rightarrow K_A \phi \rightarrow K_A [\alpha_A] \phi$,

(**5I9** _{αA}) $\neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle [\alpha_A] K_A \neg K_A \alpha$, (一种负反思)

(**KAK** _{αA}) $K_A \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。

说明：**KAI9** _{αA} 表示：若 A 知道 α 且 A 知道 ϕ ，则它知道它做了 α 必然产生结果 ϕ 。若感到这样的公理的直观意义不自然，一个消解方案是限制 ϕ 的取值范围在某个公式集中使得此公式集在语用上表示某个应用范围。

易证 **KAI9** 有下面的**固定点公式**为内定理：

$K_A \alpha \leftrightarrow (K_A \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \rightarrow K_A [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha)$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**：

$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \forall uv \in W (uR_{A\alpha}v \text{ 且 } wR_Au \Rightarrow wR_Av)$, 对所有 $w \in W$ 。

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $K_A \alpha \in w$ 。任给 $u, v \in W$ 使得 $uR_{A\alpha}v$ 且 wR_Au 。要证 wR_Av 。任给 $K_A \phi \in w$ ，再据设定和公理 **KAI9** _{αA} ，有 $K_A [\alpha_A] \phi \in w$ ，再据 wR_Au 且 $uR_{A\alpha}v$ ，易证 $\phi \in v$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证：

① 存在 $u, v \in W$ 使得 $uR_{A\alpha}v$ 且 wR_Au 且 $\sim wR_Av$ 。

据 **KAK** _{αA} ，我们有

② $K_A \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \in w$ 。

假设 $w^{-K_A} \cup \{ \neg [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \}$ 不是 **KAI9**-一致的，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w^{-K_A}$ 使得

$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。

易证 $\vdash K_A \phi_1 \wedge \dots \wedge K_A \phi_n \rightarrow K_A [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。据 **5I9** _{αA} ，有 $K_A \alpha \in w$ ，矛盾于设定。

据 **Lindenbaum**-引理，

③ 存在 $u \in W$ 使得 wR_Au 且 $\neg [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \in u$ 。

假设 $u^{-[\alpha_A]} \cup \{ \neg \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \}$ 不是 **KAI9**-一致的，则存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in u^{-[\alpha_A]}$ 使得

$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。

易证 $\vdash [\alpha_A] \phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_A] \phi_n \rightarrow [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。所以 $[\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \in u$ ，矛盾于③。

据 **Lindenbaum**-引理，

④ 存在 $v \in W$ 使得 $uR_{A\alpha}v$ 且 $\neg \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \in v$ 。

据②， $\langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha \in w^{-K_A}$ ，再据④，有 $\sim wR_Av$ 。再据③和④，易见①成立。 $\vdash$

易见 **KAI9** _{αA} 是有效式。如前增加 **5I9** _{αA} 和 **KAK** _{αA} 对应的框架条件，我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

上面系统的一个变种是 **DES5** 加下列公理：

(**KAI9** _{αA}) $K_A \alpha \rightarrow K_A \phi \rightarrow K_A [\alpha_A] \phi$,

(**5I9*** _{αA}) $\langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle [\alpha_A] K_A \neg K_A \alpha$, (一种负反思的强化)

(**KAK*** _{αA}) $\neg K_A \alpha \rightarrow K_A \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \alpha$ 。

我们可以去掉上一 (#) 中 $R_{A\alpha}$ 的下标 A，从而表达 A 认知由于 (某个主体) 做了活动

^① 这里的认知用认知通达关系来表示。

^② 这样的语义也可以对应其他系统。例如 **DES5** 加

$$K_A \alpha \rightarrow K_A \phi \rightarrow K_A [\alpha_A] \phi, \quad \neg K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha_A \rangle K_A \neg K_A \alpha, \quad K_A \langle K_A \rangle K_A \alpha。$$

α (如通常 **PDL** 的处理, 参见后列文献 [10]) 引起的状态改变:

$$w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \forall uv \in W (uR_\alpha v \text{ 且 } wR_A u \Rightarrow wR_A v)。$$

当然, 要表达主体**全面**认知由于做了活动 α 引起的状态改变, 更自然的定义是:

$$w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \forall uv \in W (uR_\alpha v \Rightarrow wR_A u \text{ 且 } wR_A v)。$$

但这种定义下我们似乎不能建立相应的系统。

根据排列组合, 我们还可以构造相应的系统, 并证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

我们还可以考虑另一类模态叠加。比方说, 考虑代表公理

$$K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \phi \rightarrow [\alpha_A] K_A \phi, \quad K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] (\phi \rightarrow K_A \phi), \quad K_A \alpha \rightarrow K_A [\alpha_A] (\phi \rightarrow K_A \phi), \dots$$

第 1 个代表公理的自代入公理可以是:

$$[\alpha_A] \langle K_A \rangle K_A \alpha, \quad \neg K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \langle K_A \rangle K_A \neg K_A \alpha。$$

从本节以上的结果, 我们可以看到, 我们构造的系统和建立的语义总能使核心公理有效, 而自代入公理则没有这样的性质, 所以要增加对应它们的框架条件。

第 3 组方案: 前面我们用 $uR_{\alpha A} w$ 来刻画“在 w 中 A 做了活动 α ”。本组方案考虑这个因素: 我们考虑的真值集定义隐表示 $A\alpha$, 即 $w \in [K_A \alpha]$ 的定义包含 $uR_{\alpha A} w$ 。

第 1 个方案: 考虑真值集定义:

$$w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \exists u \in W (uR_{\alpha A} w \text{ 且 } uR_A w), \quad \text{对所有 } w \in W。$$

这也刻画了知行之间的一种关系, 倒不见得能直观解释为“ A 知道活动 α ”, 将来我们再给出一个自然的解释。

定义知道一个活动的系统 **KAA1** 如下: **KAA1** 是在 **DES5** 中增加下列公理和规则:

$$(KAA1_{\alpha A}) \quad [\alpha_A] K_A \alpha \vee K_A K_A \alpha,$$

$$(RKAA1_{\alpha A}) \quad [\alpha_A] \phi \vee K_A \psi / K_A \alpha \rightarrow \phi \vee \psi。$$

据 $KAA1_{\alpha A}$ 和 T_A , 我们有内定理 $[\alpha_A] K_A \alpha \vee K_A \alpha$ 。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。我们只证**典范框架主引理**:

$$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \exists u \in W (uR_{\alpha A} w \text{ 且 } uR_A w), \quad \text{对所有 } w \in W。$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \in w$ 。令

$$w^{+\langle \alpha_A \rangle} ::= \{ \langle \alpha_A \rangle \phi : \phi \in w \}, \quad w^{+\langle K_A \rangle} ::= \{ \langle K_A \rangle \phi : \phi \in w \}。$$

据 Lindenbaum-引理, 只须证 $w^{+\langle \alpha_A \rangle} \cup w^{+\langle K_A \rangle}$ 是 **KAA1**-一致的。设要证结果不成立, 则存在

$$\langle \alpha_A \rangle \phi_1, \dots, \langle \alpha_A \rangle \phi_n \in w^{+\langle \alpha_A \rangle} \text{ 和 } \langle K_A \rangle \psi_1, \dots, \langle K_A \rangle \psi_m \in w^{+\langle K_A \rangle} \text{ 使得}$$

$$\vdash \langle \alpha_A \rangle \phi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha_A \rangle \phi_n \rightarrow \neg (\langle K_A \rangle \psi_1 \wedge \dots \wedge \langle K_A \rangle \psi_m)。$$

令 $\phi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ 且 $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m$, 易证 $\vdash \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \neg \langle K_A \rangle \psi$, 所以 $\vdash [\alpha_A] \neg \phi \vee K_A \neg \psi$ 。据规则 $RKAA1_{\alpha A}$, 有 $\vdash \phi \wedge \psi \rightarrow \neg K_A \alpha$ 。易证 $\phi \in w$ 且 $\psi \in w$, 所以 $\neg K_A \alpha \in w$, 矛盾于设定。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证:

① 对所有 $u \in W$, 若 $uR_{\alpha A} w$, 则 $\sim uR_A w$ 。

任给 $u \in W$ 使得 $u^{-[\alpha_A]} \subseteq w$ 。要证:

② $u^{-K_A} \not\subseteq w$ 。

因为 $u^{-[\alpha_A]} \subseteq w$, 所以 $w^{+[\alpha_A]} \subseteq u$, 加上我们有 $\neg K_A \alpha \in w$, 所以 $\langle \alpha_A \rangle \neg K_A \alpha \in u$ 。再据 $KAA1_{\alpha A}$, 有 $K_A K_A \alpha \in u$, 所以 $K_A \alpha \in u^{-K_A}$ 。再据 $K_A \alpha \notin w$, 易见②成立。⊥

易见 $RKAA1_{\alpha A}$ 保持有效。如前增加 $KAA1_{\alpha A}$ 对应的框架条件, 我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第2个方案: 考虑真值集定义:

$$w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \exists u \in W (u R_{\alpha A} w \text{ 且 } w R_A u), \quad \text{对所有 } w \in W。$$

定义知道一个活动的系统 **KAA2** 如下: **KAA2** 是在 **DES5** 中加下列公理和规则:

$$(KAA2_{\alpha A}) \quad K_A[\alpha_A] < K_A > K_A \alpha,$$

$$(W5_{\alpha A}) \quad \neg K_A \alpha \rightarrow K_A \neg K_A \alpha,$$

$$(RKAA2_{\alpha A}) \quad [\alpha_A] \phi \vee \psi / K_A \alpha \rightarrow \phi \vee < K_A > \psi。$$

易得内定理

$$(1) \quad K_A \alpha \rightarrow \phi \rightarrow < K_A > \langle \alpha_A \rangle \phi, \quad (\text{据 } RKAA2_{\alpha A})$$

$$(2) \quad < K_A > \langle \alpha_A \rangle K_A \neg K_A \alpha \rightarrow K_A \alpha, \quad (\text{据 } KAA2_{\alpha A})$$

$$(3) \quad \neg K_A \neg K_A \alpha \rightarrow K_A \alpha. \quad (\text{据 } W5_{\alpha A})$$

因此我们有下列固定点公式作为内定理:

$$K_A \alpha \leftrightarrow (K_A \neg K_A \alpha \rightarrow < K_A > \langle \alpha_A \rangle K_A \neg K_A \alpha)。$$

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**:

$$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \exists u \in W (u R_{\alpha A} w \text{ 且 } w R_A u), \quad \text{对所有 } w \in W。$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \in w$ 。据 Lindenbaum-引理, 只须证 $w^{+[\alpha_A]} \cup w^{-K_A}$ 是 **KAA2**-一致的。

假设要证结果不成立, 则存在 $\langle \alpha_A \rangle \phi_1, \dots, \langle \alpha_A \rangle \phi_n \in w^{+[\alpha_A]}$ 和 $\psi_1, \dots, \psi_m \in w^{-K_A}$ 使得

$$\vdash \langle \alpha_A \rangle \phi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha_A \rangle \phi_n \rightarrow \neg (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m)。$$

令 $\phi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ 且 $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m$, 则易得 $\vdash \langle \alpha_A \rangle \phi \rightarrow \neg \psi$ 。再据 $RKAA2_{\alpha A}$, 我们有

$$\vdash \phi \wedge K_A \psi \rightarrow \neg K_A \alpha,$$

再据 $\phi, K_A \psi \in w$, 我们有 $\neg K_A \alpha \in w$ 。矛盾于假设。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \notin w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $u^{-[\alpha_A]} \subseteq w$ 。要证: $w^{-K_A} \not\subseteq u$ 。

据设定, 有 $\neg K_A \alpha \in w$, 再据 $W5_{\alpha A}$, 有 $K_A \neg K_A \alpha \in w$, 所以 $\langle \alpha_A \rangle K_A \neg K_A \alpha \in w^{+[\alpha_A]}$ 。因为

$u^{-[\alpha_A]} \subseteq w$, 所以 $w^{+[\alpha_A]} \subseteq u$ 。因此 $\langle \alpha_A \rangle K_A \neg K_A \alpha \in u$, 所以

$$(\#) \quad [\alpha_A] < K_A > K_A \alpha \notin u。$$

另一方面, 据 $KAA2_{\alpha A}$, 有 $K_A[\alpha_A] < K_A > K_A \alpha \in w$, 所以 $[\alpha_A] < K_A > K_A \alpha \in w^{-K_A}$, 再据 $(\#)$,

易见 $w^{-K_A} \not\subseteq u$ 。⊥

易见 $RKAA2_{\alpha A}$ 保持有效。如前增加 $KAA2_{\alpha A}$ 和 $W4_{\alpha A}$ 对应的框架条件, 我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第3个方案: 考虑真值集定义:

$$w \in [K_A \alpha] \Leftrightarrow \forall u \in W (u R_{\alpha A} w \Rightarrow w R_A u), \quad \text{对所有 } w \in W。$$

定义知道一个活动的系统 **KAA3** 如下: **KAA3** 是在 **DES5** 中加下列公理和规则:

$$(KAA31_{\alpha A}) \quad \langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A \varphi) \rightarrow \varphi,$$

$$(KAA32_{\alpha A}) \quad K_A \alpha \vee K_A \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha.$$

据 [13] 的定理 1.3.2 的类似证明, 我们有**弱推理规则**:

$$(\%) \quad \vdash \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \Rightarrow \vdash \varphi \rightarrow K_A \alpha.$$

另一方面, 易见下列是 **KAA3** 的内定理:

$$(1) \quad \langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A K_A \alpha) \rightarrow K_A \alpha, \quad (\text{据 } KAA31_{\alpha A})$$

$$(2) \quad K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha,$$

$$(3) \quad [\alpha_A] K_A \perp \rightarrow [\alpha_A] \neg K_A \alpha,$$

$$(4) \quad [\alpha_A] K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \langle \alpha_A \rangle \top,$$

$$(5) \quad K_A \alpha \vee \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha. \quad (\text{据 } KAA32_{\alpha A} \text{ 和 } T_A)$$

证明 (2): 据 $KAA31_{\alpha A}$, 有 $\langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A \neg K_A \alpha) \rightarrow \neg K_A \alpha$, 据 [13] 的定理 1.2.16 的 **R(8)** 的类似结果, 我们有 $[\alpha_A] K_A \alpha \wedge \langle \alpha_A \rangle K_A \neg K_A \alpha \rightarrow \neg K_A \alpha$, 逆否, 有 (2)。

证明 (3): 据 $KAA31_{\alpha A}$, 有 $\langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A \perp) \rightarrow \perp$, 逆否和分离, 我们有 $[\alpha_A] (K_A \perp \rightarrow \neg K_A \alpha)$, 再据公理 $K_{\alpha A}$, 有 (3)。

证明 (4): 据 (3) 的证明, 有 $\langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A \perp) \rightarrow \perp$, 据 [13] 的定理 1.2.16 的 **R(8)** 的类似结果, 有 $[\alpha_A] K_A \alpha \wedge \langle \alpha_A \rangle K_A \perp \rightarrow \perp$, 逆否和分离, 我们有 (4)。

设我们在 **KAA3** 中加入直观意义自然的公理 $K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha$ 和 $K_A \alpha \rightarrow K_A K_A \alpha$ 。据后者易证内定理

$$\langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A K_A \alpha),$$

再据前者有 $K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A K_A \alpha)$, 再加上 (1), 我们有固定点公式

$$K_A \alpha \leftrightarrow \langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A K_A \alpha).$$

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**:

$$K_A \alpha \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (u R_{\alpha A} w \Rightarrow w R_A u), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $u \stackrel{[\alpha_A]}{\subseteq} w$ 。要证: $w \stackrel{-K_A}{\subseteq} u$ 。任给 $\varphi \in w \stackrel{-K_A}{\subseteq}$, 所以 $K_A \varphi \in w$, 再据设定, 有 $K_A \alpha \wedge K_A \varphi \in w$, 因为 $u R_{\alpha A} w$, 所以 $\langle \alpha_A \rangle (K_A \alpha \wedge K_A \varphi) \in u$, 再据 $KAA31_{\alpha A}$, 有 $\varphi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $K_A \alpha \notin w$ 。要证: 存在 $u \in W$ 使得 $w \stackrel{+\langle \alpha_A \rangle}{\subseteq} u$ 且 $w \stackrel{-K_A}{\not\subseteq} u$ 。

假设 $\Phi = w \stackrel{+\langle \alpha_A \rangle}{\subseteq} \cup \{ \neg \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \}$ 不是 **KAA3**-一致的, 则存在 $\langle \alpha_A \rangle \varphi_1, \dots, \langle \alpha_A \rangle \varphi_n \in w \stackrel{+\langle \alpha_A \rangle}{\subseteq}$ 使得 $\vdash \langle \alpha_A \rangle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha_A \rangle \varphi_n \rightarrow \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha$ 。令 $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ 。易证 $\vdash \langle \alpha_A \rangle \varphi \rightarrow \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha$ 。据上述弱推理规则 (%), 有 $\vdash \varphi \rightarrow K_A \alpha$ 。易证 $\varphi \in w$, 所以 $K_A \alpha \in w$, 矛盾于设定。所以 Φ 是 **KAA3**-一致的, 据 Lindenbaum-引理,

$$(*) \quad \text{存在 } u \in W \text{ 使得 } w \stackrel{+\langle \alpha_A \rangle}{\subseteq} u \text{ 且 } \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \notin u.$$

另一方面, 据设定和 $KAA32_{\alpha A}$, 有 $K_A \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \in w$, 所以 $\langle \alpha_A \rangle K_A \alpha \in w \stackrel{-K_A}{\subseteq}$, 再据②, 易见 $w \stackrel{-K_A}{\not\subseteq} u$ 。⊥

易见 $KAA31_{\alpha A}$ 有效。如前增加 $KAA32_{\alpha A}$ 对应的框架条件, 我们不难证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

第 4 组方案: 这里我们提出一个更简单方案, 它只建立在经典认知逻辑而不是经典动态认知逻辑上。归纳定义:

$\varphi ::= p \mid K_A \alpha \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_A \varphi$, 其中 $p \in \text{At}$, $A \in \text{Agent}$ 。

所有形如 $K_A \alpha$ 的公式的集合记为 KA 。

定义知道一个活动的系统 **KAm1** 如下: **KAm1** 是在 **DET** 中加下列公理:

($W4_{\alpha A}$) $K_A \alpha \rightarrow K_A K_A \alpha$ 。(注意: $W4_{\alpha A}$ 不是 $K_A \varphi \rightarrow K_A K_A \varphi$ 的特例, 因为 α 不是公式。)

因为 $K_A K_A \alpha \rightarrow K_A \alpha$ 是公理 T_A 的特例, 所以我们有固定点公式 $K_A \alpha \leftrightarrow K_A K_A \alpha$ 。它在非常弱的意义上刻画了 $K_A \alpha$ (的一个性质)。

这种只用固定点公式双向揭示核心公式 ($K_A \alpha$) 的方法称为**固定点方法**。

下面我们只考虑 2.1.7 定义的 Frame(et) 中的框架。

存在性引理 令 $\langle W, R \rangle \in \text{Frame(et)}$ 。存在从 KA 到 $P(W)$ 中的函数 g 使得

(%) $g(K_A \alpha) = \{w: R_A(w) \subseteq g(K_A \alpha)\}$, 对每一 $K_A \alpha \in KA$ 。

令 $g(K_A \alpha)$ 是 W 或 $\emptyset$ (因为 $R_A(w)$ 非空), 则易见 (%) 成立。所以满足 (%) 的函数 g 存在。^①

下面我们来考虑一种非平凡的情况。令 $g(K_A \alpha)$ 在 R_A -后承下封闭, 即下列条件成立

(&) $w \in g(K_A \alpha) \Rightarrow R_A(w) \subseteq g(K_A \alpha)$ 。

下证若 (&) 成立, 则 (%) 成立。设 (&) 成立, 只须证:

$w \in g(K_A \alpha) \Leftrightarrow R_A(w) \subseteq g(K_A \alpha)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 据 (&) 显然。“ $\Leftarrow$ ”: 设 $R_A(w) \subseteq g(K_A \alpha)$ 。因为 R_A 是自返的, 所以 $w \in R_A(w)$, 再据设定, $w \in g(K_A \alpha)$ 。┐

说明: 举例易证不是每一从 KA 到 $P(W)$ 中的函数 g 都满足 (%), 即使 R_A 是自返的。

据上面的存在性引理, 我们可以给出下面的定义:

称 $\langle W, R, [] \rangle$ 是**模型**, 当且仅当, $\langle W, R \rangle \in \text{Frame(et)}$ 且 $[]$ 是 $\text{At} \cup KA$ 到 $P(W)$ 中的映射使得对每一 $K_A \alpha \in KA$,

(#) $[K_A \alpha] = \{w: R_A(w) \subseteq [K_A \alpha]\}$ 。^②

Frame(et) 上全体这样的模型的类记作 $\text{Model}(\#)$ 。

真值集定义 $[K_A \alpha]$ 如 (#) 定义, 复合公式如前定义。

框架可靠性定理 **KAm1** 相对 Frame(et) 可靠。

证明: 任给框架 $\langle W, R \rangle \in \text{Frame(et)}$ 和 $M = \langle W, R, [] \rangle \in \text{Model}(\#)$ 。

易见 **KAm1** 的公理相对 M 有效且 **KAm1** 的推理规则相对 M 保持有效性。┐

框架完全性定理 **KAm1** 相对 Frame(et) 完全。

证明: 定义 **KAm1** 的**典范框架** $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。易证 R_A 是自返的。

定义 **KAm1** 的**典范模型** $M = \langle W, R, [] \rangle$ 如下: $\langle W, R \rangle$ 是 **KAm1** 的典范框架, 且

$[p] = \{p\}$, 对每一原子公式 p ; 且

$[K_A \alpha] = [K_A \alpha]$, 对每一 $K_A \alpha \in KA$ 。

下证:

(@) $[K_A \alpha] = \{w: R_A(w) \subseteq [K_A \alpha]\}$ 。

设 $w \in [K_A \alpha]$ 。任给 $u \in W$ 使得 $w R_A u$ 。则 $w^{-K_A} \subseteq u$ 。因为 $K_A \alpha \in w$, 据 $W4_{\alpha A}$, $K_A K_A \alpha \in w$, 再据 $w^{-K_A} \subseteq u$, 有 $K_A \alpha \in u$, 即 $u \in [K_A \alpha]$ 。

设 $R_A(w) \subseteq [K_A \alpha]$ 。要证 $w \in [K_A \alpha]$ 。假设 $w \notin [K_A \alpha]$ 。再据设定, 有 $w \notin R_A(w)$, 矛盾于 R_A 是自返的。

下证**典范模型基本定理**: $\varphi \in w \Leftrightarrow w \in [\varphi]$, 对每一 $w \in W$ 和公式 φ 。

^① 若 R_A 是等价关系, 则 $g(K_A \alpha)$ 可以是某个以 u 为代表元的等价类。

^② (#) 实际上规定 $[]$ 对 KA 中 (原子) 公式的指派不是任意的, 要满足一定条件。

证明：施归纳于 φ 的结构。 φ 是原子公式或 $\varphi = K_A\alpha$ ：据典范模型的定义。

$\varphi = \neg\psi$ 或 $\varphi = \psi \wedge \theta$ 或 $\varphi = K_A\psi$ 如通常所证。因此我们有典范模型基本定理。

据典范模型基本定理和 (④) 成立，易证 $M \in \text{Model}(\#)$ 。最后我们只须证：

(%) 若 φ 不是 **KAm1** 的内定理，则 φ 在 $\text{Frame}(\text{et})$ 的某个框架中不有效。

设 φ 不是 **KAm1** 的内定理。则存在 $w \in W$ 使得 $\varphi \notin w$ ，据典范模型基本定理，有 $w \notin [\varphi]$ ，所以 $M \models \varphi$ ，因此 $\langle W, R \rangle \models \varphi$ 。

因为每一 R_A 是自返的，所以 $\langle W, R \rangle$ 属于 $\text{Frame}(\text{et})$ ，因此 (%) 成立。┐

说明：**KAm1** 是一个极小系统，在证明它有框架可靠性定理和框架完全性定理时我们只要求每一 R_A 是自返的，没有像上面其他系统那样，增加其他框架条件（特别是自代入公理对应的框架条件）。

考虑另一个固定点公式 $\neg K_A\alpha \leftrightarrow K_A\neg K_A\alpha$ 。由于 $K_A\neg K_A\alpha \rightarrow \neg K_A\alpha$ 是公理 T_A 的特例，所以我们只须考虑 $\neg K_A\alpha \rightarrow K_A\neg K_A\alpha$ 。

存在性引理 令 $\langle W, R \rangle \in \text{Frame}(\text{et})$ 。存在从 KA 到 $P(W)$ 中的函数 h 使得

(%) $h(K_A\alpha) = \{w : \exists u \in W (wR_Au \text{ 且 } u \in h(K_A\alpha))\}$ ，对每一 $K_A\alpha \in KA$ 。

令 $h(K_A\alpha)$ 是 W 或 $\emptyset$ （因为 $R_A(w)$ 非空），则易见 (%) 成立。所以满足 (%) 的函数 h 存在。

下面我们来考虑一种非平凡的情况。令 $h(K_A\alpha)$ 满足下列条件：

(&) $\exists u \in W (wR_Au \text{ 且 } u \in h(K_A\alpha)) \Rightarrow w \in h(K_A\alpha)$ 。

下证若 (&) 成立，则 (%) 成立。设 (&) 成立，只须证：

$w \in h(K_A\alpha) \Leftrightarrow \exists u \in W (wR_Au \text{ 且 } u \in h(K_A\alpha))$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：据 (&) 显然。“ $\Rightarrow$ ”：设 $w \in h(K_A\alpha)$ 。因为 R_A 是自返的，所以易见

$\exists u \in W (wR_Au \text{ 且 } u \in h(K_A\alpha))$ 。┐

定义知道一个活动的系统 **KAm2** 如下：**KAm2** 是在 **DET** 中加下列公理：

(W5_{αA}) $\neg K_A\alpha \rightarrow K_A\neg K_A\alpha$ 。

据上面的存在性引理，我们可以给出下面的定义：

称 $\langle W, R, [] \rangle$ 是模型，当且仅当， $\langle W, R \rangle \in \text{Frame}(\text{et})$ 且 $[]$ 是 $At \cup KA$ 到 $P(W)$ 中的映射使得对每一 $K_A\alpha \in KA$ ，

(+) $[K_A\alpha] = \{w : \exists u \in W (wR_Au \text{ 且 } u \in [K_A\alpha])\}$ 。

$\text{Frame}(\text{et})$ 上全体这样的模型的类记作 $\text{Model}(+)$ 。

真值集定义 $[K_A\alpha]$ 如 (+) 定义，复合公式如前定义。

框架可靠性定理 **KAm2** 相对 $\text{Frame}(\text{et})$ 可靠。

证明：任给框架 $\langle W, R \rangle \in \text{Frame}(\text{et})$ 和 $\langle W, R, [] \rangle \in \text{Model}(+)$ 。

验证 W5_{αA}：任给 $w \in [\neg K_A\alpha]$ 。则 $w \notin [K_A\alpha]$ 。据 (+)，任给 $u \in W$ 使得 wR_Au ，有 $u \notin [K_A\alpha]$ ，所以 $u \in [\neg K_A\alpha]$ 。因为 u 是任意的且 wR_Au ，所以 $w \in [K_A\neg K_A\alpha]$ 。

易见 **KAm2** 的其余公理相对 M 有效且 **KAm2** 的推理规则相对 M 保持有效性。┐

框架完全性定理 **KAm2** 相对 $\text{Frame}(\text{et})$ 完全。

证明：定义 **KAm2** 的典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。易证 R_A 是自返的。

定义 **KAm2** 的典范模型 $M = \langle W, R, [] \rangle$ 如下： $\langle W, R \rangle$ 是 **KAm2** 的典范框架，且

$[p] = |p|$ ，对每一原子公式 p ；且

$[K_A\alpha] = |K_A\alpha|$ ，对每一 $K_A\alpha \in KA$ 。

下证：

(④) $[K_A\alpha] = \{w : \exists u \in W (wR_Au \text{ 且 } K_A\alpha \in u)\}$ 。

设 $w \in |K_A \alpha|$, 即 $K_A \alpha \in w$ 。因为 R_A 自返, 所以 $w R_A w$ 。易见存在 $u \in W(w R_A u \text{ 且 } K_A \alpha \in u)$ 。设存在 $u \in W(w R_A u \text{ 且 } K_A \alpha \in u)$ 。则易证 $\langle K_A \rangle K_A \alpha \in w$ 。据 $W5_{\alpha A}$, 有 $K_A \alpha \in w$, 即 $w \in |K_A \alpha|$ 。其余证明类似上一完全性定理的相应证明。┐

说明: (1) 我们还可以考虑把上面两个系统结合起来的方案。

(2) 我们还可以考虑增加其他固定点公式给恰当系统的方案。例如, 考虑:

$$\begin{aligned} K_A \alpha &\leftrightarrow K_A K_A K_A \alpha, & \neg K_A \alpha &\leftrightarrow K_A K_A \neg K_A \alpha, \\ K_A \neg K_A \alpha &\leftrightarrow \langle K_A \rangle K_A \neg K_A \alpha, & \langle K_A \rangle K_A \alpha &\leftrightarrow \langle K_A \rangle K_A \langle K_A \rangle K_A \alpha, & \dots\dots \\ K_A \alpha &\leftrightarrow [\alpha_A] K_A \alpha, & K_A \alpha &\leftrightarrow \langle \alpha_A \rangle K_A \alpha, & \dots\dots \end{aligned}$$

本节结束语:

(1) 我们还可以在上面适当系统中增加下列比较自然的公理或直接这样的公理构造系统:

$$\neg K_A \alpha \rightarrow \langle \alpha_A \rangle \neg K_A \alpha, \quad \neg K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \neg K_A \alpha, \quad K_A \alpha \rightarrow K_A [\alpha_A] K_A \alpha.$$

(2) 一个**语义**(用模型和真值集来定义)对应一个**极小系统**。我们用它们刻画(一组模态)思想。本节我们给出的不同语义分别刻画了**知道一个活动**这一思想的一种涵义。

(3) 我们也可以如前构造相应的半无穷系统。例如, 相对 **KA1**, 我们可以定义 **KA1I** 是在 **DESK** 上增加下列公理和规则得到的系统:

$$\begin{aligned} (KA1_{\alpha A}) \quad & K_A \alpha \rightarrow [\alpha_A] \phi \rightarrow K_A \phi, \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form}; \\ (RKA1_{\alpha A}) \quad & \{[\alpha_A] \phi \rightarrow K_A \phi: \phi \in \text{Form}\} / K_A \alpha. \end{aligned}$$

(4) 我们可以去掉本节记号 α_A 的下标 A (相应地去掉 $R_{\alpha A}$ 的下标 A)。此时, 我们把 α 理解为一个抽象活动, 把 $[\alpha] \phi$ 理解为做抽象活动 α 必产生 ϕ 。例如, 吃必产生 ϕ 。这样, 我们得到的是关于多主体和抽象活动相互作用的逻辑。

我们认为, 从哲学上说, 活动总是某个主体的活动。没有主体不成为活动。最多也只能称为运动。但有时我们确实也谈论抽象活动。例如, 吃。又如, 执行程序(参见后列文献[10])。但我们认为这只是在语境中对主体的省略。设一台计算机在执行一个程序。若我们把计算机看作是主体, 则执行程序是主体——计算机——的活动; 若我们不把计算机看作是主体, 而把编制程序者或为某种目的运算程序者 A 称为主体, 则执行程序是 A 的活动。此时计算机只不过是 A 进行活动的工具。

若我们还去掉 K_A 的下标 A (相应地去掉 R_A 的下标 A), 则我们得到的是关于单主体和抽象活动相互作用的逻辑。

七、刻画认识一个认识概念或活动概念的逻辑

我们在后列文献[2]已经给出一种刻画**知道一个概念**的方案。这里我们给出的是另一种方案: 刻画认识一个认识概念或活动概念。

这里所谓认识一个认识概念或活动概念是指“觉知(觉察 (be aware of) 一个知道概念)”、“知知(知道一个知道概念)”、“知信(知道一个相信概念)”、“知行(知道一个活动概念)”, 等等。

下面我们给出几类这样的系统。

1、用核心公式 $K_A K_B$ 直观表示: 主体 A 知道主体 B 的知概念。考虑

$$(Kk_{AB}) \quad K_A K_B \rightarrow K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi, \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form}.$$

我们可以用 Kk_{AB} 为代表公理建立半无穷系统, 即在适当系统中引入 Kk_{AB} 和

$$(RKk_{AB}) \quad \{K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi: \phi \in \text{Form}\} / K_A K_B.$$

^① 在此情况下, 我们还要引入形如 $[\alpha_A] \phi$ 的公式。此公式的直观意义比较自然。

我们也能用 Kk_{AB} 为代表公理如前建立各种自代入系统。例如，在适当系统中引入 Kk_{AB} 和

$$(Kk1_{AB}) \quad \neg K_A K_B \rightarrow K_B \neg K_A K_B, \quad (Kk2_{AB}) \quad \langle K_A \rangle \langle K_B \rangle K_A K_B.$$

易证我们有下列**固定点公式**为内定理： $K_A K_B \leftrightarrow (K_B \neg K_A K_B \rightarrow K_A K_B \neg K_A K_B)$ 。所以我们可以据此构造固定点系统。

$K_A K_B$ 的特例是 $K_A K_A$ 。在单主体的情况下可以简写为 KK 。此时，代表公理 Kk_{AB} 退化为 $KK \rightarrow K\phi \rightarrow KK\phi$ 。无穷规则或自代入公理类似退化。

2、用核心公式 $A_A K_B$ 直观表示：主体 A 觉察 B 的知概念。考虑

$$(Ak_{AB}) \quad A_A K_B \rightarrow K_B \phi \rightarrow A_A K_B \phi.$$

$A_A \phi$ 的真值集通常如 3.3 (4) 定义。我们也可以把 A_A 看作是**模态算子**：它的真值集定义本质上涉及其他认知状态。

如前我们可以建立用 Ak_{AB} 为代表公理的半无穷系统、固定点系统和各种自代入系统。

$A_A K_A$ 可以看作是对 A 的觉知的表示。关于觉知逻辑，我们另文发表。

3、用核心公式 $K_A B_B$ 直观表示：主体 A 知道 B 的相信概念。考虑

$$(Kb_{AB}) \quad K_A B_B \rightarrow B_B \phi \rightarrow K_A B_A \phi.$$

如前我们可以建立用 Kb_{AB} 为代表公理的半无穷系统、固定点系统和各种自代入系统。

4、用核心公式 $K_A A_B$ 直观表示：主体 A 知道 B 的行概念，即 A 知 B 活动的后果。考虑：

$$(Ka1_{AB}) \quad K_A A_B \rightarrow [\alpha_B] \phi \rightarrow K_A [\alpha_B] \phi, \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form 和 } \alpha \in \text{Act};$$

$$(Ka2_{AB}) \quad K_A A_B \rightarrow [\alpha_B] \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \phi, \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form 和 } \alpha \in \text{Ac}.$$

据第 6 节中的记号，上述公式的特例可以重写为：

$$(Ka_{AB}) \quad K_A A_A \rightarrow K_A \alpha, \quad \text{对所有 } \alpha \in \text{Act}.$$

如前我们可以建立用 Ka_{AB} 为代表公理的半无穷系统、固定点系统和各种自代入系统。

我们还可以考虑上述刻画的其他变种。用 $K_A K_B$ 举例，我们还可以考虑代表公理：

$$\begin{aligned} K_A K_B &\rightarrow \langle K_B \rangle \phi \rightarrow K_A \langle K_B \rangle \phi, \\ K_A K_B &\rightarrow \langle K_B \rangle \phi \rightarrow \langle K_A \rangle \langle K_B \rangle \phi, \\ K_A K_B &\rightarrow K_B \phi \rightarrow K_A \langle K_B \rangle \phi, \\ K_A K_B &\rightarrow \neg K_B \phi \rightarrow K_A \neg K_B \phi. \quad (\text{负反思型}) \\ &\dots \end{aligned}$$

结束语：(1) $K_A K_B$ ， $A_A K_B$ 和 $K_A B_B$ 可以称为**认识概念叠加**， $K_A A_B$ 可以称为**知行概念叠加**。虽然它们是原子公式，不可拆分，但在直观意义上是一种概念叠加，或者说表示一种概念叠加。

根据上面的思路，我们还可以刻画诸如“信知”等认识概念叠加和其他知行概念叠加。

另外，我们还可以考虑三重概念叠加乃至 n 重概念叠加。因为诸如 $K_A K_B$ 是公式，所以我们有形如 $K_C K_A K_B$ 的三重概念叠加。它直观表示：C 知道 A 知道 B 的知概念。

易见系统 $ESK + Kk_{AB}$ 中内定理 $K_C K_A K \rightarrow K_C (K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi)$ 。所以我们在一定程度上刻画了 $K_C K_A K_B$ 。我们也可以独立地定义了 $K_C K_A K_B$ 。例如，用下面的公式为代表公理：

$$\begin{aligned} K_C K_A K_B &\rightarrow K_A K_B \phi \rightarrow K_C K_A K_B \phi, \\ K_C K_A K_B &\rightarrow K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi \rightarrow K_C K_A K_B \phi, \end{aligned}$$

$$K_C K_A K_B \rightarrow (K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi) \rightarrow K_C (K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi), \dots$$

n 重概念叠加也可以类似处理。

(2) 我们还可以把上面代表公理相对化。相对化既可以是相对一群主体，也可以是相对一个领域或一类活动。例如，考虑

① $K_A E_G \rightarrow X_G \phi \rightarrow K_A X_G \phi$, 对所有 $\phi \in \text{Form}$; 其中 $G \subseteq \text{Agent}$, 且 $X_G \phi$ 是 G 的集体知识 $E_G \phi$ 或公共知识 $C_G \phi$ 或分布式知识 $D_G \phi$ (这些公式见后列文献 [3] 的第 23—24 页)。

② $K_A, \phi K_B \rightarrow K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi$, 对所有 $\phi \in \Phi$; 其中 $\Phi \subseteq \text{Form}$ 。(Φ 可表示一个领域)

③ $K_A, X A_A \rightarrow K_A \alpha$, 对所有 $\alpha \in X$; 其中 $X \subseteq \text{Act}$ 。

若上述 Φ 和 X 是有穷集，则我们可以把②和③中的公理 (和相应的无穷概括规则或自代入公理) 合为

$$K_A, \phi K_B \leftrightarrow \bigwedge \{K_B \phi \rightarrow K_A K_B \phi : \phi \in \Phi\},$$

$$K_A, X A_A \leftrightarrow \bigwedge \{K_A \alpha : \alpha \in X\}.$$

(3) 上节我们研究的 $\alpha_A K$ 和 $\alpha_A B$ 也是一种“行知”和“行信”的概念叠加。但此类思想基于一个具体活动 α ，所以它们不同于本节研究的概念叠加。

(4) 我们上面建立的不同系统表明不同的主体可以有不同认知概念或活动概念，即使对同一个主体，我们也可以有不同认知概念或活动概念，因为不同的公理和规则刻画的是不同的认知概念或活动概念。令

$$\text{Know} = \{K_1, \dots, K_{n_1}\}, \quad \text{其中 } K_i \text{ 表示如上规定的某个主体的某个知概念;}^{①}$$

$$\text{Belief} = \{B_1, \dots, B_{n_2}\}, \quad \text{其中 } B_i \text{ 表示如上规定的某个主体的某个信概念};$$

$$\text{Action} = \{A_1, \dots, A_{n_3}\}, \quad \text{其中 } A_i \text{ 表示如上规定的某个主体的某个活动概念}.$$

令 $X \subseteq \text{Know}$ 或令 $X \subseteq \text{Belief}$ 或令 $X \subseteq \text{Action}$ 。我们用

$$K_A X \leftrightarrow K_A \bigwedge \{x : x \in X\}, \quad B_A X \leftrightarrow B_A \bigwedge \{x : x \in X\}, \quad \dots$$

表示综合认知。

令 $X \subseteq \text{Know} \cup \text{Belief} \cup \text{Action}$ 。我们用

$$K_A X \leftrightarrow K_A \bigwedge \{x : x \in X\}, \quad B_A X \leftrightarrow B_A \bigwedge \{x : x \in X\}, \quad \dots$$

表示广义综合认知。

我们还可以向无穷推广：虽然我们关注的主体集有穷 (也有文献研究无穷多个主体)，但同一个主体可以有无穷多个不同的认知概念 (用无穷多个形式化系统来刻画)。

(5) 第 2 节到本节，我们建立的逻辑可以称为解析逻辑 (analytic logic)。建立这样的逻辑主要是为了分析一个核心思想。在本文我们用下列核心公式来形式表示这样的思想：

$$A \geq B, A \cong B, C_1 A, C_2 A, K_A B, \alpha_A K, K_A \alpha, K_A K_B, A_A K_B, K_A B_B, K_A A_B, \dots$$

令 C 表示上述任一核心公式。在构造解析系统时我们往往引入代表公理

$$(\%) C \rightarrow X \phi \rightarrow Y \phi, \quad \text{对所有 } \phi \in \text{Form}, \dots \quad (\text{其中 } X \text{ 和 } Y \text{ 包含 } C \text{ 的一个要素}).$$

由于 (%) 只是从一个方向形式地揭示了 C 的涵义，所以为了证明框架完全性定理，我们采用了 4 种方法。分述如下：

拟赋值方法：为了只从一个方向揭示 C 的涵义。

自代入方法：用自代入公式从另一个方向揭示 C 的涵义。

半无穷方法：用无穷规则从另一个方向揭示 C 的涵义。

^① 所以 $K_1, \dots, K_{n_1}$ 既可以是同一个主体的不同知概念，也可以是不同主体的不同知概念。

固定点方法：用固定点公式双向揭示 C 的涵义。

拟赋值方法似乎首先在 [12] 提出。它给出的系统和语义都是单向的。系统只在基础系统上增加代表公理。对核心公式的赋值用包含关系（对应代表公理的主联结符 $\rightarrow$ ）限制在一定的范围之内（参见 2.1.13（#））。但这种限制还是过分宽泛，所以我们认为这种方法有不足之处。

其他方法给出的系统和真值集都是双向。若核心公式的真值集用点框架条件定义，则我们可以有框架完全性定理，否则可能只有模型完全性定理。

固定点方法没有分析核心公式直观表示的核心思想的内部机制，没有定义核心公式的真值集使得这样的定义的直观意义自然。这种方法只是从外部揭示了核心公式的一些逻辑性质，所以它显然有不足之处。在此意义上，它甚至不如拟赋值方法。但它对核心公式的赋值用等于关系定义（如第 6 节最后的（#）和（+）），限制的范围比拟赋值要确定。所以在此意义上，我们认为它比拟赋值方法要好些。

半无穷方法表达力比较丰富。但这种方法涉及无穷概念（无穷长的形式证明和推理），证明完全性定理也比较麻烦。用无穷推理规则来直观刻画主体的智能也有要求过高之嫌。也就是说，要求每一个主体都具备无穷推理能力也比较过分。

自代入方法是一种比较优雅的方法。它是固定点系统的扩充，所以表达力比后者更为丰富。这种方法的关键是找到若干个（通常是两个）恰当的自代入公式。这既是证明完全性定理的关键，也是自然解释^①自代入公理的关键。

王景周在 [11] 为了研究 $K\alpha$ （其中 α 是一个正则复合活动），还提出一种方法，可以称为**对原子型的核心公式任意赋值的方法**，简称**任意赋值法**。这种方法对原子型的核心公式任意指派一个真值集，而不去揭示这样的公式的任何直观意义，甚至不从外部揭示这样的公式的一些逻辑性质。所以在此意义上，它不如固定点方法。但由于他建立逻辑的目的是为了研究知道一个复合活动的情况，所以这也算是一种方法。

八、刻画活动生成后果的逻辑

通常的动态逻辑已经用 $[\alpha_A]\varphi$ 和 $\langle\alpha_A\rangle\varphi$ 分别从不同方面刻画了活动生成后果这一思想。但我们感到有时这两个表达式不够。本节我们要刻画一个有别于 $[\alpha_A]\varphi$ 和 $\langle\alpha_A\rangle\varphi$ 的逻辑表达式，我们把它记作 $A\alpha\varphi$ ，其直观意义是：A 做了 α 生成后果 φ 。

我们在 [4] 第 12 节已经研究过一个类似的逻辑。我们在那里称其为**活动后果逻辑**，记作 **AA**。这里我们把它记作 **AGC1**。

归纳定义： $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha_A]\varphi \mid A\alpha\varphi$ ，其中 $p \in \text{At}$ ， $A \in \text{Agent}$ ， $\alpha \in \text{Act}$ 。

考虑基于 $\text{Frame}(\text{ds})$ 上的模型和真值集定义：

$$w \in [A\alpha\varphi] \Leftrightarrow \exists u \in W (uR_{\alpha A}w \text{ 且 } u \in [\neg\varphi] \text{ 且 } w \in [\varphi]), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

$A\alpha\varphi$ 的真值集定义是后列文献 [4] 的 3.3.1 的 (4.1) 的存在型表示，所以 $A\alpha\varphi$ 在一定意义上也可以看作是一种“通过活动来否定”思想，即把 $A\alpha\varphi$ 看作是 [4] 中的 $\neg_{\alpha}\varphi$ 。

刻画活动生成后果的系统 AGC2 定义如下：在 **DS** 上增加下列公理和规则：

$$(AGC2_{\alpha A}) \quad \langle\alpha_A\rangle\varphi \rightarrow \varphi \vee [\alpha_A]A\alpha\varphi,$$

$$(RAGC2_{\alpha A}) \quad \langle\alpha_A\rangle\psi \wedge [\alpha_A]\varphi \rightarrow \varphi / \psi \rightarrow \neg A\alpha\varphi.$$

令 $\psi = \neg\varphi$ 。据 $RAGC2_{\alpha A}$ 易得内定理 $A\alpha\varphi \rightarrow \varphi$ 。它形如公理 T_A ，直观意义也很自然。

定义典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如 5.4。下证**典范框架主引理**：

$$A\alpha\varphi \in w \Leftrightarrow \exists u \in W (uR_{\alpha A}w \text{ 且 } \neg\varphi \in u \text{ 且 } \varphi \in w), \quad \text{对所有 } w \in W.$$

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $A\alpha\varphi \in w$ 。要证：

$$(\%) \quad \text{存在 } u \in W \text{ 使得 } uR_{\alpha A}w \text{ 且 } \neg\varphi \in u \text{ 且 } \varphi \in w.$$

^① 使自代入公式的直观意义自然。

令 $\Phi = w^{+\langle \alpha_A \rangle} \cup \{[\alpha_A]\varphi, \neg\varphi\}$ 。先证: Φ 是 **AGC2**-一致的。假设要证结果不成立, 则存在

$\langle \alpha_A \rangle \varphi_1, \dots, \langle \alpha_A \rangle \varphi_n \in w^{+\langle \alpha_A \rangle}$ 使得

$$\vdash \langle \alpha_A \rangle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha_A \rangle \varphi_n \wedge [\alpha_A] \varphi \rightarrow \varphi.$$

令 $\psi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ 。有 $\vdash \langle \alpha_A \rangle \psi \wedge [\alpha_A] \varphi \rightarrow \varphi$ 。再据 RAGC2_{α_A} , 有 $\vdash \psi \rightarrow \neg A\alpha\varphi$, 再据 $\psi \in w$, 有 $\neg A\alpha\varphi \in w$ 。矛盾于假设, 所以 Φ 是 **AGC2**-一致的。再据 Lindenbaum-引理, 存在 $u \in W$ 使得 $\Phi \subseteq u$ 。由此有 $\neg\varphi \in u$ 且 $[\alpha_A]\varphi \in u$ 且 $uR_{\alpha_A}w$, 据后两者, 有 $\varphi \in w$ 。因此 (%) 成立。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $A\alpha\varphi \notin w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $uR_{\alpha_A}w$ 且 $\neg\varphi \in u$, 只须证: $\neg\varphi \in w$ 。

因为 $\neg A\alpha\varphi \in w$, 所以据 $uR_{\alpha_A}w$, 有 $\langle \alpha_A \rangle \neg A\alpha\varphi \in u$, 再据设定 $\neg\varphi \in u$ 和公理 AGC2_{α_A} , 有 $[\alpha_A]\neg\varphi \in u$, 再据 $uR_{\alpha_A}w$, 有 $\neg\varphi \in w$ 。┐

增加关于 AGC2_{α_A} 和 RAGC2_{α_A} 的语义条件, 不难证明相应的可靠性定理和完全性定理。

另外, 用构造反模型的方法, 不难证明 $A\alpha\varphi$ 有别于 (不等值) $[\alpha_A]\varphi$ 和 $\langle \alpha_A \rangle \varphi$ 。

如前, 我们还可以在语言中引入认知算子 K_A , 考虑 $K_A\varphi$ 和 $A\alpha\varphi$ 的关系, 例如, 把第 5 节的 AK1_{α_A} 和 KA1_{α_A} 改为

$$\alpha_A K \rightarrow K_A \varphi \rightarrow A\alpha\varphi, \quad \alpha_A K \rightarrow \langle K_A \rangle \varphi \rightarrow A\alpha\varphi, \quad \dots\dots$$

$$K_A \alpha \rightarrow A\alpha\varphi \rightarrow K_A \varphi, \quad K_A \alpha \rightarrow \langle K_A \rangle \varphi \rightarrow A\alpha\varphi, \quad K_A \alpha \rightarrow A\alpha\varphi \rightarrow K_A A\alpha\varphi, \quad \dots\dots$$

读者可以考虑这样的方向。

九、主客观逻辑

本节我们只是简单构建一类逻辑——主客观逻辑。

通常我们用 $B_A\varphi$ 直观表示 “A 相信 φ ”, 这个方面我们称为 (主体的) 主观方面。本节我们用 $\Box\varphi$ 直观表示 “ φ 是客观必然的”。这里的 “客观” 可以从两个方面理解:

1、**客观是认识论的客观**。此时的 $\Box\varphi$ 直观理解为 φ 是一种客观知识。例如, φ 是相对一群主体 $G \subseteq \text{Agent}$ 的集体知识 $E_G\varphi$ 或公共知识 $C_G\varphi$ 或分布式知识 $D_G\varphi$ 。我们认为这样的知识 φ 在一定范围内也是客观的, 因为 φ 由 G 确定, 不以当下主体 A 为转移, 虽然 A 可能参与其中, 虽然 G 的特例可以是 $\{A\}$ 。因此我们把 $\Box_G\varphi$ 理解 $E_G\varphi$, $C_G\varphi$ 或 $D_G\varphi$, 把 $\Box\varphi$ 理解 $E_{\text{Agent}}\varphi$, $C_{\text{Agent}}\varphi$ 或 $D_{\text{Agent}}\varphi$ 。

我们还可以考虑其他类型的客观知识。

2、**客观是本体论的客观**。此时的 $\Box\varphi$ 可以用通常的 Kripke-关系语义来刻画:

$$w \in [\Box\varphi] \Leftrightarrow R(w) \subseteq [\varphi], \quad \text{其中 } R \text{ 是用于刻画 } \Box \text{ 的通达关系。}$$

本体论的客观究竟有什么直观意义, 有许多哲学讨论。我们在此作广义理解: 不涉及主体的必然性都理解为本体论的客观必然性。

本节以下, 为了简单, 我们只从本体论上理解 $\Box\varphi$ 。

我们以后另文发表主观和认识论客观相互作用的逻辑。

归纳定义: $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid B_A\varphi \mid \Box\varphi$, 其中 $p \in \text{At}$, $A \in \text{Agent}$ 。

定义 $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$ 。我们提出的主客观逻辑主要研究主观算子 B_A 和客观算子 $\Diamond$ 之间的关系。例如, $B_A\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ 就是一例。但此公式有些不自然。我们认为 $B_A\varphi \rightarrow B_A\Diamond\varphi$ 是比较自然的。本节我们就来讨论此公式。

主客观系统 SOS1 定义如下: TA 和 MP 如前规定,

$$(\text{K}_{BA}) \quad B_A(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow B_A\varphi \rightarrow B_A\psi, \quad (\text{D}_{BA}) \quad B_A\varphi \rightarrow \neg B_A\neg\varphi,$$

$$(\text{4}_{BA}) \quad B_A\varphi \rightarrow B_AB_A\varphi, \quad (\text{5}_{BA}) \quad \neg B_A\varphi \rightarrow B_A\neg B_A\varphi, \quad (\text{RN}_{BA}) \quad \varphi / B_A\varphi,$$

(K) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$, (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$, (RN) $\varphi / \Box\varphi$.

SOS1 就是关于相信算子的系统 **KD45** 和关于客观算子的系统 **T** 的简单聚合。

易证 $B_A\varphi \rightarrow B_A\Diamond\varphi$ 是 **SOS1** 的内定理。

如前我们可以定义框架概念，其中用 R 如上刻画 $\Box$ ，用 R_A 如上刻画 B_A 。我们规定 R_A 是持续、传递和欧性的，且 R 是自返的。如通常我们可以证明 **SOS1** 相对全体这样的框架类是可靠和完全的。

下面减弱上述系统。令**主客观系统 SOS2** 是用下列公理替换 **SOS1** 中的 **T** 得到的系统。

(SO) $B_A\varphi \rightarrow B_A\Diamond\varphi$ 。

我们如上规定 R_A 且规定下列框架条件成立（并不要求 R 是自返的）：

(so) $\forall wu \in W(wR_Au \Rightarrow \exists v \in W(wR_Av \text{ 且 } uRv))$ 。

如通常我们可以证明 **SOS2** 相对全体这样的框架类是可靠和完全的。

下面我们只证明关键一步：定义 **SOS2** 的典范框架 $\langle W, R_A, R \rangle$ 如前。下证：

$\forall wu \in W(wR_Au \Rightarrow \exists v \in W(wR_Av \text{ 且 } uRv))$ 。

证明：任给 $w, u \in W$ 使得 wR_Au 。要证：存在 $v \in W$ 使得 wR_Av 且 uRv 。据 Lindenbaum-引理，只须证 $w^{-B_A} \cup u^{-\Box}$ 是 **SOS2**-一致的。假设要证结果不成立，则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-B_A}$ 和 $\psi_1, \dots, \psi_m \in u^{-\Box}$ 使得 $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m)$ 。

令 $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ 且 $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m$ ，则易得 $\vdash B_A\varphi \rightarrow B_A\neg\psi$ 。易证 $B_A\varphi \in w$ ，所以 $B_A\neg\psi \in w$ 。再据公理 SO，有 $B_A\Diamond\neg\psi \in w$ ，再据 wR_Au ， $\Diamond\neg\psi \in u$ 。另一方面，易证 $\Box\psi \in u$ 。矛盾。 $\perp$

说明：主观算子 B_A 也可以替换为其他主观算子。例如，主观上的认为，等等。

另一类主客观逻辑从主观和客观两个方面刻画活动。归纳定义 Form 如下：

$\varphi ::= p \mid K_A\alpha \mid \Box\alpha \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha]\varphi \mid K_A\varphi \mid \Box\varphi$ ，其中 $p \in \text{At}$ ， $A \in \text{Agent}$ ， $\alpha \in \text{Act}$ 。

注意：这里的 $[\alpha]\varphi$ 没有下标，其中 α 直观表示一个抽象活动。 $\langle \alpha \rangle \varphi ::= \neg[\alpha]\neg\varphi$ 。

这里我们把 K_A 看作是主观算子， $\Box$ 看作是客观算子。

主客观系统 SOAS 定义如下：在 **ES5** 上增加下列公理和规则：

(K $_{\alpha}$) $[\alpha](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha]\varphi \rightarrow [\alpha]\psi$, (RN $_{\alpha}$) $\varphi / [\alpha]\varphi$;

(K) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$, (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$, (RN) $\varphi / \Box\varphi$;

(KAI1* $_{\alpha A}$) $K_A\alpha \rightarrow [\alpha]\varphi \rightarrow K_A[\alpha]\varphi$,

(5I1* $_{\alpha A}$) $\neg K_A\alpha \rightarrow \langle K_A \rangle \langle \alpha \rangle K_A \neg K_A\alpha$, (一种负反思)

(AKK* $_{\alpha A}$) $[\alpha] \langle K_A \rangle K_A\alpha$;

(NA $_{\alpha}$) $\Box\alpha \rightarrow [\alpha]\varphi \rightarrow \Box\varphi$, (W5 $_{\alpha}$) $\neg\Box\alpha \rightarrow \Diamond\Box\neg\Box\alpha$, (AN $_{\alpha}$) $[\alpha]\Diamond\Box\alpha$ 。

易见这是由两类自代入构成的自代入系统。易证 **SOAS** 有下列**固定点公式**为内定理：

$K_A\alpha \leftrightarrow ([\alpha] \langle K_A \rangle K_A\alpha \rightarrow K_A[\alpha] \langle K_A \rangle K_A\alpha)$, $\Box\alpha \leftrightarrow ([\alpha]\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\Diamond\Box\alpha)$ 。

称 $\langle W, R \rangle$ 是**刻画主客观的框架**， $\Leftrightarrow W$ 如 3.2 定义， R 是定义域为 $\text{Act} \cup \text{Agent} \cup \{\Box\}$ 的映射，使得对每一 $\alpha \in \text{Act}$ ， R_{α} 是 W 上的二元通达关系；对每一 $A \in \text{Agent}$ ， R_A 是 W 上的二元自返欧性关系；且对 $\Box$ ， $R_{\Box}$ 是 W 上的二元自返关系。所有上述框架的类记作 **Frame**。

真值集定义 对所有 $w \in W$,

(5) $w \in [\Box\varphi] \Leftrightarrow R_{\Box}(w) \subseteq [\varphi]$, (6) $w \in [K_A\alpha] \Leftrightarrow \forall uv \in W(wR_Au \text{ 且 } uR_{\alpha}v \Rightarrow wR_{\alpha}v)$,

(7) $w \in [\Box\alpha] \Leftrightarrow R_{\Box}(w) \subseteq R_{\alpha}(w)$ 。

易见 KAI1* $_{\alpha A}$ 和 NA $_{\alpha}$ 相对 **Frame** 是有效式。而 5I1* $_{\alpha A}$ ，AKK* $_{\alpha A}$ ，W5 $_{\alpha}$ 和 AN $_{\alpha}$ 不是。但 (6) 和 (7) 是点框架条件，所以我们不难写出对应 5I1* $_{\alpha A}$ ，AKK* $_{\alpha A}$ ，W5 $_{\alpha}$ 和 AN $_{\alpha}$ 框架条件。

所有这样的框架的类记作 **Frame(soas)**。如前易证：

定理 SOAS 相对 $\text{Frame}(\text{soas})$ 可靠且完全。 $\vdash$

说明: 我们还可以定义 $\Diamond\alpha$ 且引入刻画 $\Diamond\alpha$ 的公理和规则, 更丰富地表达活动的性质。

据 NA_α 和 T 易得 $\Box\alpha \rightarrow [\alpha]\varphi \rightarrow \varphi$, 其直观意义较自然。若读者认为不自然, 可以删去 T 或如前修改 NA_α 。当然语义和相应的证明也要相应修改。

参考文献

- [1] 李小五. 三类知道活动的逻辑[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(3): 35-59.
- [2] 李小五. 认知动态逻辑的几个应用[J/OL]. 逻辑与认知. 2006,(1): 60-86.
- [3] R. Fagin, J.Y. Halpern, Y. Moses, M.Y. Vardi. Reasoning about Knowledge [M]. The MIT Press, 1995.
- [4] 李小五. 研究报告 2005[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(4): 17-71.
- [5] 李小五. 加标动态逻辑及其若干应用[J]. 哲学动态, 2005 年逻辑学增刊.
- [6] 李小五. 我知道你——知道主体的逻辑[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(2): 66-79.
- [7] G. R. de Lavalette, B. Kooi, R. Verbrugge. Strong completeness and limited canonicity for **PDL** and similar modal logics. www.rug.nl/ai/onderzoek/prepublications/prepubs2004.
- [8] H. Sturm. A completeness axiomatization for ML_{ω_1} . CIS-Bericht-98-113, München 1998.
- [9] A. Baltag, L. S. Mose and S. Solecki. The Logic of Public Announcement. Manuscript, 2003, originally presented at TARK 98.
- [10] D. Harel, D. Kozen, J. Tiuryn. Dynamic Logic[M]. The MIT Press, 2000.
- [11] 王景周. 正则知道活动的逻辑 **RKAL**. 中山大学 2006 届硕士论文.
- [12] 刘壮虎, 李小五. 对动作的认知 [J]. 湖南科技大学学报, 社会科学版, 2005, (6): 33-38.
- [13] 李小五. 模态逻辑讲义 [M]. 中山大学出版社, 2005.9.

Some Kinds of Logics Characterizing Agents

LI Xiao-wu

(Institute of Logic and Cognition of Sun Yat-sen University 510275, Guangdong, China)

Abstract: We establish some kinds of logics characterizing agents. First kind of logic is a logic that deals with conditionals with double conditions for aim and background knowledge. Second kind of logics is logics comparing agents' abilities. Third kind of logics is logics characterizing the relation of agents' speaking and action. Fourth kind of logics is logics knowing an agent by knowing its speaking and action. Fifth kind of logics is logics characterizing the relation of agents' knowing and action. Sixth kind of logics is logics characterizing knowing an action. Seventh kind of logics is logics characterizing the cognition of epistemic concepts or action concepts. Eighth kind of logics is a logic characterizing action-generating consequent. Ninth kind of logics is a subjective-objective logic.

Key words: conditional with double conditions for aim and background knowledge; comparing agents' abilities; relation of agents' speaking and action; knowing an agent by knowing its speaking and action; relation of agents' knowing and action; knowing an action; cognition of epistemic concepts or action concepts; action-generating consequent; subjective-objective logic