动态认知逻辑的几个应用 *

李小五

(中山大学逻辑与认知研究所，广东 广州 510275)

内容提要： 我们建立若干逻辑分别刻画下列概念：做了一个活动、若干主体做了若干活动形成合力改变一个状态、知道一个主体、知道一个性质与知道一个关系。

关键词： 做了一个活动；合力改变一个状态；知道一个主体；知道一个性质与知道一个关系

中图分类号：B81 **文献标识码：A**

一、正则做活动逻辑

通常的动态逻辑在语形方面（相对公理化系统）没有独立刻画做了一个活动的逻辑性质。例如，没有刻画像“我吃了”那样的句子。也就是说，相对活动α，它们只刻画了形如[α]φ的句子，而这样的句子只是间接刻画了活动α。至于像“我吃了”那样的句子（概括为“（某主体）做了活动α”，符号化为 Dα）有什么逻辑性质，这些逻辑没有揭示。而在我们看来，这是一类很重要的句子。

为了简洁，本节我们只研究单主体逻辑。我们逻辑的基础是文献［1］提到的 **PDL** 和［9］提到的 **DA1**。

1.1 公式的形成规则 令 At＝{p_1,…, p_n,…}是可数无穷多个原子公式的集合，令 Act＝{a_1,…, a_m,…}是可数无穷多个原子活动的集合。

联立归纳定义所有公式φ的集合 Form 和所有活动α的集合 Action 如下：

$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi\wedge\psi) \mid [\alpha]\varphi \mid D\alpha$， 其中 $p\in At$；

$\alpha ::= a \mid (\alpha\cup\beta) \mid (\alpha;\beta) \mid \alpha^*$， 其中 $a\in Act$。┤

说明： 据［1］第 166 页的解释，[α]φ的直观意义是：It is necessary that after executing α, φ is true。α∪β的直观意义是：Choose either α or β nondeterministically and execut it。α;β的直观意义是：Execut α, then execut β。α*的直观意义是：Execut α a nondeterministically chosen finite number of times (zero or more)。α∪β, α;β和α*统称为**复合活动（运算）**，其中α∪β称为“复合α和β的**选择活动**”，α;β称为“复合α和β的**相继活动**”，α*称为“α的（有穷）**叠加活动**”。

Dα的直观意义是：“（主体）做了活动α”（The action α has been executed (by the agent)）。这是我们的逻辑主要要刻画的公式。

1.2 规定与缩写 联结符∨，→和↔的缩写定义如通常给出。另外，缩写定义$\langle\alpha\rangle\varphi ::= \neg[\alpha]\neg\varphi$。为了叙述方便，我们规定**联结符的结合力**从左到右依次减弱：

¬，[α]，D，∧，∨，→，↔。

此外，我们规定同形联结符满足右向结合原则。例如，φ→ψ→θ 表示 φ→(ψ→θ)。

收稿日期： 2006-1-10

基金项目： 本文得到教育部基地重大项目《归纳逻辑及其应用》（项目编号 05JJD720.40001）和教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目（04JZD0006）的资助。

作者简介： 李小五(1955-)，男，河北人，中山大学教授，北京书生公司书生研究中心客座研究员。
电子邮箱：LXW121@yahoo.com.cn

$\top$ 定义为 $p_1\vee\neg p_1$，$\bot$ 定义为$\neg\top$。

我们常用$\Leftrightarrow$表示“当且仅当”，用$\Rightarrow$表示“若…，则…”，用～表示“并非”。⊣

1.3 定义 **正则系统 RDA** 定义如下：对所有$\alpha, \beta\in$Action，$\varphi, \psi\in$Form，

（TA） 所有重言式的代入特例，

（K_α） $[\alpha](\varphi\to\psi)\to[\alpha]\varphi\to[\alpha]\psi$，

（D_α） $[\alpha]D\alpha$， （**活动公理**）

（$A_\cup$） $[\alpha\cup\beta]\varphi\leftrightarrow[\alpha]\varphi\wedge[\beta]\varphi$， （**选择公理**）

（$A_;$） $[\alpha;\beta]\varphi\leftrightarrow[\alpha][\beta]\varphi$， （**相继公理**）

（A_*） $\varphi\wedge[\alpha][\alpha^*]\varphi\leftrightarrow[\alpha^*]\varphi$， （**叠加公理**）

（IA_*） $\varphi\wedge[\alpha^*](\varphi\to[\alpha]\varphi)\to[\alpha^*]\varphi$， （**归纳公理**）

（MP） $\varphi, \varphi\to\psi／\psi$，

（RN_α） $\varphi／[\alpha]\varphi$，

（RD_α） $\langle\alpha\rangle D\alpha\to[\alpha]\varphi／D\alpha\to\varphi$。 （**活动规则**）⊣

说明：公理 D_α和规则 RD_α刻画了做活动概念的基本特性，公理 $A_\cup$和 $A_;$分别刻画了复合活动运算$\alpha\cup\beta$和$\alpha;\beta$的基本特性，公理 IA_*和 IA_*刻画了复合活动运算α^*的基本特性。文献［2］称刻画$\alpha\cup\beta$，$\alpha;\beta$和α^*的动态逻辑为**正则逻辑**，而在［1］，还要加上刻画测试运算$\varphi?$的公理$[\varphi?]\psi\leftrightarrow(\varphi\to\psi)$才能称为**正则逻辑**。这里我们遵从［2］的称谓，因为增加测试运算无法证明下面系统的框架可靠性定理和框架完全性定理，而这是逻辑追求的重要目标。另一方面，从测试公理$[\varphi?]\psi\leftrightarrow(\varphi\to\psi)$和活动公理 D_α易得$\varphi\to D(\varphi?)$。而后者的直观意义是：

每一真命题都被（主体）测试过。

在我们看来这似乎不自然。

由 TA 和 MP 构成的系统称为**经典句子系统**，记为 **PC**。我们也用 $\mathbf{PC}_0$ 表示用不含模态算子$[\alpha]$的语言表述的 **PC**。

1.4 定义 我们用$\vdash\varphi$ 表示φ是 **RDA** 的**内定理**：φ在 **RDA** 中有一个形式证明。

RDA 的全体内定理的集合记为 Th(**RDA**)。我们也用 $\nvdash\varphi$ 表示$\varphi\notin$Th(**RDA**)。⊣

1.5 引理 下面是 **RDA** 的导出规则和内定理：

（1）$\varphi\to\psi／[\alpha]\varphi\to[\alpha]\psi$， $\varphi\to\psi／\langle\alpha\rangle\varphi\to\langle\alpha\rangle\psi$；

（2）$[\alpha]\varphi\leftrightarrow\neg\langle\alpha\rangle\neg\varphi$；

（3）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi／[\alpha]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha]\varphi_n\to[\alpha]\varphi$；

（4）$\langle\alpha\rangle(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\to\langle\alpha\rangle\varphi_1\wedge\ldots\wedge\langle\alpha\rangle\varphi_n$；

（5）$[\alpha]\varphi／D\alpha\to\varphi$；

（6）$D(\alpha\cup\beta)\leftrightarrow D\alpha\vee D\beta$， $D(\alpha\cup\alpha)\leftrightarrow D\alpha$；

（7）$D(\alpha;\beta)\to D\beta$， $D(\alpha;\alpha)\to D\alpha$；

（8）$D\alpha\leftrightarrow[\alpha^*]D\alpha$，

（9）$D\alpha^*$。

证明：（1）－（4）据 K_α和 RN_α如通常所证。

（5）	①	$[\alpha]\varphi$	假设
	②	$\langle\alpha\rangle D\alpha\to[\alpha]\varphi$	①
	③	$D\alpha\to\varphi$。	②，RD_α
（6）	①	$[\alpha](D\alpha\vee D\beta)$， $[\beta](D\alpha\vee D\beta)$	TA，（1），D_α，MP
	②	$[\alpha\cup\beta](D\alpha\vee D\beta)$	①，$A_\cup$
	③	$D(\alpha\cup\beta)\to D\alpha\vee D\beta$	②，（5）
	④	$[\alpha]D(\alpha\cup\beta)$， $[\beta]D(\alpha\cup\beta)$	D_α，$A_\cup$
	⑤	$D\alpha\to D(\alpha\cup\beta)$， $D\beta\to D(\alpha\cup\beta)$	④，（5）

⑥　$D\alpha\vee D\beta\to D(\alpha\cup\beta)$。　　⑤

（7）①　$[\alpha][\beta]D\beta$　　D_α，RN_α

②　$[\alpha;\beta]D\beta$　　①，$A_;$

③　$D(\alpha;\beta)\to D\beta$。　　②，（5）

因此我们有 $D(\alpha;\alpha)\to D\alpha$。

（8）①　$D\alpha\to[\alpha]D\alpha$　　D_α，TA

②　$[\alpha^*](D\alpha\to[\alpha]D\alpha)$　　①，RN_α

③　$D\alpha\to[\alpha^*]D\alpha$。　　②，归纳公理

④　$[\alpha^*]D\alpha\to D\alpha$。　　叠加公理

（9）据叠加公理，有$[\alpha^*]D\alpha^*\to D\alpha^*$，再据活动公理 D_α，易得要证结果。┤

说明：初看到（9）令人惊讶，但仔细一想还是很自然的。对当下主体来说，它在任何情况下总是做了若干次活动α（因为其中也包括 0 次）。

1.6 定义　定义从 Form 到不含模态算子的子语言 $Form_0\subseteq Form$ 的**翻译映射** t 如下：

$t(p)=p$，　对所有原子公式 $p\in At$；

$t(\neg\varphi)=\neg t(\varphi)$；　$t(\varphi\wedge\psi)=t(\varphi)\wedge t(\psi)$；　$t([\alpha]\varphi)=t(\varphi)$；　$t(D\alpha)=\top$。

对每一公式$\varphi\in Form$，我们称 $t(\varphi)$是φ的 **t-翻译**。┤

1.7 定义　令 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 是任意两个公理化系统。

我们称 $\mathbf{S}_1$ 能 **t-退化**为 $\mathbf{S}_2$，当且仅当，$\mathbf{S}_1$ 的所有内定理的 t-翻译是 $\mathbf{S}_2$ 的内定理。┤

1.8 翻译定理　**RDA** 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$。

证明：据上面的定义，证明显然。┤

1.9 定义　称系统 **S** 是**协调系统**，当且仅当，不存在φ使得φ和¬φ都是 **S** 的内定理。┤

1.10 定理　**RDA** 是协调的。

证明：假设 **RDA** 不协调，则存在φ使得φ和¬φ都是 **RDA** 的内定理。据上面的翻译定理，$t(\varphi)$和$\neg t(\varphi)$都是 $\mathbf{PC}_0$ 的内定理，矛盾于 $\mathbf{PC}_0$ 的协调性。┤

1.11 定义　（1）称<W, R>是（正则）**框架**，当且仅当，W 是非空状态集，R 是定义域为 Action 的映射：对每一$\alpha\in Action$，R_α是 W 上的二元通达关系使得下列**框架条件**满足：[①]

（CH）$R_{\alpha\cup\beta}::=R_\alpha\cup R_\beta$。

（CO）$R_{\alpha;\beta}::=R_\alpha\circ R_\beta::=\{\langle w,u\rangle\in W^2:\exists v\in W(\langle w,v\rangle\in R_\alpha$ 且 $\langle v,u\rangle\in R_\beta)\}$。

（IT）$R_{\alpha^*}::=\{\langle w,u\rangle\in W^2:\exists n\geq 0\exists v_0,\ldots,v_n\in W(w=v_0,u=v_n$ 且对 $0\leq i\leq n-1,\langle v_i,v_{i+1}\rangle\in R_\alpha)\}$。

本节把所有（正则）框架的类记作 Frame。

（2）称<W, R, [ ]>是**模型**，当且仅当，<W, R>是框架且[ ]是从 At 到 W 的幂集 P(W)中的指派映射。这里，[ ]也称为框架<W, R>上的指派映射。┤

说明：CH 是 choice 的缩写，CO 是 composition 的缩写，IT 是 iteration 的缩写。

IT 等号右边的集合通常记作 R_α^*，即$(R_\alpha)^*$。它也称为 R_α的**自返传递闭包**。

以后我们用 $wR_\alpha u$ 表示$\langle w,u\rangle\in R_\alpha$。

1.12 定义与约定　令<W, R>是框架。任给 $w\in W$ 和$\alpha\in Action$，$R_\alpha(w)::=\{u\in W:wR_\alpha u\}$。以后我们用$\exists uR_\alpha w$ 表示$\exists u\in W(uR_\alpha w)$。若$\exists uR_\alpha w$，则称 w 是α-左持续的。┤

1.13 真值集定义　令 M＝<W, R, [ ]>是模型。

定义φ相对 M 的**真值集**[φ]如下：任给 $w\in W$ 和$\alpha\in Action$，

（1）$w\in[\neg\varphi]\Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，　　（2）$w\in[\varphi\wedge\psi]\Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[[\alpha]\varphi]\Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq[\varphi]$，　　（4）$w\in[D\alpha]\Leftrightarrow\exists uR_\alpha w$。┤

说明：$\exists uR_\alpha w$ 表示：存在初始状态 u 使得（主体）在其中做了α从而把 u 改变为状态 w，这正是我们说在 w 中（主体）做了α的意思。注意：$\exists uR_\alpha w$ 是**点框架条件**：Dα在 w 的真值

① 其中 R_α是 $R(\alpha)$的缩写。

只取决于 w 是否有α-左持续性。

据上述语义，特别是（4），易见 Dα*在任何 w∈W 中成立（这对应前面 Dα*是内定理），但存在 u∈W 使得 Dα在 u 中不成立，也存在 v∈W 使得 Dα在 v 中成立但 D(α;α)在 v 中不成立。

下面的引理据真值集定义的（1）和（2）就能证明：

1.14 引理 令<W, R, [ ]>是模型。则

$[\neg\varphi]=W-[\varphi]$， $[\varphi\wedge\psi]=[\varphi]\cap[\psi]$， $[\varphi\vee\psi]=[\varphi]\cup[\psi]$， $[\bot]=\varnothing$， $[\top]=W$，

$[\varphi]\cap[\varphi\rightarrow\psi]\subseteq[\psi]$， $[\varphi\rightarrow\psi]=W\Leftrightarrow[\varphi]\subseteq[\psi]$， $[\varphi\leftrightarrow\psi]=W\Leftrightarrow[\varphi]=[\psi]$。┤

1.15 有效性定义 令 F＝<W, R>是框架，M＝<W, R, [ ]>是模型。

称φ在 M 中**有效**，记为 $M\vDash\varphi$，⇔ [φ]＝W；否则称φ在 M 中**不有效**，记为 $M\nvDash\varphi$。

称φ在 F 中**有效**，记为 $F\vDash\varphi$，⇔ 对 F 上的任意指派映射[ ]，有[φ]＝W；否则称φ在 F 中**不有效**，记为 $F\nvDash\varphi$。

称规则$\varphi_1,\ldots,\varphi_n$／ψ相对 M **保持有效性** ⇔ 若$[\varphi_1]=\ldots=[\varphi_n]=W$，则[ψ]＝W 。┤

1.16 框架可靠性定理 **RDA** 相对 Frame 可靠。

证明：任给框架 F＝<W, R>和 F 上赋值[ ]。

下面验证 **RDA** 的公理相对 M＝<F, [ ]>有效且 **RDA** 的推理规则相对 M 保持有效性。

公理 TA 和 K_α，规则 MP 和 RN_α的验证如通常。

$A_\cup$, $A_;$, A_*和 IA_*的验证参见［1］的定理 5.8(ii)，5.10(ii)，5.15(ix)和(xi)。

验证 D_α：假设[α]Dα在 M 中不有效，则存在 w∈W 使得 w∉[[α]Dα]。据真值集定义，我们有 $R_\alpha(w)\not\subseteq[D\alpha]$，所以存在 v∈W 使得 $wR_\alpha v$ 且 v∉[Dα]。据后者和真值集定义，我们有～$\exists uR_\alpha v$，矛盾于 $wR_\alpha v$。

验证 RD_α：设[<α>Dα]⊆[[α]φ]。需证：[Dα]⊆[φ]。任给 w∈[Dα]，据真值集定义，有$\exists uR_\alpha w$，再据 $uR_\alpha w$ 和 w∈[Dα]，有 u∈[<α>Dα]。再据设定，有 u∈[[α]φ]，再据 $uR_\alpha w$，有 w∈[φ]。┤

因为 **RDA** 是 **PDL** 的扩充，所以根据活动和公式的联立归纳法（据 1.1）和*-算子的特性（据公理 A_*和 IA_*以及 1.11（IT）），我们不能用通常的典范模型方法证明 **RDA** 的框架完全性定理，而是要用过滤方法，为此我们先要定义 FL-闭包作为过滤器。

1.17 定义 联立归纳定义函数 FL 和 $FL^\square$如下：

（1）FL(p)＝{p}， 对所有原子公式 p∈At；

（2）FL(¬φ)＝{¬φ}∪FL(φ)；

（3）FL(φ∧ψ)＝{φ∧ψ}∪FL(φ)∪FL(ψ)；

（4）FL(Da)＝{Da}， 对所有原子活动 a∈Act；

（5）FL(D(α∪β))＝{D(α∪β)}∪FL(Dα)∪FL(Dβ)；

（6）FL(D(α;β))＝{D(α;β)}∪FL(Dα)∪FL(Dβ)；

（7）FL(Dα*)＝{Dα*}∪FL(Dα)；

（8）FL([α]φ)＝$FL^\square$([α]φ)∪FL(φ)； 其中 $FL^\square$([α]φ)如下定义：

① $FL^\square$([a]φ)＝{[a]φ}， 对所有原子活动 a∈Act；

② $FL^\square$([α∪β]φ)＝{[α∪β]φ}∪$FL^\square$([α]φ)∪$FL^\square$([β]φ)；

③ $FL^\square$([α;β]φ)＝{[α;β]φ}∪$FL^\square$([α][β]φ)∪$FL^\square$([β]φ)；

④ $FL^\square$([α*]φ)＝{[α*]φ}∪$FL^\square$([α][α*]φ)。┤

说明：FL(φ)称为φ的 **Fischer-Ladner-closure**，简称φ的 **FL-闭包**。① FL(φ)中的公式和活动称为φ的**子表达式**(subexpression)。据［1］第 192 页的说明，④是良定义的。

① 严格说，［1］给出的 FL-闭包是没有上述（4）－（6）的。

1.18 引理

（1）若$\psi\in FL(\varphi)$，则 $FL(\psi)\subseteq FL(\varphi)$。

（2）若$\psi\in FL^{\Box}([\alpha]\varphi)$，则 $FL(\psi)\subseteq FL^{\Box}([\alpha]\varphi)\cup FL(\varphi)$。

证明：本证明施联立归纳于φ的良建子表达式关系(well-founded subexpression relation)。在此我们只须补充（1）关于 Dα的证明，其余证明参见［1］的引理 6.1 的证明。

设$\psi\in FL(D\alpha)$。要证：

① $FL(\psi)\subseteq FL(D\alpha)$。

情况 1 $\alpha=a$ 是原子活动：据上一定义（4），有 $FL(Da)=\{Da\}$，所以据设定，$\psi=Da$，所以 $FL(\psi)\subseteq FL(Da)$，从而①成立。

情况 2 $\alpha=\beta\cup\gamma$：据上一定义（5），有

② $FL(D(\beta\cup\gamma))=\{D(\beta\cup\gamma)\}\cup FL(D\beta)\cup FL(D\gamma)$，

所以据设定，下列情况之一成立：

(a) $\psi=D(\beta\cup\gamma)$，　(b) $\psi\in FL(D\beta)$，　(c) $\psi\in FL(D\gamma)$。

若(a)成立，则易见 $FL(\psi)\subseteq FL(D(\beta\cup\gamma))$。若(b)成立，则据关于（1）的归纳假设，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D\beta)$。再据②，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D(\beta\cup\gamma))$。若(c)成立，则据关于（1）的归纳假设，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D\gamma)$。再据②，仍有 $FL(\psi)\subseteq FL(D(\beta\cup\gamma))$。因此我们有①。

情况 3 $\alpha=\beta;\gamma$：据上一定义（6），有

③ $FL(D(\beta;\gamma))=\{D(\beta;\gamma)\}\cup FL(D\beta)\cup FL(D\gamma)$，

所以据设定，下列情况之一成立：

(a) $\psi=D(\beta;\gamma)$，　(b) $\psi\in FL(D\beta)$，　(c) $\psi\in FL(D\gamma)$。

若(a)成立，则易见 $FL(\psi)\subseteq FL(D(\beta;\gamma))$。若(b)成立，则据关于（1）的归纳假设，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D\beta)$。再据③，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D(\beta;\gamma))$。若(c)成立，则据关于（1）的归纳假设，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D\gamma)$。再据③，仍有 $FL(\psi)\subseteq FL(D(\beta;\gamma))$。因此我们有①。

情况 4 $\alpha=\beta^*$：据上一定义（7），有

④ $FL(D\beta^*)=\{D\beta^*\}\cup FL(D\beta)$，

所以据设定，下列情况之一成立：

(a) $\psi=D\beta^*$，　(b) $\psi\in FL(D\beta)$，

若(a)成立，则易见 $FL(\psi)\subseteq FL(D\beta^*)$。若(b)成立，则据关于（1）的归纳假设，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D\beta)$。再据④，有 $FL(\psi)\subseteq FL(D\beta^*)$。因此我们有①。┤

1.19 引理

（0）$\varphi\in FL(\varphi)$。

（1）若$[\alpha]\psi\in FL(\varphi)$，则$\psi\in FL(\varphi)$。

（2）若$[\alpha\cup\beta]\psi\in FL(\varphi)$，则$[\alpha]\psi, [\beta]\psi\in FL(\varphi)$。

（3）若$[\alpha;\beta]\psi\in FL(\varphi)$，则$[\alpha][\beta]\psi, [\beta]\psi\in FL(\varphi)$。

（4）若$[\alpha^*]\psi\in FL(\varphi)$，则$[\alpha][\alpha^*]\psi\in FL(\varphi)$。

（5）若 $D(\alpha\cup\beta)\in FL(\varphi)$，则 $D\alpha, D\beta\in FL(\varphi)$。

（6）若 $D(\alpha;\beta)\in FL(\varphi)$，则 $D\alpha, D\beta\in FL(\varphi)$。

（7）若 $D\alpha^*\in FL(\varphi)$，则 $D\alpha\in FL(\varphi)$。

证明：（据 $FL(\varphi)$的定义显然有 0）。如［1］的引理 6.2 的证明，我们有（1）－（4）。

（5）设 $D(\alpha\cup\beta)\in FL(\varphi)$。据上一引理（1），则 $FL(D(\alpha\cup\beta))\subseteq FL(\varphi)$。再据 1.17（5），有 $FL(D\alpha), FL(D\beta)\subseteq FL(\varphi)$。再据（0），易见 $D\alpha, D\beta\in FL(\varphi)$。

（6）设 $D(\alpha;\beta)\in FL(\varphi)$。据上一引理（1），则 $FL(D(\alpha;\beta))\subseteq FL(\varphi)$。再据 1.17（6），有 $FL(D\alpha), FL(D\beta)\subseteq FL(\varphi)$。再据（0），易见 $D\alpha, D\beta\in FL(\varphi)$。

（7）设 $D\alpha^*\in FL(\varphi)$。据上一引理（1），则 $FL(D\alpha^*)\subseteq FL(\varphi)$。再据 1.17（7），有

$FL(D\alpha)\subseteq FL(\varphi)$。再据（0），易见 $D\alpha\in FL(\varphi)$。┤

1.20 定义 任给集合 X，我们用 Card(X)表示 X 的基数。任给公式φ和活动α，我们用 Leng(φ)和 Leng(α)分别表示φ和α的**长度**，即构成φ和α的符号的个数。┤

1.21 引理

（1）对每一公式φ，有 $Card(FL(\varphi)) \leq Leng(\varphi)$。

（2）对每一公式[α]φ，有 $Card(FL^{\square}([\alpha]\varphi)) \leq Leng(\alpha)$。

证明：参见［1］的引理 6.3 的证明。在此我们只补充关于 Dα的证明。我们只须证：

（%）$Card(FL(D\alpha)) \leq Leng(D\alpha)$。

情况 1 α＝a 是原子活动：据 1.17（4）显然。

情况 2 α＝β∪γ：我们有

$Card(FL(D(\beta\cup\gamma)))=Card(\{D(\beta\cup\gamma)\}\cup FL(D\beta)\cup FL(D\gamma))$ 据 1.17（5）

$=1+Card(FL(D\beta))+Card(FL(D\gamma))$

$\leq 1+ Leng(FL(D\beta))+Leng(FL(D\gamma))$ 据归纳假设

$\leq Leng(D(\beta\cup\gamma))$。

情况 3 α＝β;γ：我们有

$Card(FL(D(\beta;\gamma)))=Card(\{D(\beta;\gamma)\}\cup FL(D\beta)\cup FL(D\gamma))$ 据 1.17（6）

$=1+Card(FL(D\beta))+Card(FL(D\gamma))$

$\leq 1+ Leng(FL(D\beta))+Leng(FL(D\gamma))$ 据归纳假设

$\leq Leng(D(\beta;\gamma))$。

情况 4 α＝β*：我们有

$Card(FL(D\beta^*))=Card(\{D\beta^*\}\cup FL(D\beta))$ 据 1.17（7）

$=1+Card(FL(D\beta))$

$\leq 1+ Leng(FL(D\beta))$ 据归纳假设

$\leq Leng(D\beta^*)$。┤

1.22 过滤定义 任给模型 M＝<W, R, [ ]>和公式φ。

（1）定义 W 上的**等价关系**$\approx^{\varphi}$ 如下：任给 w, u∈W，

$w\approx^{\varphi}u \Leftrightarrow \forall\psi\in FL(\varphi)(w\in[\psi] \Leftrightarrow u\in[\psi])$。

（2）任给 w∈W，定义 w 相对$\approx^{\varphi}$ 的**等价类**为：$\|w\|^{\varphi}=\{u\in W：w\approx^{\varphi}u\}$。

（3）定义 M 相对 FL(φ)的**过滤** $M^{\varphi}=\langle W^{\varphi}, R^{\varphi}, [\ ]^{\varphi}\rangle$如下：

① $W^{\varphi}=\{\|w\|^{\varphi}：w\in W\}$。

② $R_a^{\varphi}=\{<\|w\|^{\varphi}, \|u\|^{\varphi}>：wR_au\}$， 对每一原子活动 a；

对应复合活动α的关系 R_α^{φ} 如 1.11 定义。

③ $[p]^{\varphi}=\{\|w\|^{\varphi}：w\in[p]\}$， 对每一原子公式 p。┤

说明：为了简洁，以后在不致混淆之处，我们省略 $\|w\|^{\varphi}$ 的上标φ。

1.23 真值集定义 令 M^{φ} 如上规定。定义φ相对 M^{φ} 的**真值集**$[\varphi]^{\varphi}$ 如 1.13。┤

1.24 过滤基本定理

令<W^{φ}, R^{φ}, $[\ ]^{\varphi}$>是模型<W, R, [ ]>相对 FL(φ)的过滤。任给 w, u∈W，我们有：

（0）对每一 $D\alpha\in FL(\varphi)$，有 $wR_\alpha u \Leftrightarrow \|w\| R_\alpha^{\varphi} \|u\|$。

（1）对每一$\psi\in FL(\varphi)$，有 $w\in[\psi] \Leftrightarrow \|w\|\in[\psi]^{\varphi}$。

（2）对每一$[\alpha]\psi\in FL(\varphi)$，

极小条件：若 $wR_\alpha u$，则 $\|w\| R_\alpha^{\varphi} \|u\|$。

极大条件：若 $\|w\| R_\alpha^{\varphi} \|u\|$且 $w\in[[\alpha]\psi]$，则 $u\in[\psi]$。

证明：本证明施联立归纳于φ的良建子表达式关系。在此我们只须证明（0）且补充（1）中关于 Dα的证明，其余证明参见［1］的引理 6.4 的证明。

（0）任给

① $D\alpha \in FL(\varphi)$。

下证：

② $wR_\alpha u \Leftrightarrow \|w\| R_\alpha^\varphi \|u\|$。

施归纳于α的结构。

情况 1 $\alpha = a$ 是原子活动：据过滤定义 1.23。

情况 2 $\alpha = \beta\cup\gamma$：据①和 1.19（5），有

③ $D\beta \in FL(\varphi)$， 且④ $D\gamma \in FL(\varphi)$。

所以我们有

$wR_{\beta\cup\gamma}u$

$\Leftrightarrow wR_\beta u$ 或 $wR_\gamma u$ 据 1.11 的（CH）

$\Leftrightarrow \|w\| R_\beta^\varphi \|u\|$ 或 $\|w\| R_\gamma^\varphi \|u\|$ 据③－④和归纳假设

$\Leftrightarrow \|w\| R_{\beta\cup\gamma}^\varphi \|u\|$。 据 1.22 的（CH）

情况 3 $\alpha = \beta;\gamma$：据①和 1.19（6），有上述③和④。所以我们有

$wR_{\beta;\gamma}u$

$\Leftrightarrow \exists v \in W(wR_\beta v$ 且 $vR_\gamma u)$ 据 1.11 的（CO）

$\Leftrightarrow \exists v \in W(\|w\| R_\beta^\varphi \|v\|$ 且 $\|v\| R_\gamma^\varphi \|u\|)$ 据③－④和归纳假设

$\Leftrightarrow \|w\| R_{\beta;\gamma}^\varphi \|u\|$。 据 1.22 的（CO）

情况 4 $\alpha = \beta^*$：据①和 1.19（7），有④。所以我们有

$wR_{\beta^*}u$

$\Leftrightarrow \exists n\geq 0 \exists v_0,\ldots, v_n \in W(w = v_0, u = v_n$ 且对 $0 \leq i \leq n-1, v_iR_\beta v_{i+1})$ 据 1.11 的（IT）

$\Leftrightarrow \exists n\geq 0 \exists v_0,\ldots, v_n \in W(w = v_0, u = v_n$ 且对 $0 \leq i \leq n-1, \|v_i\| R_\beta^\varphi \|v_{i+1}\|)$ 据④和归纳假设[①]

$\Leftrightarrow \|w\| R_{\beta^*}^\varphi \|u\|$。 据 1.22 的（IT）

（1）任给①。下证：

⑤ $w \in [D\alpha] \Leftrightarrow \|w\| \in [D\alpha]^\varphi$。

施归纳于α的结构。

情况 1 $\alpha = a$ 是原子活动：我们有

$w \in [Da]$

$\Leftrightarrow \exists u \in W(uR_a w)$ 据真值集定义

$\Leftrightarrow \exists u \in W(\|u\| R_a^\varphi \|w\|)$ 据①和（0）

$\Leftrightarrow \|w\| \in [Da]^\varphi$。 据真值集定义

情况 2 $\alpha = \beta\cup\gamma$：我们有

$w \in [D(\beta\cup\gamma)]$

$\Leftrightarrow \exists u \in W(uR_{\beta\cup\gamma} w)$ 据真值集定义

$\Leftrightarrow \exists u \in W(\|u\| R_{\beta\cup\gamma}^\varphi \|w\|)$ 据①和（0）

$\Leftrightarrow \|w\| \in [D(\beta\cup\gamma)]^\varphi$。 据真值集定义

本情况也可以如下证明：

$w \in [D(\beta\cup\gamma)]$

$\Leftrightarrow w \in [D\beta]$或 $w \in [D\gamma]$ 据 1.5（6）和可靠性定理

$\Leftrightarrow \|w\| \in [D\beta]^\varphi$ 或 $\|w\| \in [D\gamma]^\varphi$ 据③－④和归纳假设

$\Leftrightarrow \|w\| \in [D(\beta\cup\gamma)]^\varphi$ 。 据 1.5（6）和可靠性定理（因为过滤也是模型）

情况 3 $\alpha = \beta;\gamma$：我们有

$w \in [D(\beta;\gamma)]$

---

① 这里的表述还可以参见文献［1］第 198 页情况 5 的证明。

$\Leftrightarrow \exists u\in W(uR_{\beta;\gamma}w)$ 据真值集定义

$\Leftrightarrow \exists u\in W(\|u\| R_{\beta;\gamma}^{\varphi} \|w\|)$ 据①和（0）

$\Leftrightarrow \|w\|\in[D(\beta;\gamma)]^{\varphi}$ 。 据真值集定义

情况 4 $\alpha=\beta^*$：我们有

$w\in[D\beta^*]$

$\Leftrightarrow \exists u\in W(uR_{\beta^*}w)$ 据真值集定义

$\Leftrightarrow \exists u\in W(\|u\| R_{\beta^*}^{\varphi} \|w\|)$ 据①和（0）

$\Leftrightarrow \|w\|\in[D\beta^*]^{\varphi}$ 。 据真值集定义 ⊣

1.25 定义 （1）称<W, R, [ ]>是（正则）**非标准模型**，当且仅当，W 是非空状态集，[ ] 是从 At 到 P(W)中的指派映射，R 是定义域为 Action 的映射：对每一$\alpha\in$Action，R_α是 W 上的二元通达关系使得下列**语义条件**满足：

（CH）$R_{\alpha\cup\beta}=R_\alpha\cup R_\beta$。

（CO）$R_{\alpha;\beta}=R_\alpha\circ R_\beta=\{<w, u>\in W^2:\exists v\in W(wR_\alpha v$ 且 $vR_\alpha u)\}$。

（IT*）R_{α^*}是包含 R_α的自返传递二元关系使得下列条件满足：

① $[[\alpha^*]\varphi]=[\varphi\wedge[\alpha;\alpha^*]\varphi]$，

② $[[\alpha^*]\varphi]=[\varphi\wedge[\alpha^*](\varphi\rightarrow[\alpha]\varphi)]$。

（2）定义非标准模型 M＝<W, R, [ ]>相对 FL(φ)的过滤 M^{φ} ＝<W^{φ}, R^{φ}, $[\ ]^{\varphi}$ >如 1.22。定义φ相对 M^{φ} 的**真值集**$[\varphi]^{\varphi}$ 如 1.13。⊣

说明：IT*是**模型条件**，而不是框架条件。另外，要注意，非标准模型的过滤仍满足框架条件 IT，所以

非标准模型的过滤是标准模型。

易证 **RDA** 的内定理集 Th(**RDA**)相对非标准模型仍有效。

1.26 非标准模型的过滤基本定理

令<W^{φ}, R^{φ}, $[\ ]^{\varphi}$ >是模型<W, R, [ ]>相对 FL(φ)的过滤。任给 w, u∈W，我们有：

（0）对每一 $D\alpha\in FL(\varphi)$，有 $wR_\alpha u \Leftrightarrow \|w\| R_\alpha^{\varphi} \|u\|$。

（1）对每一$\psi\in FL(\varphi)$，有 $w\in[\psi] \Leftrightarrow \|w\|\in[\psi]^{\varphi}$。

（2）对每一$[\alpha]\psi\in FL(\varphi)$，

极小条件：若 $wR_\alpha u$，则 $\|w\| R_\alpha^{\varphi} \|u\|$。

极大条件：若 $\|w\| R_\alpha^{\varphi} \|u\|$且 $w\in[[\alpha]\psi]$，则 $u\in[\psi]$。

证明：证明（0）和（1）关于 Dα的部分恰如 1.24，其余证明参见［1］的引理 6.6 的证明。⊣

1.27 定义 令 w 是公式集。

（1）称 w 是**一致集**，当且仅当，对所有有穷公式序列$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w$，有$\nvdash \neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$。

（2）称 w 是**极大集**，当且仅当，对所有$\varphi\in$Form，有$\varphi\in w$ 或$\neg\varphi\in w$。

（3）称 w 是**极大一致集**，当且仅当，w 既是一致的又是极大的。

（4）称 **RDA** 是**一致系统**，当且仅当，Th(**RDA**)一致。⊣

1.28 引理 **RDA** 一致。

证明：假设 **RDA** 不一致。则 Th(**RDA**)不一致，所以存在公式序列$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in$Th(**RDA**)使得$\vdash \neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$。因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in$Th(**RDA**)，所以 $\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n$。据定义 1.9，**RDA** 不协调，矛盾于 1.10。⊣

因为 **RDA** 是 **PC** 的扩充，所以如通常证明，我们可以得到下面两个引理（包括 1.31）。

1.29 引理 令 w 是公式集。

（1）若 w 极大一致。则

$\neg\varphi\in w \Leftrightarrow \varphi\notin w$，

$\varphi\wedge\psi\in w \Leftrightarrow \varphi\in w$ 且$\psi\in w$， $\varphi\vee\psi\in w \Leftrightarrow \varphi\in w$ 或$\psi\in w$，

$\varphi\in w$ 且$\vdash \varphi\to\psi \Rightarrow \psi\in w$， $\varphi\in w$ 且$\varphi\to\psi\in w \Rightarrow \psi\in w$，

$(\varphi\in w \Rightarrow \psi\in w) \Leftrightarrow \varphi\to\psi\in w$， $(\varphi\in w \Leftrightarrow \psi\in w) \Leftrightarrow \varphi\leftrightarrow\psi\in w$，

Th(**RDA**)$\subseteq$w。

（2）若 $\nvdash \varphi$，则存在极大一致集 w 使得$\varphi\notin w$。

（3）φ属于每一以 w 为子集的极大一致集 $\Leftrightarrow$ 存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w$ 使得$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi$。

（4）（**Lindenbaum-**引理）令 w 一致。则存在极大一致集 u 使得 $w\subseteq u$。┤

1.30 定义 $|\varphi|::=\{w$：w 是极大一致集使得$\varphi\in w\}$。┤

1.31 引理 令 W 是所有极大一致集的集合。

（1）$|\neg\varphi|=W-|\varphi|$，$|\varphi\wedge\psi|=|\varphi|\cap|\psi|$，$|\varphi\vee\psi|=|\varphi|\cup|\psi|$，$|\bot|=\varnothing$，$|\top|=W$。

（2）$|\varphi|\cap|\varphi\to\psi|\subseteq|\psi|$。 （3）$|\varphi\to\psi|=W \Leftrightarrow |\varphi|\subseteq|\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi\to\psi$。

（4）$|\varphi\leftrightarrow\psi|=W \Leftrightarrow |\varphi|=|\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi\leftrightarrow\psi$。┤

1.32 定义 令 w 是公式集。$w^{-[\alpha]}::=\{\varphi$：$[\alpha]\varphi\in w\}$， $w^{+<\alpha>}::=\{<\alpha>\varphi$：$\varphi\in w\}$。┤

1.33 定义 **RDA** 的典范框架<W, R>定义为： $W=\{w$：w 是极大一致集$\}$，且

$R=\{R_\alpha$：$\alpha\in$Action$\}$， 其中每一 $R_\alpha=\{<w, u>\in W^2$：$w^{-[\alpha]}\subseteq u\}$。

RDA 的典范模型<W, R, [ ]>定义为：<W, R>是 **RDA** 的典范框架，且

$[p]=|p|$， 对每一原子公式 p。┤

1.34 典范框架主引理 令<W, R>是 **RDA** 的典范框架，且令 $w\in W$。则

（1）$[\alpha]\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(wR_\alpha u \Rightarrow \varphi\in u)$。

（2）$w^{-[\alpha]}\subseteq u \Leftrightarrow u^{+<\alpha>}\subseteq w$， 对所有 $u\in W$。

（3）$D\alpha\in w \Leftrightarrow \exists uR_\alpha w$。

（4）$R_{\alpha\cup\beta}=R_\alpha\cup R_\beta$。

（5）$R_{\alpha;\beta}=R_\alpha\circ R_\beta$。

证明：（1）“$\Rightarrow$”：设$[\alpha]\varphi\in w$。任给 $u\in W$ 使得 $wR_\alpha u$。因为$[\alpha]\varphi\in w$ 且 $w^{-[\alpha]}\subseteq u$，故$\varphi\in u$。

“$\Leftarrow$”：设：任给 $u\in W$，若 $w^{-[\alpha]}\subseteq u$，则$\varphi\in u$。这意味φ属于每一以 $w^{-[\alpha]}$为子集的极大一致集。据 1.29（3），存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-[\alpha]}$使得$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi$。据 1.5（3），我们有

$\vdash [\alpha]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha]\varphi_n\to[\alpha]\varphi$。

因为$[\alpha]\varphi_1,\ldots,[\alpha]\varphi_n\in w$，所以据上式和 1.29（1），有$[\alpha]\varphi\in w$。

（2）“$\Rightarrow$”：任给 $u\in W$ 使得 $w^{-[\alpha]}\subseteq u$。任给$<\alpha>\varphi\in u^{+<\alpha>}$，则$\varphi\in u$，所以$\neg\varphi\notin u$。再据给定 $w^{-[\alpha]}\subseteq u$，有$\neg\varphi\notin w^{-[\alpha]}$，所以$[\alpha]\neg\varphi\notin w$，所以$\neg[\alpha]\neg\varphi\in w$，因此据缩写定义，有$<\alpha>\varphi\in w$。

“$\Leftarrow$”：任给 $u\in W$ 使得 $u^{+<\alpha>}\subseteq w$。任给$\varphi\in w^{-[\alpha]}$，则$[\alpha]\varphi\in w$，所以据 1.5（2），有$\neg<\alpha>\neg\varphi\in w$，因此$<\alpha>\neg\varphi\notin w$。再据 $u^{+<\alpha>}\subseteq w$，有$<\alpha>\neg\varphi\notin u^{+<\alpha>}$，所以$\neg\varphi\notin u$，因此$\varphi\in u$。

（3）“$\Rightarrow$”：设 $D\alpha\in w$。先证：

① $w^{+<\alpha>}$一致。

假设①不成立，则据 1.27（1），存在$<\alpha>\varphi_1, \ldots, <\alpha>\varphi_n\in w^{+<\alpha>}$使得

$\vdash \neg(<\alpha>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha>\varphi_n)$。

所以据 TA 和 MP，有

$\vdash <\alpha>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha>\varphi_n\to\neg<\alpha>D\alpha$。

据 1.5（4），有$\vdash <\alpha>(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\to\neg<\alpha>D\alpha$。据推理规则 RD_α，易证

② $\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\neg D\alpha$。

易见$\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in w$，因此据②，有$\neg D\alpha\in w$，矛盾于设定。所以①成立。据①和 Lindenbaum-引理，有$\exists u\in W(w^{+<\alpha>}\subseteq u)$，再据（2），有

$\exists u\in W(u^{-[\alpha]}\subseteq w)$，

因此$\exists uR_{\alpha}w$。

"$\Leftarrow$"：设 $D\alpha\notin w$。只须证：$\sim\exists uR_{\alpha}w$。假设$\exists uR_{\alpha}w$，即$\exists u\in W(u^{-[\alpha]}\subseteq w)$。因为 $D\alpha\notin w$，所以 $D\alpha\notin u^{-[\alpha]}$，因此$[\alpha]D\alpha\notin u$。矛盾于公理$[\alpha]D\alpha$属于 u。

（4）－（5）据公理 $A_{\cup}$和 $A_{;}$。具体证明请参见［1］的引理 7.4 的(i)－(ii)。┤

1.35 定理　RDA 的典范模型是非标准模型。

证明：令 M＝<W, R, [ ]>是 **RDA** 的典范模型。据 1.29（1）和上一主引理，我们看到联结符$\neg$和$\wedge$，算子$[\alpha]$和 D 的性质如标准模型。下面只须证刻画*-算子的公式

$$[\alpha^*]\varphi\leftrightarrow\varphi\wedge[\alpha;\alpha^*]\varphi \quad \text{和} \quad [\alpha^*]\varphi\leftrightarrow\varphi\wedge[\alpha^*](\varphi\rightarrow[\alpha]\varphi)$$

在 M 中有效。据［1］的练习 5.9，上面两式是 **RDA** 的内定理，所以据 1.29（1），它们在 M 中有效。因此 1.25 的（IT*）成立。┤

1.36 框架完全性定理　RDA 相对 Frame 完全。

证明：只须证：

(%) 若φ不是 **RDA** 的内定理，则φ在 Frame 中某个框架中不有效。

设φ不是 **RDA** 的内定理。令 M＝<W, R, [ ]>是 **RDA** 的典范模型。据设定，易证 $M\nvDash\varphi$。令 M^{φ}＝$<W^{\varphi}, R^{\varphi}, [\ ]^{\varphi}>$是 M 相对 FL(φ)的过滤，则据 1.25 后面的说明，M^{φ} 是标准模型。据 1.19（0），有$\varphi\in FL(\varphi)$，所以据标准模型的过滤基本定理 1.24（1），有 $M^{\varphi}\nvDash\varphi$，所以我们有$<W^{\varphi}, R^{\varphi}>\nvDash\varphi$。易见$<W^{\varphi}, R^{\varphi}>$属于 Frame，所以(%)成立。┤

结束语：

RDA 相对 Dα是极小系统（参见［5］第 3 节关于 **NAD** 的部分），所以我们还可以根据实际情况加以扩充。例如，下面的公式和规则可以考虑加入 **RDA**：

（1）$<\beta>D(\alpha;\beta)\rightarrow D\alpha$，

（2）$[\alpha]\varphi\vee[\beta]\psi／D(\alpha\cup\beta)\rightarrow\varphi\vee\psi$。

易见（1）对应框架条件：

$$\exists u(wR_{\beta}u \text{ 且} \exists u_0R_{\alpha;\beta}u) \Rightarrow \exists w_0R_{\alpha}w。$$

二、合力改变状态的逻辑

本节我们要概括上节（单个主体）做了一个活动这个概念。我们要建立逻辑 **GDA** 来刻画下列概念：

若干主体做了若干活动形成合力改变一个状态。

我们用 Aα表示主体 A 做了活动α（Aα是对前面的 Dα的相对化）。"Aα在 w 中成立"的点框架条件相对化为$\exists uR_{\alpha A}w$，它直观表示：存在初始状态 u，A 在其中做了α从而把 u 改变为状态 w。现在我们要考虑的是这种情况（简单但又是本质）的概括（概括到多主体）：2 个主体做了 2 个活动共同把初始状态 u 改变为状态 w。这就是我们所谓**合力改变状态**的含义。

为了节省篇幅，以下我们不考虑复合活动的情况，读者可以按上节内容做相应的推广。另一方面，前面有些定义和结果对 **PC** 的每一扩充都适用，而下面（包括以后几节）我们建立的逻辑都是 **PC** 的扩充，所以我们省略不提，希望读者阅读时注意。

2.1 公式的形成规则　令 At 和 Act 如上节规定。本文我们用 Agent 表示有穷多个主体的集合。归纳定义所有公式φ的集合 Form 如下：

$$\varphi::=p\mid\neg\varphi\mid(\varphi\wedge\psi)\mid[\alpha_A]\varphi\mid A\alpha+B\beta, \quad \text{其中 } p\in At，A, B\in Agent \text{ 和}\alpha, \beta\in Act。┤$$

说明：$[\alpha_A]\varphi$的直观意义是：主体 A 做的活动α使φ必然成立。Aα＋Bβ的直观意义是：主体 A 和 B 分别同时做了活动α和β。

Aα＋Bβ可以自然地概括到

$$A_1\alpha_1+\ldots+A_n\alpha_n, \quad \text{其中 } A_1, \ldots, A_n\in Agent。$$

因此本节我们得到的结果也可以自然地概括到关于 $A_1\alpha_1+\ldots+A_n\alpha_n$ 的结果。注意：$A_1\alpha_1+\ldots+A_n\alpha_n$ 的直观意义是：主体 $A_1, \ldots, A_n$ 分别同时做了活动 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$。

2.2 规定 当 $A=B$ 且 $\alpha=\beta$ 时，我们用 $A\alpha$ 缩写 $A\alpha+B\beta$。┤

2.3 定义 **合力系统 GDA** 定义如下：对所有 $A, B\in$Agent，$\alpha, \beta\in$Act 和 $\varphi, \psi\in$Form，TA 和 MP 如前定义，

（$K_{\alpha A}$） $[\alpha_A](\varphi\to\psi)\to[\alpha_A]\varphi\to[\alpha_A]\psi$，

（DIS） $[\alpha_A](A\alpha+B\beta)\vee[\beta_B](A\alpha+B\beta)$，

（$RN_{\alpha A}$） $\varphi／[\alpha_A]\varphi$，

（RG） $[\alpha_A]\varphi\vee[\beta_B]\psi／A\alpha+B\beta\to\varphi\vee\psi$。┤

说明：公理 DIS 和规则 RG 包含两类模式：（可能不同的）主体和（可能不同的）活动，RG 还包含（可能不同的）命题。

2.4 引理 下面是 **GDA** 的导出规则和内定理：

（1）$\varphi\to\psi／[\alpha_A]\varphi\to[\alpha_A]\psi$， $\varphi\to\psi／<\alpha_A>\varphi\to<\alpha_A>\psi$。

（2）$[\alpha_A]\varphi\leftrightarrow\neg<\alpha_A>\neg\varphi$。

（3）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi／[\alpha_A]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha_A]\varphi_n\to[\alpha_A]\varphi$。

（4）$<\alpha_A>(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\to<\alpha_A>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha_A>\varphi_n$。

（5）$[\alpha_A]\varphi\vee[\alpha_A]\psi／A\alpha\to\varphi\vee\psi$， $[\alpha_A]\varphi／A\alpha\to\varphi$，
$\neg(<\alpha_A>\varphi\wedge<\beta_B>\psi)／\varphi\wedge\psi\to\neg(A\alpha+B\beta$。

（6）$[\alpha_A](A\alpha+A\beta)\vee[\beta_A](A\alpha+A\beta)$， $[\alpha_A]A\alpha$。

（7）$A\alpha+A\beta\to A\alpha\wedge A\beta$。

（8）$A\alpha+B\beta\to B\beta+A\alpha$， $A\alpha+B\beta\leftrightarrow B\beta+A\alpha$。

证明：据 $K_{\alpha A}$ 和 $RN_{\alpha A}$ 易得（1）－（4）。据 RG 和 2.2 易得（5）。据 DIS 易得（6）。

证（7）：据（6），有 $\vdash[\alpha_A]A\alpha$，所以 $\vdash[\alpha_A]A\alpha\vee[\beta_B]A\alpha$，故据 RG，有 $\vdash A\alpha+B\beta\to A\alpha$。据对称性，同理可证 $\vdash A\alpha+B\beta\to B\beta$。

证（8）：据 DIS，我们有 $\vdash[\beta_B](B\beta+A\alpha)\vee[\alpha_A](B\beta+A\alpha)$。因此有

$$\vdash[\alpha_A](B\beta+A\alpha)\vee[\beta_B](B\beta+A\alpha)$$

再据 RG，易得 $\vdash A\alpha+B\beta\to B\beta+A\alpha$。┤

说明：据后面的 2.10，（7）的逆不是内定理，从而联结符＋不会退化为∧。

2.5 定义 定义从 Form 到不含模态算子的子语言 $Form_0\subseteq$Form 的**翻译映射** t 如下：

$t(p)=p$， 对所有 $p\in$At；

$t(\neg\varphi)=\neg t(\varphi)$； $t(\varphi\wedge\psi)=t(\varphi)\wedge t(\psi)$； $t([\alpha_A]\varphi)=t(\varphi)$； $t(A\alpha+B\beta)=\top$。┤

如前定义 t-翻译，t-退化和协调概念，易证：

2.6 定理 **GDA** 能 t-退化为 $\mathbf{PC_0}$ 且 **GDA** 是协调的。┤

2.7 定义 称<W, R>是**框架**，当且仅当，W 是非空状态集，R 是定义域为 Act×Agent 的映射：对每一 $\alpha\in$Act 和 $A\in$Agent，$R_{\alpha A}$ 是 W 上的二元通达关系使得下列**框架条件**满足：对每一 $w\in W$，

（*）$\forall v\in W(wR_{\alpha A}v\Rightarrow\exists u\in W(uR_{\alpha A}v$ 且 $uR_{\beta B}v))$ 或 $\forall v\in W(wR_{\beta B}v\Rightarrow\exists u\in W(uR_{\alpha A}v$ 且 $uR_{\beta B}v))$。

本节把所有如上定义的框架的类记作 Frame。┤

注意：$R_{\alpha A}$ 是 $R(\alpha, A)$ 的缩写。以后我们也用定义：$R_{\alpha A}(w)::=\{u\in W：wR_{\alpha A}u\}$。

2.8 真值集定义 定义 φ 相对<W, R, [ ]>的**真值集** $[\varphi]$ 如下：对所有 $w\in W$，$A, B\in$Agent，$\alpha, \beta\in$Act 和 $\varphi, \psi\in$Form，

（1）$w\in[\neg\varphi]\Leftrightarrow w\notin[\varphi]$， （2）$w\in[\varphi\wedge\psi]\Leftrightarrow w\in[\varphi]$ 且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[[\alpha_A]\varphi]\Leftrightarrow R_{\alpha A}(w)\subseteq[\varphi]$， （4）$w\in[A\alpha+B\beta]\Leftrightarrow\exists u\in W(uR_{\alpha A}w$ 且 $uR_{\beta B}w)$。┤

说明：（4）还可以简单表示为：

$w\in[A\alpha+B\beta]\Leftrightarrow\exists uR_{\alpha A}\cap R_{\beta B}w$。

2.9 框架可靠性定理 **GDA** 相对 Frame 可靠。

证明：任给框架 F＝<W, R>和 F 上赋值[ ]。这里只验证 DIS 和 RG。

验证 DIS：任给 $w\in W$，据 2.7 的（*），我们有

$\forall v\in W(wR_{\alpha A}v\Rightarrow\exists u\in W(uR_{\alpha A}v$ 且 $uR_{\beta B}v))$或$\forall v\in W(wR_{\beta B}v\Rightarrow\exists u\in W(uR_{\alpha A}v$ 且 $uR_{\beta B}v))$。据真值集定义（4），我们有

$\forall v\in W(wR_{\alpha A}v\Rightarrow v\in[A\alpha+B\beta])$或$\forall v\in W(wR_{\beta B}v\Rightarrow v\in[A\alpha+B\beta])$。

再据真值集定义（3），易见 $w\in[[\alpha_A](A\alpha+B\beta)\vee[\beta_B](A\alpha+B\beta)]$。

验证 RG：设$[[\alpha_A]\varphi\vee[\beta_B]\psi]=W$。只须证：$[A\alpha+B\beta]\subseteq[\varphi\vee\psi]$。任给 $w\in[A\alpha+B\beta]$，据真值集定义（4），有

（＃）$\exists u\in W(uR_{\alpha A}w$ 且 $uR_{\beta B}w)$。

而据设定，有 $u\in[[\alpha_A]\varphi\vee[\beta_B]\psi]$。再据（＃）和真值集定义（3），易见 $w\in[\varphi\vee\psi]$。┤

2.10 反例 $A\alpha\wedge A\beta\rightarrow A\alpha+A\beta$不是 **GDA** 的内定理。

证明：因为

$\exists u\in W(uR_{\alpha A}w)$且$\exists u\in W(uR_{\beta B}w)$

一般不蕴涵

$\exists u\in W(uR_{\alpha A}w$ 且 $uR_{\beta B}w)$，

所以我们很容易构造一个框架 F 使得 $A\alpha\wedge A\beta\rightarrow A\alpha+A\beta$在 F 中不有效。再据框架可靠性定理，易见要证结果成立。┤

令 w 是公式集。$w^{-[\alpha_A]}::=\{\varphi：[\alpha_A]\varphi\in w\}$， $w^{+<\alpha_A>}::=\{<\alpha_A>\varphi：\varphi\in w\}$。

2.11 定义 **GDA** 的典范框架 F＝<W, R>定义为： W＝{w：w 是极大一致集}，且

R＝$\{R_{\alpha A}：\alpha\in Act$ 且 $A\in Agent\}$， 其中每一 $R_{\alpha A}=\{<w, u>\in W^2：w^{-[\alpha_A]}\subseteq u\}$。┤

2.12 典范框架主引理 令<W, R>是 **GDA** 的典范框架，且令 $w\in W$。则

（1）$[\alpha_A]\varphi\in w\Leftrightarrow\forall u\in W(wR_{\alpha A}u\Rightarrow\varphi\in u)$。

（2）$w^{-[\alpha_A]}\subseteq u\Leftrightarrow u^{+<\alpha_A>}\subseteq w$， 对所有 $u\in W$。

（3）$A\alpha+B\beta\in w\Leftrightarrow\exists u\in W(uR_{\alpha A}w$ 且 $uR_{\beta B}w)$。

证明：（1）和（2）的证明类似 1.34 的（1）和（2）的证明。

（3）“⇒”：设 $A\alpha+B\beta\in w$。据 Lindenbaum-引理和（2），只须证

$w^{+<\alpha_A>}\cup w^{+<\beta_B>}$一致。

假设要证结果不成立，则存在$<\alpha_A>\varphi_1, \ldots, <\alpha_A>\varphi_n\in w^{+<\alpha_A>}$和$<\beta_B>\psi_1, \ldots, <\beta_B>\psi_m\in w^{+<\beta_B>}$使得

$\vdash\neg(<\alpha_A>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha_A>\varphi_n\wedge<\beta_B>\psi_1\wedge\ldots\wedge<\beta_B>\psi_m)$。

据 2.4（4），有$\vdash\neg(<\alpha_A>(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\wedge<\beta_B>(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_m))$。再据 2.4（5），有

① $\vdash\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\wedge\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_m\rightarrow\neg(A\alpha+B\beta)$。

易见$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\in w$，因此据①，有$\neg(A\alpha+B\beta)\in w$，矛盾于设定。

“⇐”：设 $A\alpha+B\beta\notin w$。只须证：$\sim\exists u\in W(uR_{\alpha A}w$ 且 $uR_{\beta B}w)$，即要证：

$\forall u\in W(\sim uR_{\alpha A}w$ 或$\sim uR_{\beta B}w)$。

任给 $u\in W$ 使得 $uR_{\alpha A}w$，要证$\sim uR_{\beta B}w$，为此只须证：

② 存在公式φ使得$\varphi\in u^{-[\beta_B]}$但$\neg\varphi\in w$。

因为 $A\alpha+B\beta\notin w$，因此

③ $\neg(A\alpha+B\beta)\in w$，

故$<\alpha_A>\neg(A\alpha+B\beta)\in w^{+<\alpha_A>}$。因为 $uR_{\alpha A}w$，故据（2），有 $w^{+<\alpha_A>}\subseteq u$，因此$<\alpha_A>\neg(A\alpha+B\beta)\in u$，

再据公理 DIS，易得$[\beta_B](A\alpha+B\beta)\in u$，所以 $A\alpha+B\beta\in u^{-[\beta_B]}$，再据③，易得②。┤

2.13 典范模型基本定理　令$<W, R, [\ ]>$是 **GDA** 的典范模型。

$\varphi\in w \Leftrightarrow w\in[\varphi]$，　对每一 $w\in W$ 和公式φ。

证明：施归纳于φ的结构。只考虑下面情况，其余情况易证。

情况 1　$\varphi=[\alpha_A]\psi$：易见

$[\alpha_A]\psi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow \psi\in u)$	据上一引理（1）
$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow u\in\|\psi\|)$	据 1.30
$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow u\in[\psi])$	据归纳假设
$\Leftrightarrow w\in[[\alpha_A]\psi]$。	据真值集定义

情况 2　$\varphi=A\alpha+B\beta$：我们有

$A\alpha+B\beta\in w \Leftrightarrow \exists u\in W(uR_{\alpha A}w$ 且 $uR_{\beta B}w)$	据上一引理（3）
$\Leftrightarrow w\in[A\alpha+B\beta]$。	据真值集定义 ┤

2.14 引理　令 $M=<W, R, [\ ]>$是 **GDA** 的典范模型。则$<W, R>$是（2.7 定义的）框架。

证明：只须验证 2.7 的框架条件（*）成立。任给 $w\in W$，易见公理 DIS 属于 w。所以

$[\alpha_A](A\alpha+B\beta)\in w$ 或$[\beta_B](A\alpha+B\beta)\in w$。

据典范框架主引理（1），有

$\forall v\in W(wR_{\alpha A}v \Rightarrow A\alpha+B\beta\in v)$或$\forall v\in W(wR_{\beta B}v \Rightarrow A\alpha+B\beta\in v)$。

再据典范模型主引理（3），有

$\forall v\in W(wR_{\alpha A}v \Rightarrow \exists u\in W(uR_{\alpha A}v$ 且 $uR_{\beta B}v))$或$\forall v\in W(wR_{\beta B}v \Rightarrow \exists u\in W(uR_{\alpha A}v$ 且 $uR_{\beta B}v))$。

所以（*）成立。┤

2.15 框架完全性定理　**GDA** 相对 Frame 完全。

证明：只须证：

(%) 若φ不是 **GDA** 的内定理，则φ在 Frame 的某个框架中不有效。

令 $M=<W, R, [\ ]>$是 **GDA** 的典范模型。设φ不是 **GDA** 的内定理。据引理 1.29（2），存在 $w\in W$ 使得$\varphi\notin w$，据典范模型基本定理，我们有 $w\notin[\varphi]$，所以 $M\nvDash\varphi$，因此$<W, R>\nvDash\varphi$。据上一引理，易见$<W, R>$属于 Frame，因此(%)成立。┤

结束语：

我们还可以在 2.1 引入形如$[A\alpha+B\beta]\varphi$的公式。因此，相应地，我们在框架定义中引入刻画算子$[A\alpha+B\beta]$的通达关系 $R_{A\alpha+B\beta}$，并且在真值集定义引入：

$w\in[[A\alpha+B\beta]\varphi] \Leftrightarrow R_{A\alpha+B\beta}(w)\subseteq[\varphi]$。

若 $uR_{A\alpha+B\beta}w$ 刻画的是：A 和 B 分别同时做了活动α和β从而把状态 u 改变为状态 w，则下列框架条件应该是自然的：

$R_{A\alpha+B\beta}\subseteq R_{\alpha A}\cap R_{\beta B}$。　（甚至 $R_{A\alpha+B\beta}=R_{\alpha A}\cap R_{\beta B}$ 也是自然的。）

这样我们有

$w\in[[\alpha_A]\varphi]$

$\Leftrightarrow \forall u(u\in R_{\alpha A}(w) \Rightarrow u\in[\varphi])$

$\Rightarrow \forall u((u\in R_{\alpha A}(w) \Rightarrow u\in[\varphi])\vee(u\in R_{\beta B}(w) \Rightarrow u\in[\varphi]))$

$\Leftrightarrow \forall u(u\in R_{\alpha A}(w)$且 $u\in R_{\beta B}(w) \Rightarrow u\in[\varphi])$

$\Leftrightarrow \forall u(u\in R_{\alpha A}\cap R_{\beta B}(w) \Rightarrow u\in[\varphi])$
$\Leftrightarrow R_{\alpha A}\cap R_{\beta B}(w)\subseteq[\varphi]$
$\Rightarrow R_{A\alpha+B\beta}(w)\subseteq[\varphi]$
$\Leftrightarrow w\in[[A\alpha+B\beta]\varphi]$。
因此$[\alpha_A]\varphi\to[A\alpha+B\beta]\varphi$是有效式，但这似乎不自然，特别是当 Bβ可以是一个抵消 Aα时。

三、知道一个主体的逻辑

我们在［4］和［5］已经提出 3 个知道一个主体的逻辑。这些逻辑都是从认知主体所作所为的角度刻画认知主体这个概念。为此要引入活动概念。本节我们从纯粹认知的角度刻画这个概念，因此不需要引入活动概念。

有一个关于测试儿童何时认知其他主体的实验，笔者也验证过。实验是这样的：给 3 岁到 5 岁孩子分别演示下面场景。小猪在一间屋里玩皮球，然后它把球藏在 1 号箱里出去了。小猴进来了，它发现了皮球，玩了一阵后，把皮球藏在 2 号箱里，然后出去了。过一会儿，小猪回来了，它并不知道小猴转移了皮球。现在小猪想玩皮球。测试者问被测试的孩子：小猪应该到哪个箱子去取皮球？3 岁儿童会肯定地说：小猪应该到 2 号箱去取皮球，理由是皮球现在就在 2 号箱里。5 岁儿童则会肯定地说：小猪应该到 1 号箱去取皮球，理由是小猪离开时把皮球放在 1 号箱里，而且它并不知道小猴转移了皮球。4 岁儿童则处于懵懂状态。这说明 5 岁孩子能根据其他主体（这里是小猪）的思路考虑问题，从而已经知道其他主体的认知状态。而 3 岁孩子只能认知客观情况，还不会认知其他主体的认知状态。

我们把上面的实验概括为：

“**主体 A 知道主体 B**”，当且仅当，“**A 知道 B 认知的东西**”。

这里的“认知”是一个广义概念，可以是知道（know）、认为（think）、相信（believe）或其他认知概念。

3.1 定义 Agent 如前规定。归纳定义所有公式φ的集合 Form 如下：

$\varphi ::= p \mid K_A B \mid \neg\varphi \mid (\varphi\wedge\psi) \mid O_A\varphi$，　其中 $p\in At$，$A, B\in Agent$ 和 $O\in\{K, E\}$。

句符、形如 K_AB 的公式都称为**原子公式**，因为它们不能由更简单的公式构成；其余的公式称为**复合公式**。所有形如 K_AB 的集合记为 KA。┤

说明：K_AB 的直观意义是：“主体 A 知道主体 B”，$K_A\varphi$的直观意义是：“主体 A 知道命题φ”，$E_A\varphi$的直观意义是：“主体 A 广义认知命题φ”。

3.2 定义 **知道一个主体的系统 KAG4** 定义如下：对$\varphi, \psi\in Form$，$A, B\in Agent$，

TA 和 MP 如前定义，

（K_{OA}） $O_A(\varphi\to\psi)\to O_A\varphi\to O_A\psi$，

（T_{KA}） $K_A\varphi\to\varphi$，　（知识公理）

（KE_A） $K_A\varphi\to E_A\varphi$，

（KE_{AB}） $K_AB\to E_B\varphi\to K_AE_B\varphi$，

（RN_{OA}） $\varphi／O_A\varphi$。┤

说明：KE_A 表示知道算子是广义认知算子中最具肯定成份的算子：若 E 可以分别表示算子 K（即 know 的缩写）、T（即 think 的缩写）、B（即 believe 的缩写），则我们认为下列公式应该是有效式

$K_A\varphi\to T_A\varphi$，　$T_A\varphi\to B_A\varphi$。

但下面我们不再做这样精细的区分，因为这与本节要研究的东西无关。

KE_{AB} 刻画了知道一个主体概念的基本特性。它直观意义是：

若 A 知道 B，则 A 知道 B 的（所有）想法。

据 KE_{AB}，我们有$K_AA\to E_A\varphi\to K_AE_A\varphi$，这也从一个方面刻画了 A 有自知之明的特征。

我们也可以用下列公理

（KE_{AB}’） $K_AB\rightarrow K_A(E_B\varphi\rightarrow K_AE_B\varphi)$

代替 KE_{AB}。KE_{AB}’可看作是主体 A 关于 K_AB 的（反思）规律，而 KE_{AB} 可以看作是建模者关于 K_AB 的规律。

3.3 定义 定义从 Form 到不含模态算子 O_A 以及形如 K_AB 的原子公式的子语言 $Form_0\subseteq Form$ 的**翻译映射** t 如下：

$t(p)$，$t(\neg\varphi)$和 $t(\varphi\wedge\psi)$如前定义； $t(K_AB)=t(\top)$； $t(O_A\varphi)=t(\varphi)$。┤

如前定义 t-翻译，t-退化和协调概念，易证：

3.4 定理 **KAG4** 能 t-退化为 $\mathbf{PC_0}$ 且 **KAG4** 是协调的。┤

3.5 定义 称<W, R>是 **kag4-框架**，简称**框架**，当且仅当，W 是非空状态集，R 是{K, E}×Agent 上的映射使得：对 K 和每一 A∈Agent，R_{KA} 是 W 上的自返通达关系，对 E 和每一 A∈Agent，R_{EA} 是 W 上的二元通达关系，且下列**框架条件**成立：对 w∈W，

(t_{KA}) wR_Aw，

(ke_A) $R_{KA}(w)\subseteq R_{EA}(w)$。

所有上述框架的类记作 Frame(kag4)。┤

说明：上面的 R_{KA} 是对 R(K, A)的缩写，R_{EA} 是对 R(E, A)的缩写。

3.6 定义 令<W, R>是框架。任给 w∈W，$R_{OA}(w)::=\{u\in W：wR_{OA}u\}$。┤

说明：$R_{OA}(w)$表示 A 相对 w 的所有 O 意义上的认知状态的集合。

3.7 拟赋值定义 令 F＝<W, R>是框架，且令[ ]：Form→P(W)是映射。

称[ ]为 F 上的**拟赋值**，当且仅当，对每一复合公式φ，[φ]满足：

（1）$w\in[\neg\varphi]\Leftrightarrow w\notin[\varphi]$， （2）$w\in[\varphi\wedge\psi]\Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[O_A\varphi]\Leftrightarrow R_{OA}(w)\subseteq[\varphi]$。┤

注意：拟赋值对句符和形如 K_AB 的公式可以任意赋值。实际上，任何拟赋值都可以通过对句符和形如 K_AB 的公式任意赋值以及遵从上述定义通过归纳构造得到。

3.8 拟赋值惟一存在定理 令 F＝<W, R>是框架，且令 f：At→P(W)和 g：KA→P(W)是两个映射。则 F 上存在唯一的拟赋值[ ]，满足下列条件：

（1）[p]＝f(p)， 对每一 p∈At；

（2）$[K_AB]=g(K_AB)$， 对每一 $K_AB\in KA$。

证明：递归定义

[p]＝f(p)， 对每一 p∈At；

$[K_AB]=g(K_AB)$， 对每一 $K_AB\in KA$；

$[\neg\varphi]=W-[\varphi]$； $[\varphi\wedge\psi]=[\varphi]\cap[\psi]$； $[O_A\varphi]=\{w：R_{OA}(w)\subseteq[\varphi]\}$。

易见[ ]是惟一满足上述条件（1）－（2）的拟赋值。┤

对于框架来说，更重要的是赋值而不是拟赋值，所以下面我们来定义赋值。

3.9 赋值定义 令 F＝<W, R>是框架，且令[ ]是 F 上的拟赋值。

（1）称[ ]是 F 上的**赋值**，当且仅当，[ ]还满足下列条件：

（＃）$[K_AB]\subseteq[E_B\varphi\rightarrow K_AE_B\varphi]$， $\forall\varphi\in Form$。

（2）称 M＝<F, [ ]>是**模型**，当且仅当，[ ]是 F 上的赋值。┤

说明：上述（＃）的另一种表示是：

$[K_AB]\subseteq\cap\{[E_B\varphi\rightarrow K_AE_B\varphi]：\forall\varphi\in Form\}$。

据上述（1），对原子公式 K_AB 的赋值(而不是拟赋值！)有一定的要求，它不能通过公式的归纳构造由句符的指派得到，它的存在性需要证明：

3.10 赋值存在定理 令 F＝<W, R>是框架，令 f：At→P(W)。则存在 F 上赋值[ ]使得

[p]＝f (p)， 对每一 p∈At。

证明：令 g：$KA \to P(W)$使得

$g(K_AB)=\{w: R_{KA}\circ R_{EB}(w)\subseteq R_{EB}(w)\}$， 其中 $R_{KA}\circ R_{EB}$ 如 1.11 定义。

据拟赋值惟一存在定理，F 上存在唯一的拟赋值[ ]，满足下列条件：

（1）$[p]=f(p)$， 对每一 $p\in At$；

（2）$[K_AB]=g(K_AB)$， 对每一 $K_AB\in KA$。

下证[ ]是赋值，即证上一定义的（＃）成立：任给 $w\in[K_AB]$，据（2），$w\in g(K_AB)$，所以据 g 的定义，有

$R_{KA}\circ R_{EB}(w)\subseteq R_{EB}(w)$。

所以 $R_{EB}(w)\subseteq[\varphi] \Rightarrow R_{KA}\circ R_{EB}(w)\subseteq[\varphi]$， $\forall\varphi\in Form$。

所以 $R_{EB}(w)\subseteq[\varphi] \Rightarrow \forall u(w(R_{KA}\circ R_{EB})u \Rightarrow u\in[\varphi])$， $\forall\varphi\in Form$。

所以 $R_{EB}(w)\subseteq[\varphi] \Rightarrow \forall u(\exists v(wR_{KA}v$ 且 $vR_{EB}u) \Rightarrow u\in[\varphi])$， $\forall\varphi\in Form$。

所以 $R_{EB}(w)\subseteq[\varphi] \Rightarrow \forall uv(wR_{KA}v$ 且 $vR_{EB}u \Rightarrow u\in[\varphi])$， $\forall\varphi\in Form$。

所以 $R_{EB}(w)\subseteq[\varphi] \Rightarrow \forall v(wR_{KA}v \Rightarrow \forall u(vR_{EB}u \Rightarrow u\in[\varphi]))$， $\forall\varphi\in Form$。

所以 $R_{EB}(w)\subseteq[\varphi] \Rightarrow R_{KA}(w)\subseteq[E_B\varphi]$， $\forall\varphi\in Form$。

所以 $w\in[E_B\varphi\to K_AE_B\varphi]$， $\forall\varphi\in Form$。

因此 $[K_AB]\subseteq[E_B\varphi\to K_AE_B\varphi]$， $\forall\varphi\in Form$。┤

3.11 框架可靠性定理 **KAG4** 相对 Frame(kag4)可靠。

证明：任给框架 F＝<W, R>和 F 上赋值[ ]。

公理 TA, K_{OA}, T_{KA}，规则 MP 和 RN_{OA} 的验证如通常。

验证公理 KE_{AB}：任给$\varphi\in Form$，据拟赋值定义（＃），有$[K_AB\to E_B\varphi\to K_AE_B\varphi]=W$。┤

3.12 定义 令 w 是公式集。$w^{-O_A}::=\{\varphi: O_A\varphi\in w\}$。┤

3.13 定义 定义 **KAG4** 的典范框架 F＝<W, R>如下：

（1）W＝{w：w 是 **KAG4**-极大一致集}，

（2）$R=\{R_{OA}: O\in\{K, E\}$且 $A\in Agent\}$使得每一 $R_{OA}=\{<w, u>\in W^2: w^{-O_A}\subseteq u\}$。┤

3.14 典范框架主引理 令<W, R>是 **KAG4** 的典范框架，令 $w\in W$。则

$O_A\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{OA}u \Rightarrow \varphi\in u)$。

证明：“⇒”：设 $O_A\varphi\in w$。任给 $u\in W$ 使得 $w^{-O_A}\subseteq u$。因为 $O_A\varphi\in w$，所以$\varphi\in u$。

“⇐”：设：任给 $u\in W$，若 $w^{-O_A}\subseteq u$，则$\varphi\in u$。

这意味φ属于每一以 w^{-O_A} 为子集的极大一致集。据 1.29（1），存在$\varphi_1,\dots,\varphi_n\in w^{-O_A}$ 使得

$\vdash \varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_n\to\varphi$。

据 K_{OA} 和 RN_{OA} 如通常证明，我们有：

$\vdash O_A\varphi_1\wedge\dots\wedge O_A\varphi_n\to O_A\varphi$。

因为 $O_A\varphi_1,\dots,O_A\varphi_n\in w$，所以据 1.29（1），有 $O_A\varphi\in w$。┤

3.15 定理 令 F＝<W, R>是 **KAG4** 的典范框架，令[ ]：$Form\to P(W)$使得$[\varphi]=|\varphi|$。则[ ]是 F 上的赋值。

证明：先证[ ]是拟赋值。首先，据设定$[\varphi]=|\varphi|$和 1.31，易见

（1）$[\neg\varphi]=|\neg\varphi|=W-|\varphi|=W-[\varphi]$。

（2）$[\varphi\wedge\psi]=|\varphi\wedge\psi|=|\varphi|\cap|\psi|=[\varphi]\cap[\psi]$。

此外我们还有

（3）$w\in[O_A\varphi] \Leftrightarrow w\in|O_A\varphi|$	据设定$[\varphi]=|\varphi|$
$\Leftrightarrow O_A\varphi\in w$	据类似 1.30 的定义
$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in|\varphi|)$	据典范框架主引理
$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in[\varphi])$	据设定$[\varphi]=|\varphi|$
$\Leftrightarrow R_A(w)\subseteq[\varphi]$。	据拟赋值定义（3）

最后我们来证[ ]是赋值。据公理 KE_{AB}，我们有

$\vdash K_AB\to E_B\varphi\to K_AE_B\varphi$，　对所有$\varphi\in$Form。

所以据 1.31，有

$|K_AB|\subseteq|E_B\varphi\to K_AE_B\varphi|$，　对所有$\varphi\in$Form。

再据设定$[\varphi]=|\varphi|$，有

$[K_AB]\subseteq[E_B\varphi\to K_AE_B\varphi]$，　对所有$\varphi\in$Form。┤

典范框架和以上赋值（这个赋值可以称为**典范赋值**）构成典范模型。

3.16 定义　令<W, R>是 **KAG4** 的典范框架。称<W, R, [ ]>是 **KAG4 的典范模型**，当且仅当，[ ]：Form$\to$ P(W)使得$[\varphi]=|\varphi|$。┤

3.17 完全性定理　**KAG4** 相对 Frame(kag4)完全。

证明：我们只须证：

（%）若 $\nvdash\varphi$，则存在框架 F$\in$Frame(kag4)使得 F$\nvDash\varphi$。

设 $\nvdash\varphi$。据 1.29（2），存在 **KAG4-**极大一致集 u 使得$\varphi\notin$u，所以 u$\notin|\varphi|$，因此

$|\varphi|\neq\{$w：w 是 **KAG4** 的极大一致集$\}$。

令 M＝<W, R, [ ]>是 **KAG4** 的典范模型，则$[\varphi]=|\varphi|\neq$W，所以 M$\nvDash\varphi$，因此<W, R>$\nvDash\varphi$。┤

说明：（1）如［5］中的相关部分，我们可以把认知主体这个概念相对化。引入相对某个方面的知道一个主体概念，以求更自然地描述知道一个主体这个概念：

"在某个方面 A 知道 B"，当且仅当，**"在此方面 A 知道 B 的所有想法"**。

令 X 是一个公式集，我们用 $K_{A,X}$ 直观表示："主体 A 在方面 X 知道主体 B"。例如，相对前面我们举的实验，5 岁孩子认知小猪，这并不意味 5 岁孩子在其他方面还能认知小猪。

根据这种思想，我们可以细化上面的语义：首先把全体公式集细化为

Form$=\cup\{$X：X 是 Form 的非空子集$\}$，　其中 X 直观表示某个方面（的信息）。

因此 3.9（1）改成：

（1*）称[ ]是 F 上的**赋值**，当且仅当，[ ]还满足下列条件：令 X 是 Form 的非空子集，

（＃*）$[K_{A,X}B]\subseteq[E_B\varphi\to K_AE_B\varphi]$，　$\forall\varphi\in$X。

（2）我们还可以直接引入公式 $K_{A,X_1,\ldots X_m}B$ 来直观表示"A 在若干个方面 $X_1,\ldots,X_m$ 知道 B"，从而把（＃*）概括为：令 $X_1,\ldots,X_m$ 都是 Form 的非空子集，

（＃**）$[K_{A,X_1,\ldots X_m}B]\subseteq[E_B\varphi\to K_AE_B\varphi]$，　$\forall\varphi\in X_1\cup\ldots\cup X_m$。

（3）我们还可以弱化相对方面的知道一个主体的概念：

"在某个方面 A 知道 B"，当且仅当，**"在此方面 A 知道 B 的某个想法"**。

这样（＃*）就改成

（＃***）　$[K_{A,X}B]\subseteq[E_B\varphi\to K_AE_B\varphi]$，　存在$\varphi\in$X。

弱化的知道一个主体的概念也许更接近日常生活中我们使用的概念。

用上面的方法，我们不难建立刻画弱化知道一个主体的概念的逻辑。

（4）我们可以如前面那样引入活动算子，从而把 **KAG4** 中的公理 KE_{AB} 替换为

$K_AB\to[\alpha_B]\varphi\to K_A[\alpha_B]\varphi$，　其中$\alpha_B$表示 B 做了活动$\alpha$。

这个公理的直观意义比较自然。[1] 若我们在其他方面做相应的调整就可以在动态认知逻辑基础上建立知道一个主体的逻辑。

下面我们考虑对认知主体概念的另一种理解，从而建立另一个逻辑。主体 A 认知主体 B

[1] 此公理形似文献［4］的知道主体的系统 **KA** 的公理 A5：$K_AB\to(B\alpha\to K_AB\alpha)$。

可以理解为：

A 把 B 作为权威来认知。

这可以从下面公理 $K51_{AB}$ 看出。

3.18 定义　知道一个主体的系统 **KAG5** 定义如下：对φ, ψ∈Form，A∈Agent，

TA，T_{KA} 和 MP 如前定义；

（K_{KA}）　$K_A(\varphi\to\psi)\to K_A\varphi\to K_A\psi$；

（$K51_{AB}$）　$K_AB\to K_A\varphi\to K_AK_B\varphi$；

（$K52_{AB}$）　$\neg K_AB\to K_A\neg K_AB$；　　（负反思认知主体公理）

（$K53_{AB}$）　$\neg K_AB\to K_A\langle K_B\rangle K_AB$，　其中$\langle K_B\rangle\varphi ::= \neg K_B\neg\varphi$；

（RN_{KA}）　$\varphi / K_A\varphi$。┤

如前易证：

3.19 定理　**KAG5** 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$ 且 **KAG5** 是协调的。┤

3.20 定义　称<W, R>是 **kag5-框架**，简称**框架**，当且仅当，W 是非空状态集，R 是 Agent 上的映射使得：对每一 A∈Agent，R_A 是 W 上的二元通达关系且下列**框架条件**成立：对 w∈W，

(t_{KA})　wR_Aw，

($k52_{AB}$)　$\sim\forall xy\in W(xR_By \text{ 且 } wR_Ax \Rightarrow wR_Ay)$

$\Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \ \sim\forall xy\in W(xR_By \text{ 且 } uR_Ax \Rightarrow uR_Ay))$，

($k53_{AB}$)　$\sim\forall xy\in W(xR_By \text{ 且 } wR_Ax \Rightarrow wR_Ay)$

$\Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists v\in W(uR_Bv \text{ 且} \forall xy\in W(xR_By \text{ 且 } vR_Ax \Rightarrow vR_Ay)))$。

所有上述框架的类记作 Frame(kag5)。┤

3.21 真值集定义　称 M＝<W, R, [ ]>是**模型**，当且仅当，<W, R>是框架且[ ]是从 At 到 P(W)中的指派映射。定义φ相对模型 M 的**真值集**[φ]如下：任给 w∈W，

（1）$w\in[\neg\varphi] \Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，

（2）$w\in[\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[K_A\varphi] \Leftrightarrow R_A(w)\subseteq[\varphi]$，

（4）$w\in[K_AB] \Leftrightarrow \forall uv\in W(uR_Bv \text{ 且 } wR_Au \Rightarrow wR_Av)$。┤

说明：因为（4）中的表达式“对所有 u, v∈W，若 uR_Bv…”表示 B 的认知通达关系如何如何，所以（4）表示：

K_AB 在 w 中成立，当且仅当，A 认知 B 的认知通达关系（在较弱的意义上）。

因为 $w\in[K_AB]$是一个点框架条件，所以它的成立与否与赋值无关，因此我们可以把 3.20 最后两个框架条件简写为：

($k52_{AB}$)　$w\notin[K_AB] \Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\notin[K_AB])$，

($k53_{AB}$)　$w\notin[K_AB] \Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists v\in W(uR_Bv \text{ 且 } v\in[K_AB]))$。

3.22 框架可靠性定理　**KAG5** 相对 Frame(kag5)可靠。

证明：任给框架 F＝<W, R>和 F 上赋值[ ]。

TA，K_{KA}，T_{KA}，MP 和 RN_{KA} 的验证如通常。

验证 $K51_{AB}$：任给 w∈W 使得

①　$w\in[K_AB]$，且②　$w\in[K_A\varphi]$。

要证：

③　$w\in[K_AK_B\varphi]$。

任给 u, v∈W 使得

④　uR_Bv 且 wR_Au。

据真值集定义（3），只须证：

⑤　$v\in[\varphi]$。

据①和真值集定义（4），我们有

$\forall uv\in W(uR_Bv$ 且 $wR_Au\Rightarrow wR_Av)$。

据④，有 wR_Av，再据②，就有⑤。

验证 $K52_{AB}$：任给 $w\in W$ 使得 $w\in[\neg K_AB]$。再据真值集定义（4）和 3.20 的 $(k52_{AB})$，有

$\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\ \sim\forall xy\in W(xR_By$ 且 $uR_Ax\Rightarrow uR_Ay))$，

再据真值集定义（4）和（1），有

$\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow u\notin[K_AB])$，

再据真值集定义（3），有 $w\in[K_A\neg K_AB]$。

验证 $K53_{AB}$：任给 $w\in W$ 使得 $w\in[\neg K_AB]$。再据真值集定义（4）和 3.20 的 $(k53_{AB})$，有

$\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\exists v\in W(uR_Bv$ 且$\forall xy\in W(xR_By$ 且 $vR_Ax\Rightarrow vR_Ay)))$，

再据真值集定义（4），有

$\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\exists v\in W(uR_Bv$ 且 $v\in[K_AB]))$，

再据真值集定义（3）等，易证 $w\in[K_A\langle K_B\rangle K_AB]$。┤

3.23 定义　令 w 是公式集。$w^{-K_A}::=\{\varphi：K_A\varphi\in w\}$。┤

3.24 定义　定义 **KAG5** 的典范框架 F＝<W, R>如下：

（1）W＝{w：w 是 **KAG5**-极大一致集}，

（2）R＝{R_A：　A∈Agent}使得每一 $R_A=\{\langle w,u\rangle\in W^2：w^{-K_A}\subseteq u\}$。┤

3.25 典范框架主引理　令<W, R>是 **KAG5** 的典范框架且 w∈W。则

（1）$K_A\varphi\in w\Leftrightarrow\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\varphi\in u)$。

（2）$K_AB\in w\Leftrightarrow\forall uv\in W(uR_Bv$ 且 $wR_Au\Rightarrow wR_Av)$。

证明：（1）的证明类似 3.14。

（2）“⇒”：设 $K_AB\in w$。任给 u, v∈W 使得 uR_Bv 且 wR_Au。因此

①　$u^{-K_B}\subseteq v$ 且 $w^{-K_A}\subseteq u$。

要证 wR_Av，为此只须证：$w^{-K_A}\subseteq v$。任给$\varphi\in w^{-K_A}$，则 $K_A\varphi\in w$，再据设定 $K_AB\in w$ 和公理 $K51_{AB}$，有 $K_AK_B\varphi\in w$，再据①，有$\varphi\in v$。

“⇐”：设 $K_AB\notin w$。要证：

②　存在 u, v∈W 使得

(a) $u^{-K_B}\subseteq v$，(b) $w^{-K_A}\subseteq u$，且(c) $w^{-K_A}\not\subseteq v$。

先证(b)：假设 w^{-K_A}不一致，则存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-K_A}$使得$\vdash\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$。据公理 T_{KA}，有$\vdash\neg K_A(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$，因此据 TA 和 MP 易证

$\vdash K_A(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\rightarrow K_AB$。

因为 $K_A\varphi_1,\ldots,K_A\varphi_n\in w$，所以易证 $K_AB\in w$，矛盾于设定，因此 w^{-K_A}一致，据 Lindenbaum-引理，有$\exists u\in W$ 使得 $w^{-K_A}\subseteq u$，因此上述(b)成立。

再证(a)：假设 $u^{-K_B}\cup\{K_AB\}$不一致，则存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in u^{-K_B}$使得

$\vdash\ \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\neg K_AB$。

据公理 K_{KA} 和规则 RN_{KA}，易证

$\vdash\ K_B\varphi_1\wedge\ldots\wedge K_B\varphi_n\rightarrow K_B\neg K_AB$。

因为 $K_B\varphi_1,\ldots,K_B\varphi_n\in u$，所以

③　$K_B\neg K_AB\in u$。

另一方面，据设定，有$\neg K_AB\in w$，所以据 $K53_{AB}$，有 $K_A\langle K_B\rangle K_AB\in w$，再据(b)，有$\langle K_B\rangle K_AB\in u$，矛盾于③，所以 $u^{-K_B}\cup\{K_AB\}$一致，据 Lindenbaum-引理，有$\exists v\in W$ 使得

④　$u^{-K_B}\cup\{K_AB\}\subseteq v$，

因此上述(a)成立。

最后证(c)成立：据设定和 $K52_{AB}$，有 $K_A\neg K_AB\in w$。而据④，有$\neg K_AB\notin v$。所以存在公式$\psi=\neg K_AB$ 使得$\psi\in w^{-K_A}$ 且$\psi\notin v$，因此(c)成立。┤

3.26 引理　KAG5 的典范框架是 kag5-框架。

证明：令 F＝<W, R>是 **KAG5** 的典范框架。下面验证 F 满足定义 3.20 给出的框架条件。

验证(t_{KA})：任给 $w\in W$。据公理 T_{KA}，有

$K\varphi\to\varphi\in w$，　对所有公式φ。

由此易证 $w^{-K_A}\subseteq w$。所以 wR_Aw。

验证$(k52_{AB})$：任给 $w\in W$，据公理 $K52_{AB}$，有

$\neg K_AB\to K_A\neg K_AB\in w$，

再据典范框架主引理（1），易证

$\neg K_AB\in w\Rightarrow\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\neg K_AB\in u)$，

再据典范框架主引理（2），易证

$\sim\forall xy\in W(xR_By$ 且 $wR_Ax\Rightarrow wR_Ay)$

$\Rightarrow\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\ \sim\forall xy\in W(xR_By$ 且 $uR_Ax\Rightarrow uR_Ay))$。

验证$(k53_{AB})$：任给 $w\in W$，据公理 $K53_{AB}$，有

$\neg K_AB\to K_A\langle K_B\rangle K_AB\in w$，

再据典范框架主引理（1），易证

$\neg K_AB\in w\Rightarrow\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\exists v\in W(uR_Bv$ 且 $K_AB\in v)$，

再据典范框架主引理（2），易证

$\sim\forall xy\in W(xR_By$ 且 $wR_Ax\Rightarrow wR_Ay)$

$\Rightarrow\forall u\in W(wR_Au\Rightarrow\exists v\in W(uR_Bv$ 且$\forall xy\in W(xR_By$ 且 $vR_Ax\Rightarrow vR_Ay)))$。┤

3.27 框架完全性定理　KAG5 相对 Frame(kag5)完全。

证明：类似 2.15 的证明。┤

说明：3.21 的（4）的直观思想是：通过认知一个主体的认知通达关系来认知这个主体。下面是两个类似的想法，但笔者还没有建立匹配的系统：[①]

（41）$w\in[K_AB]\Leftrightarrow\forall uv\in W(uR_Bv\Rightarrow wR_Au$ 且 $wR_Av)$，　（在较强的意义上）

（42）$w\in[K_AB]\Leftrightarrow\forall uv\in W(uR_Bv\Rightarrow wR_Au$ 或 $wR_Av)$。

四、自识逻辑

本节我们考虑 K_AB 的特例 K_AA，它的直观意义是：“主体 A 知道自己”。

下面我们来建立两个刻画自识概念 K_AA 的逻辑。因为本节许多内容同于上节的内容，所以下面我们只提到不同之处。

4.1 定义　自识系统 AE1 定义如下：对$\varphi,\psi\in$Form，$A\in$Agent，

TA，K_{KA}，MP 和 RN_{KA} 如前定义；

（WT_{KA}）　$K_AA\to K_A\varphi\to\varphi$，　　（弱知识公理）

（WAE_{KA}）　$K_AA\vee K_AK_AA$。　　（弱自识公理）┤

说明：WT_{KA} 称为弱知识公理是因为它是 T_{KA} 的弱化。公理 WAE_{KA} 多少有些不自然，但后面我们证明框架完全性定理需要它。若要删去此公理，一个可行的方案是如前采用拟赋值方法。

4.2 定理　AE1 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$ 且 **AE1** 是协调的。┤

---

① 这里“匹配”的含义是指：建立的系统相对用下列真值集定义构成的语义有框架可靠性定理和框架完全性定理。

4.3 定义 称<W, R>是 **ae1-框架**，简称**框架**，当且仅当，W 是非空状态集，R 是 Agent 上的映射使得：对每一 $A\in$Agent，R_A 是 W 上的二元通达关系且下列**框架条件**成立：对 $w\in W$，

(wae_{KA}) wR_Aw 或 $\forall u(wR_Au \Rightarrow uR_Au)$。

所有的 ae1-框架的类记作 Frame(ae1)。┤

据下面真值集定义（4）易见，我们不能规定每一 R_A 是自返的，否则 K_AA 成为有效式。

4.4 真值集定义 称<W, R, [ ]>是**模型**，当且仅当，<W, R>是框架且[ ]是从 At 到 P(W) 中的指派映射。定义φ相对模型 M＝<W, R, [ ]>的**真值集**[φ]如下：任给 $w\in W$，

（1）$w\in[\neg\varphi] \Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，（2）$w\in[\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[K_A\varphi] \Leftrightarrow R_A(w)\subseteq[\varphi]$，（4）$w\in[K_AA] \Leftrightarrow wR_Aw$。┤

说明：我们用 wR_Aw 刻画 K_AA 在 w 中成立还是比较自然的，因为 wR_Aw 表示主体 A 认知自己的认知状态。更详细地说，w 是 A（相对 w）的认知状态。所以，在建模者看来，A（相对 w）认知自己的认知状态。

4.5 框架可靠性定理 **AE1** 相对 Frame(ae1)可靠。

证明：任给 ae1-框架 F＝<W, R>和 F 上赋值[ ]。TA，K_{KA}，MP 和 RN_{KA} 的验证如通常。

验证公理 WAE_{KA}：任给 $w\in W$。据 4.3 的(wae_{KA})，我们有

wR_Aw 或 $\forall u(wR_Au \Rightarrow uR_Au)$。

据真值集定义（4），有

$w\in[K_AA]$或$\forall u(wR_Au \Rightarrow u\in[K_AA])$。

所以据真值集定义（3）等，易证 $w\in[K_AA\vee K_AK_AA]$。┤

4.6 典范框架主引理 令<W, R>是如 3.24 定义的 **AE1** 的典范框架且 $w\in W$。则

$K_AA\in w \Leftrightarrow wR_Aw$。

证明："⇒"：设 $K_AA\in w$。据公理 WT_{KA}，我们有

$K_A\varphi\to\varphi\in w$， 对每一$\varphi\in$Form。

因此易证 $w^{-K_A}\subseteq w$。

"⇐"：设 $K_AA\notin w$。则$\neg K_AA\in w$，再据 WAE_{KA}，有 $K_AK_AA\in w$，因此 $K_AA\in w^{-K_A}$。再据设定，我们有 $w^{-K_A}\not\subseteq w$。┤

4.7 框架完全性定理 **AE1** 相对 Frame(ae1)完全。

证明：不平凡的情况是验证 **AE1** 的典范框架<W, R>是 ae1-框架，即满足 4.3 的(wae_{KA})：任给 $w\in W$。据 WAE_{KA}，有 $K_AA\vee K_AK_AA\in w$。所以据上一主引理和 3.25（1），易证

wR_Aw 或 $\forall u(wR_Au \Rightarrow uR_Au)$。┤

第 2 个自识逻辑建立在认知动态逻辑之上。

4.8 公式的形成规则 令 At，Act 和 Agent 如前定义。

联立归纳定义所有公式的集合 Form 和所有活动的集合 Action 如下：

① $At\subseteq$Form；

② 若 $a\in$Act 且 $A\in$Agent，则相对 A 的原子活动 $a_A\in$Action；

③ 若$\varphi, \psi\in$Form 和 $A\in$Agent，则$\neg\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)$, $K_A\varphi$, $K_AA\in$Form；

④ 若$\alpha_A\in$Action 且$\varphi\in$Form，则$[\alpha_A]\varphi\in$Form；

⑤ 若$\varphi\in$Form 且 $A\in$Agent，则$(\varphi?)_A\in$Action。┤

说明：Action 中只有两种活动：相对 A 的原子活动α_A 和形如$(\varphi?)_A$ 的测试活动。[①] 为了简单，以后我们把$(\varphi?)_A$ 简写为$\varphi?_A$。$\varphi?_A$ 的直观意义是：A 测试φ，若φ真则进行，否则失败

[①] 这里我们为了简单，不涉及通达关系的 3 种正则复合运算∪, ; 和 *。

（A test φ; proceed if true, fail if false）。（参见文献［1］第 166 页。）

4.9 定义　自识系统 AE2 定义如下：对$\varphi, \psi\in$Form，$\alpha_A\in$Action，

TA，K_{KA}，T_{KA}，MP 和 RN_{KA} 如前定义；

（$K_{\alpha A}$）　$[\alpha_A](\varphi\to\psi)\to[\alpha_A]\varphi\to[\alpha_A]\psi$，

（AE_{KA}）　$K_AA\to[\alpha_A]\varphi\to K_A\varphi$，　（**自识公理**）

（TA_A）　$[\psi?_A]\varphi\leftrightarrow\psi\to\varphi$，　（**测试公理**）

（$RN_{\alpha A}$）　$\varphi／[\alpha_A]\varphi$。┤

说明：KA_{KA} 刻画了自识概念的基本特性，其他公理和规则是经典动态认知逻辑固有的或相对化。例如，在经典动态认知逻辑中，测试公理记为

$[\psi?]\varphi\leftrightarrow\psi\to\varphi$。

4.10 定义　定义从当下语言到经典句子语言的 t-翻译如下：

$t(p)=p$，　对所有 $p\in At$；

$t(\neg\varphi)=\neg t(\varphi)$；　$t(\varphi\wedge\psi)=t(\varphi)\wedge t(\psi)$；　$t(K_A\varphi)=t(\varphi)$；　$t(K_AA)=t(\perp)$；

$t([\alpha_A]\varphi)=t(\varphi)$，　对每一原子活动$\alpha_A\in$Action；

$t([\psi?_A]\varphi)=t(\psi)\to t(\varphi)$，　对每一测试活动$\psi?_A\in$Action。┤

4.11 定理　AE2 能 t-退化为 $\mathbf{PC_0}$ 且 **AE2** 是协调的。┤

4.12 定义　称<W, R, [ ]>是 **Action 的模型**，当且仅当，W 是非空集，[ ]是从 At 到 P(W)中的映射，且 R 是定义域为 Action∪Agent 的映射，使得对每一相对 A 的原子活动α_A，$R_{\alpha A}$是 W 上的任意二元关系；且对每一测试活动$\psi?_A$，$R_{\psi?A}$ 是如下定义的二元关系：

(ta_A)　$R_{\psi?A}=\{<w, w>\in W^2：w\in[\psi]\}$；

且对每一 $A\in$Agent，R_A 是二元（认知）通达关系满足下列框架条件：对每一 $w\in W$，

(t_{KA})　wR_Aw。

所有 Action 的模型的类记作 Model(Action)。┤

注意：(ta_A)是模型条件而不是框架条件，所以下面我们只能证明模型完全性定理。

4.13 真值集定义　定义φ相对模型<W, R, [ ]>的**真值集**[φ]如下：任给 $w\in W$，

（1）$w\in[\neg\varphi]\Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，　（2）$w\in[\varphi\wedge\psi]\Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[K_A\varphi]\Leftrightarrow R_A(w)\subseteq[\varphi]$，　（4）$w\in[[\alpha_A]\varphi]\Leftrightarrow R_{\alpha A}(w)\subseteq[\varphi]$，

（5）$w\in[K_AA]\Leftrightarrow R_A(w)\subseteq R_{\alpha A}(w)$，　对每一$\alpha_A\in$Action。┤

说明：当α_A 理解为 A 做的认知活动或 A 做的实践活动时（5）对 K_AA 的刻画都较自然。

4.14 模型可靠性定理　AE2 相对 Model(Action)可靠。

证明：任给<W, R, [ ]>$\in$Model(Action)。

TA，K_{KA}，T_{KA}，$K_{\alpha A}$，MP，$RN_{\alpha A}$ 和 RN_{KA} 的验证如通常。

验证公理 AE_{KA}：任给 $w\in W$ 使得 $w\in[K_AA]$。据真值集定义（5），我们有

$R_A(w)\subseteq R_{\alpha A}(w)$，　对每一$\alpha_A\in$Action。

所以据真值集定义（3）和（4），易证

$w\in[[\alpha_A]\varphi\to K_A\varphi]$，　对每一$\varphi\in$Form。

验证公理 TA_A：

$$
\begin{aligned}
w\in[[\psi?_A]\varphi] &\Leftrightarrow R_{\psi?A}(w)\subseteq[\varphi] && \text{据真值集定义（4）}\\
&\Leftrightarrow \{<u, u>\in W^2：u\in[\psi]\}(w)\subseteq[\varphi] && \text{据 4.12 的}(ta_A)\\
&\Leftrightarrow w\in[\psi]\Rightarrow w\in[\varphi]\\
&\Leftrightarrow w\in[\psi\to\varphi]。┤
\end{aligned}
$$

4.15 定义　令 w 是公式集。$w^{-K_A}::=\{\varphi：K_A\varphi\in w\}$，　$w^{-[\alpha_A]}::=\{\varphi：[\alpha_A]\varphi\in w\}$。┤

4.16 典范模型定义　定义 **AE2** 的典范模型<W, R, [ ]>如下：

W＝{w：w 是 **AE2** 的极大一致集}；

[p]＝|p|，　对每一 $p\in At$；

R＝{$R_{\alpha A}$ ：$\alpha_A\in$Action}∪{R_A：$A\in$Agent}，其中

$R_{\alpha A}$＝{$\langle w, u\rangle\in W^2$：$w^{-[\alpha_A]}\subseteq u$}，　对每一活动$\alpha_A\in$Action；

R_A＝{$\langle w, u\rangle\in W^2$：$w^{-K_A}\subseteq u$}，　对每一 $A\in$Agent。┤

4.17 典范框架主引理　令<W, R>是 **AE2** 的典范框架且 $w\in W$。则

（1）$K_A\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \varphi\in u)$。

（2）$[\alpha_A]\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow \varphi\in u)$。

（3）$K_AA\in w \Leftrightarrow R_A(w)\subseteq R_{\alpha A}(w)$，　对每一$\alpha_A\in$Action。

证明：（1）－（2）证明类似 3.25（1）和 1.34（1）。

（3）“⇒”：设 $K_AA\in w$。据公理 AE_{KA}，我们有

① $[\alpha_A]\varphi\rightarrow K_A\varphi\in w$，　对每一$\varphi\in$Form。

下证：

② $R_A(w)\subseteq R_{\alpha A}(w)$，　对每一$\varphi\in$Form。

任给 $u\in R_A(w)$，则 $w^{-K_A}\subseteq u$。只须证：$w^{-[\alpha_A]}\subseteq u$。任给$\varphi\in w^{-[\alpha_A]}$，则$[\alpha_A]\varphi\in w$，据①，有 $K_A\varphi\in w$，再据 $w^{-K_A}\subseteq u$，有$\varphi\in u$。

“⇐”：设 $K_AA\notin w$。则$\neg K_AA\in w$，要证

③ $R_A(w)\not\subseteq R_{\alpha A}(w)$，　存在$\alpha_A\in$Action。

为此只须证：

④ 存在$\alpha_A\in$Action 存在 $u\in W$ 使得

(a) $w^{-K_A}\subseteq u$，且 (b) $w^{-[\alpha_A]}\not\subseteq u$。

假设 $w^{-K_A}\cup\{\neg K_AA\}$不一致，则存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-K_A}$ 使得

$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow K_AA$。

据公理 T_{KA}，易证

$\vdash K_A\varphi_1\wedge\ldots\wedge K_A\varphi_n\rightarrow K_AA$。

因为 $K_A\varphi_1,\ldots, K_A\varphi_n\in w$，所以 $K_AA\in w$，矛盾于设定，所以 $w^{-K_A}\cup\{\neg K_AA\}$一致，据 Lindenbaum-引理，存在 $u\in W$ 使得

⑤ $w^{-K_A}\cup\{\neg K_AA\}\subseteq u$，

因此上述(a)成立。

另一方面，据公理 TA_A，有$[K_AA?_A]K_AA\leftrightarrow K_AA\rightarrow K_AA\in w$，所以$[K_AA?_A]K_AA\in w$，因此

⑥ $K_AA\in w^{-[K_AA?_A]}$。

另一方面，据⑤，我们有$\neg K_AA\in u$，再据⑥，我们证明：存在$\alpha_A\in$Action 使得(b)成立。┤

4.18 模型完全性定理　**AE2** 相对 Model(Action)完全。

证明：典范模型基本定理如前所证。不平凡的情况是验证 **AE2** 的典范模型<W, R, [ ]>∈Model(Action)，即满足 4.12 的(ta_A)和(t_{KA})。据 T_{KA} 易证(t_{KA})。下证(ta_A)也成立：易见

$wR_{\psi?A}w \Leftrightarrow w^{-[\psi?_A]}\subseteq w$　　据典范模型的构造

$\Leftrightarrow \forall\varphi\in Form([\psi?_A]\varphi\in w \Rightarrow \varphi\in w)$

$\Leftrightarrow \forall\varphi\in Form(\psi\rightarrow\varphi\in w \Rightarrow \varphi\in w)$　　据测试公理 TA_A 和 1.29

$\Leftrightarrow \psi\in w$。　　令$\varphi$＝$\psi$有“⇒”，据 1.29 有“⇐”

所以我们有

$R_{\psi?A}=\{<w, w>\in W^2: w\in|\psi|\}$，　　对每一测试活动$\psi?_A\in$Action。

所以据典范模型基本定理，有

$R_{\psi?A}=\{<w, w>\in W^2: w\in[\psi]\}$，　　对每一测试活动$\psi?_A\in$Action。┤

结束语：

我们还可以在系统 **AE2** 加入其他自然的公理和规则。例如，

正自识公理：$K_AA\to K_AK_AA$，　　**负自识公理：**$\neg K_AA\to K_A\neg K_AA$。

五、知道一个性质与知道一个关系

本节我们简单考虑知道一个性质和知道一个关系的逻辑刻画问题。

我们在日常生活中也说“我知道红”和“你不知道爱”这样的话。

第一句话中的“红”可看作是一种性质。所以这句话可理解为“我知道红（这种性质）”。

第二句话中的“爱”可看作是一种关系。故这句话可理解为“你不知道爱（这种关系）”。

下面我们基于一阶（动态）认知逻辑（参见［5］），简单提出两类方案。

以下若不特别提到，我们总用 P 表示 n 元谓词符号，用 $\boldsymbol{x}_n$ 表示 n 个个体变元的序列 $x_1\ldots x_n$。当 n＝1 时，P 直观表示一个性质；当 n 大于 1 时，P 直观表示一个（n 元）关系。

第一类方案：我们分别加入下列公式作为公理来扩充经典一阶认知逻辑。

1、**正知公理：**$K_AP\leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n\to K_AP\boldsymbol{x}_n)$。

此公理的直观意义是：A 知道 P，当且仅当，对（个体域中的）所有个体构成的 n 元组，若它有 P，则 A 知道这一点。

2、**负知公理：**$K_AP\leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}_n(\neg P\boldsymbol{x}_n\to K_A\neg P\boldsymbol{x}_n)$。

此公理的直观意义是：A 知道 P，当且仅当，对（个体域中的）所有个体构成的 n 元组，若它没有 P，则 A 知道这一点。

3、**正负知公理：**$K_AP\leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}_n((P\boldsymbol{x}_n\to K_AP\boldsymbol{x}_n)\wedge(\neg P\boldsymbol{x}_n\to K_A\neg P\boldsymbol{x}_n))$。

此公理的直观意义是：A 知道 P，当且仅当，对（个体域中的）所有个体构成的 n 元组，不管它有没有 P，则 A 都知道这一点。

上述公理还有以下变种。例如，相对正知公理，我们有

$K_AP\leftrightarrow K_A\forall\boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n\to K_AP\boldsymbol{x}_n)$。

第二类方案：我们分别加入下列公式作为公理来扩充经典一阶动态认知逻辑。

1、**正知活动公理**

正知α-公理：$K_{A\alpha}P\leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n\to[\alpha_A]K_AP\boldsymbol{x}_n)$，　其中$\alpha\in$Action。

正知活动公理：$K_AP\to\forall\boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n\to[\alpha_A]K_AP\boldsymbol{x}_n)$，　对所有$\alpha\in$Action。

正知α-公理的直观意义是：A 通过活动α知道 P，[①] 当且仅当，对（个体域中的）所有个体构成的 n 元组，若它有 P，则 A 做活动α会导致 A 知道它有 P。

正知活动公理是一种绝对意义上的公理，[②] 它的直观意义是：若 A 知道 P，则对（个体

[①] 这样的活动可以是认知活动，也可以是其他活动。

[②] 注意：此公理的主联结符是→。

域中的）所有个体构成的 n 元组，若它有 P，则 A 做任何活动都会导致 A 知道它有 P。

负知活动公理和正负知活动公理可以类似地给出。

上述公理还有以下变种。例如，相对性质α-公理 1，我们有

正知α-公理 1：$K_{A\,\alpha}P \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n \rightarrow K_A[\alpha_A]K_AP\boldsymbol{x}_n)$，　其中$\alpha\in$Action。

正知α-公理 2：$K_{A\,\alpha}P \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n \wedge A\alpha \rightarrow K_AP\boldsymbol{x}_n)$，　其中$\alpha\in$Action。[①]

正知α-公理 3：$K_{A\,\alpha}P \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n \wedge A\alpha \rightarrow K_A[\alpha_A]P\boldsymbol{x}_n)$，　其中$\alpha\in$Action。

……。

易见，若我们用上述等价公理（即主联结符为$\leftrightarrow$的公理）扩充系统，则只要我们引入相应的真值集定义，就易证框架可靠性定理和完全性定理。例如，对正知公理，我们只要引入下列真值集定义

$$w\in[K_AP] \Leftrightarrow w\in[\forall \boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n \rightarrow K_AP\boldsymbol{x}_n)]。$$

若我们用上述蕴涵公理（即主联结符为$\rightarrow$的公理）扩充系统，则证明框架可靠性定理和完全性定理可能并不那么容易。如文献［5］那样采用拟赋值方法是一条出路。

结束语：

我们还可以顺着这样的思路进一步考虑知道一个概念和知道一个范畴。

一、对知道一个概念的考虑。据文献［10］第 433 页，概念是反映对象的本质属性的思维形式，而本质属性是某类对象必然具有并与其他各类对象区别开来的属性。

以下令 P 是一元谓词符号。根据上述对概念的界定，我们用无穷逻辑的公式 [②]

（＃）　$K_AP \leftrightarrow K_A\exists!X(\bigwedge\{\Box Px：x\in X\})$

直观表示：A 知道 P 是一个概念，当且仅当，A 知道存在一个惟一的个体集 X 使得 X 中的元素必然有 P。

（＃）有下面两个特例：

（＃1）　$K_AP \leftrightarrow K_A\exists_nx(\Box Px)$，

（＃2）　$K_AP \leftrightarrow K_A\exists_1x(\Box Px)$。

（＃1）和（＃2）的右式分别表示“A 知道恰存在 n 个个体有 P”和“A 知道存在惟一的个体有 P”（参见文献［3］246 页）。

我们上面的公式是否恰当刻画知道一个概念？关于这方面的问题需要进一步研究。

二、对知道一个范畴的考虑。我们取文献［10］第 82-83 页对范畴的界定的一种含义。[③] 则我们可以有两类范畴：

1、学科范畴：一个学科中最普遍最基本的概念。

2、哲学范畴：所有学科中最普遍最基本的概念。[④]

我们用 $CK_{i\,A}P$ 直观表示 A 知道 P 是学科 i 中的一个范畴。我们给出 $CK_{i\,A}P$ 的一种真值集定义：令 M 是一阶认知模型，

$$w\in[CK_{i\,A}P] \Leftrightarrow w\in[K_{i\,A}P]\text{且不存在 n 元关系 } S_i^M\supseteq R_i^M \text{ 使得 } w\in[K_{i\,A}S]，$$

① $A\alpha$的真值集定义是：$w\in[A\alpha] \Leftrightarrow \exists uR_{\alpha A}w$。参见［9］。事实上，$D\alpha$的真值集定义就是它的单一化。

② 参见文献［11］。

③ 这种含义包含的内容较少，因而相对来说好把握一些。

④ 这里的“所有学科”应该不包括哲学学科自身。

这里 S_i^M 和 R_i^M 分别表示 S 和 P 相对 M 和学科 i 的解释：令 D(w)是相对 w 的个体域使得

$$D(w)=\cup\{D_i(w):\ i\in I\}。$$

其中 I 是所有学科（不包括哲学学科）的指标集，[①] D_i (w)直观表示学科 i 研究的对象的集合。则 S_i^M 和 R_i^M 分别是 D_i(w)的子集，且

$$w\in[K_{i\,A}P]\Leftrightarrow w\in[\forall \boldsymbol{x}_n(P\boldsymbol{x}_n\rightarrow K_AP\boldsymbol{x}_n)]_i,$$

其中右式表示 $\boldsymbol{x}_n$ 跑遍 D_i(w) 的 n 重笛卡尔积。所以

$$w\in[K_{i\,A}P]\Leftrightarrow \text{对所有 } d_1\ldots d_n\in D_i(w),\ w\in[P\underline{d}_1\ldots\underline{d}_n\rightarrow K_AP\underline{d}_1\ldots\underline{d}_n],$$

其中每一 $\underline{d}_m$ 是 d_m 是名字（我们可以膨胀语言加入个体的名字）。

若我们用 CK_AP 直观表示 A 知道 P 是一个哲学范畴，则我们有下面两种方案：

（1）$w\in[CK_AP]\Leftrightarrow$ 对所有 $i\in I$，$w\in[CK_{i\,A}P]$。

（2）$w\in[CK_AP]\Leftrightarrow w\in[K_AP]$且不存在 n 元关系 $S^M\supseteq R^M$ 使得 $w\in[K_AS]$，

（2）中的 S^M 和 R^M 取 D(w)的子集，且 $w\in[K_AP]$也是相对 D(w)定义。（2）的右式的直观意义是：A 知道 P 是最大的概念，即 A 知道没有比 P 更大的概念了。

这里我们只是粗浅地提出一些方案，具体的工作另行发表。

鸣 谢

中山大学逻辑与认知研究所硕士生王景周审阅了本文初稿，指出几处笔误和一个句子的不妥。硕士生杨帆为我修改了英文部分。在此向他们表示笔者的衷心感谢！

参考文献

[1] D. Harel, D. Kozen, J. Tiuryn. Dynamic Logic[M]. The MIT Press, 2000.
[2] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. Modal Logic [M], Cambridge University Press, 2001.
[3] 李小五. 数理逻辑讲义[M]. 中山大学出版社， 2005.9.
[4] 李小五. 我知道你－－知道主体的逻辑[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(2): 66-79.
[5] 李小五. 研究报告 2005[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(4): 17-71.
[6] 李小五. 模态逻辑讲义 [M]. 中山大学出版社, 2005.9.
[7] 刘壮虎，李小五. 对动作的认知 [J]. 湖南科技大学学报，社会科学版, 2005, (6): 33-38.
[8] 李小五. 三类知道活动的逻辑[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(3): 35-59.
[9] 李小五. 加标动态逻辑及其若干应用[J]. 哲学动态，2005 年逻辑学增刊.
[10] 辞海·哲学分册[M]. 上海辞书出版社， 1980.7.
[11] 李小五. 无穷逻辑（上下卷）[M]. 社科文献出版社， 1996.10, 1998.10.

① 例如，I＝{数学、物理学、化学、……}。

Some Applications of Dynamic Epistemic Logic

LI Xao-wu

(Institute of Logic and Cognition of Sun Yat-sen University 510275, Guangdong, China)

Abstract: We establish some logics by which we can characterize respectively the concepts as follows: having done an action, changing a state by the composition of forces formed by agents' actions, knowing an agent, knowing a property and knowing a relation.

Key words: having done an action; changing a state by the composition of forces; knowing an agent; knowing a property and knowing a relation