相对于条件的命题同一性逻辑 PIRC*

文学锋

(中山大学逻辑与认知研究所，中山大学哲学系，广东　广州 510275)

内容提要： 首先，我们构造相对于条件的命题同一性逻辑 **PIRC**，给出一些证明论结果；其次引入有序领域语义，给出描述 **PIRC** 的特征公理和特征规则的框架条件，证明 **PIRC** 相对这些框架条件是框架可靠的；最后，我们证明 **PIRC** 相对这些框架条件也是完全的。

关键词： 命题同一性；有序邻域语义；相对于条件

中图分类号：B81　　**文献标识码：A**

一、形式系统及其证明论

1.1 语言

(1) 合式公式的形成规则如下：

$p \mid \neg A \mid (A\wedge B) \mid (CA\equiv B)$。

(2) 所有合式公式的集合记为 Form，也称作 **PIRC** 的语言。

(3) $(CA\equiv B)$称为**相对于条件的命题同一句**，简称**相对化同一句**，其中 C 称为相对化同一句的**条件**，A 和 B 分别称为**前件**和**后件**。

说明：

(1) 易见≡是三元联结符。$(CA\equiv B))$的直观意义是：相对于条件 C，A 与 B 表达相同的命题。

(2) 引入相对于条件的命题同一句的直观思想是：我们总是在一定的条件下比较 A（表达的命题）和 B（表达的命题）的同一性。比如，一般的我们无法判断“a 在 b 的南边”与“b 在 a 的北边”这两个句子是否表达同一命题，但相对于“a 和 b 都处于欧几里得空间”这个条件我们就可以认为二者表达相同的命题。所以相对化的想法是很自然的。同时，绝对化同一性也能由相对化同一性导出（1.6）。┤

1.2 规定与缩写

(1) 联结符$\vee$, $\rightarrow$和$\leftrightarrow$如通常定义。

(2) 为简便起见，我们规定任一公式最外面的一对括号省略。

(3) 规定联结符的结合力从左到右依次减弱：$\neg, \wedge, \vee, \equiv, \leftrightarrow, \rightarrow$，并规定同类联结符向右结合。

(4) 符号$\Leftrightarrow$表示“当且仅当”，$\Rightarrow$表示“若…，则…”。

1.3 公理和规则

收稿日期： 2006-3-30

基金项目： 本文获得教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目资助。

作者简介： 文学锋(1977-)，男，湖北人，中山大学博士生。

PIRC 的公理和推理规则如下：

公理（模式）：

（TA） 所有重言式的代入特例

（SY） $CA\equiv B\rightarrow CB\equiv A$

（TR） $(CA\equiv B)\wedge(CB\equiv D)\rightarrow CA\equiv D$

（IE） $(CA\equiv B)\wedge C\wedge A\rightarrow B$

（CI） $CA\equiv B\leftrightarrow CC\wedge A\equiv C\wedge B$

推理规则：

（MP） $A, A\rightarrow B$ / B

（CE） $C_1\leftrightarrow C_2$ / $C_1A\equiv B\leftrightarrow C_2A\equiv B$

（EI） $C\wedge A\leftrightarrow C\wedge B$ / $CA\equiv B$

说明：

(1) 由 TA 和 MP 构成的系统称为经典句子系统，记为 **PC**。我们用 $\mathbf{PC}_0$ 表示用不含≡的语言表述的 **PC**。

(2) SY, TR 分别表示相对化对称性和传递性。后面将证明自返性也成立，即 $CA\equiv A$ 是系统的内定理。IE 和 EI 表示≡与↔的相互关系。CE 表示条件的等价置换性。CI 表明了条件与前件和后件之间的关系。

(3) 由真值表容易验证下面三个公式是等价的：
$C\wedge A\leftrightarrow C\wedge B$，
$C\rightarrow A\leftrightarrow B$，
$(C\rightarrow A)\leftrightarrow(C\rightarrow B)$。
因此，IE 又可以写为（IE’）$CA\equiv B\rightarrow C\rightarrow A\rightarrow B$ 或（IE”）$CA\equiv B\rightarrow(C\rightarrow A)\rightarrow C\rightarrow B$；EI 又可以写为（EI’）$C\rightarrow A\leftrightarrow B$ / $CA\equiv B$ 或（EI”）$(C\rightarrow A)\leftrightarrow(C\rightarrow B)$ / $CA\equiv B$。这两种表达更直观（更符合相对于条件的意思），但为了表述和证明方便，我们没有选择它们。

(4) 由 **PIRC** 刻画的命题同一性仍然是比较弱意义上的同一性，因为在该系统中等价的命题具有命题同一性，这与我们通常理解的意义同一性还有一定的距离。这是由于现存的逻辑系统本质上都是外延性的，因此还不能真正对意义的同一性进行刻画。

1.4 定义

(1) 我们用□A 表示 A 是 **PIRC** 的内定理。

(2) **PIRC** 的全体内定理的集合记为 Th(**PIRC**)。

(3) 我们用□A 表示 $A\notin$Th(**PIRC**)。

1.5 引理

下面是 **PIRC** 的内定理和导出规则：

(1) $CA\equiv A$， (RE)

(2) $A_1\leftrightarrow A_2$ / $CA_1\equiv B\leftrightarrow CA_2\equiv B$， (EPA)

(3) $B_1\leftrightarrow B_2$ / $CA\equiv B_1\leftrightarrow CA\equiv B_2$。 (EPC)

证明：

(1) ① $C\wedge A\leftrightarrow C\wedge A$ (PC)

② $CA\equiv A$ (EI)

(2) ① $A_1\leftrightarrow A_2$ (假设)

② $C\wedge A_1\leftrightarrow C\wedge A_2$ (RPC)
③ $CA_1\equiv A_2$ (EI)
④ $CA_2\equiv A_1$ (SY, RPC)
⑤ $(CA_2\equiv A_1)\wedge(CA_1\equiv B)\to CA_2\equiv B$ (TR)
⑥ $CA_1\equiv B\to CA_2\equiv B$ (④⑤RPC)
⑦ $(CA_1\equiv A_2)\wedge(CA_2\equiv B)\to CA_1\equiv B$ (TR)
⑧ $CA_2\equiv B\to CA_1\equiv B$ (③⑦RPC)
⑨ $CA_1\equiv B\leftrightarrow CA_2\equiv B$ (⑥⑧RPC, $Def_{\leftrightarrow}$)

(3) ① $B_1\leftrightarrow B_2$ (假设)
② $C\wedge B_1\leftrightarrow C\wedge B_2$ (RPC)
③ $CB_1\equiv B_2$ (EI)
④ $CB_2\equiv B_1$ (SY, RPC)
⑤ $(CA\equiv B_1)\wedge(CB_1\equiv B_2)\to CA\equiv B_2$ (TR)
⑥ $CA\equiv B_1\to CA\equiv B_2$ (③⑤RPC)
⑦ $(CA\equiv B_2)\wedge(CB_2\equiv B_1)\to CA\equiv B_1$ (TR)
⑧ $CA\equiv B_2\to CA\equiv B_1$ (④⑦RPC)
⑨ $CA\equiv B_1\leftrightarrow CA\equiv B_2$ (⑥⑧RPC, $Def_{\leftrightarrow}$)

说明：(1)表明相对化同一句的**相对化自返性**，(2), (3)表明相对化同一句的前件和后件均可以等价置换。

1.6 定义

定义**绝对化命题同一句**（简称同一句）如下：

(DfPI) $A\equiv B =_{df} \square A\equiv B$，其中□表示某个固定的常真式。┤

说明：

因为永真式不提供信息内容，因此相对于条件为永真式的命题同一句可以看作是没有相对化条件的命题同一句，即绝对化命题同一句。┤

1.7 引理

PIRC + DfPI 有如下内定理和导出规则：

(1) $A\equiv A$，
(2) $A\equiv B\to B\equiv A$，
(3) $(A\equiv B)\wedge(B\equiv C)\to A\equiv C$，
(4) $A\equiv B\to A\leftrightarrow B$，
(5) $A\leftrightarrow B$ / $A\equiv B$，
(6) $A_1\leftrightarrow A_2$ / $A_1\equiv B\leftrightarrow A_2\equiv B$，
(7) $B_1\leftrightarrow B_2$ / $A\equiv B_1\leftrightarrow A\equiv B_2$。

证明：据 1.3，1.5 和 1.6 易证。┤

说明：

(1) 上面的(1), (2), (3)分别刻画了同一句的**自返性**，**对称性**和**传递性**，(4)和(5)刻画了同一与等价之间的关系。(6)和(7)分别称为**前件置换规则**和**后件置换规则**。
(2) 我们也把由 **PC** 加上特征公理(2), (3), (4)和特征规则(5)构成的系统称为 **PI**。因此 **PI** 可由 **PIRC** + DfPI 导出。

下面，我们证明 **PIRC** 是 $\mathbf{PC_0}$ 的协调概括。

1.8 定义

(1) 定义从 **PIRC** 的语言 Form 到不含≡的子语言 $Form_0 \subseteq Form$ 的翻译映射 t 如下：

$t(p) = p$，对所有原子公式 p；

$t(\neg A) = \neg t(A)$；

$t(A \wedge B) = t(A) \wedge t(B)$；

$t(CA \equiv B) = t(C) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B)$。

容易验证，在上面的定义下如下等式成立：

$t(A \rightarrow B) = t(A) \rightarrow t(B)$；

$t(A \leftrightarrow B) = t(A) \leftrightarrow t(B)$。

(2) 对每一公式 $A \in Form$，我们称 t(A)是 A 的 t-翻译。

1.9 定义

令 **S** 和 **T** 是任意两个公理化系统。我们称 **S** 能 t-退化为 **T**，当且仅当 **S** 的所有内定理都能 t-翻译为 **T** 的内定理。

1.10 定理

PIRC 能 t-退化为 $\mathbf{PC_0}$。

证明：

易见公理 TA 和规则 MP 的 t-翻译仍是重言式的代入特例和分离规则。

SY 的 t-翻译是 $t(CA \equiv B \rightarrow CB \equiv A) = (t(C) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B)) \rightarrow t(C) \rightarrow t(B) \leftrightarrow t(C)$，形如 $(\alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma \leftrightarrow \beta)$；

TR 的 t-翻译是

$t((CA \equiv B) \wedge (CB \equiv D) \rightarrow CA \equiv D) = (t(C) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B)) \wedge (t(C) \rightarrow t(B) \leftrightarrow t(D)) \rightarrow t(C) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(D)$，形如 $(\alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \gamma) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma \leftrightarrow \delta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \delta$；

IE 的 t-翻译是 $t((CA \equiv B) \wedge C \wedge A \rightarrow B) = (t(C) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B)) \wedge t(C) \wedge t(A) \rightarrow t(B)$，形如 $(\alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \gamma) \wedge \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$；

CI 的 t-翻译是 $t(CA \equiv B \leftrightarrow CC \wedge A \equiv C \wedge B) = (t(C) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B)) \leftrightarrow (t(C) \rightarrow t(C) \wedge t(A) \leftrightarrow t(C) \wedge t(B))$，形如$(\alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \gamma) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha \wedge \gamma)$；

CE 的 t-翻译是 $t(C_1) \leftrightarrow t(C_2) / (t(C_1) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B)) \leftrightarrow (t(C_2) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B))$，形如 $\alpha \leftrightarrow \beta / (\alpha \rightarrow \gamma \leftrightarrow \delta) \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma \leftrightarrow \delta)$；

EI 的 t-翻译是 $t(C) \wedge t(A) \leftrightarrow t(C) \wedge t(B) / t(C) \rightarrow t(A) \leftrightarrow t(B)$，形如 $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha \wedge \gamma / \alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \gamma$。

据上面的结果，易见

(1) 若 A 是 **PIRC** 的公理，则 A 的 t-翻译是 $\mathbf{PC_0}$ 的内定理；

(2) 若 R 是 **PIRC** 的规则，则 R 的 t-翻译是 $\mathbf{PC_0}$ 的导出规则。

由此我们证明：

(3) 若 A 是 **PIRC** 的内定理，则 A 的 t-翻译是 $\mathbf{PC_0}$ 的内定理。

1.11 定义

称公理化系统 **S** 是协调系统，当且仅当不存在 A 使得 A 和¬A 都是 **S** 的内定理。

1.12 定理　协调性定理

PIRC 是协调的。

证明：

假设 **PIRC** 不协调，则存在 A 使得 A 和¬A 都是 **PIRC** 的内定理，则据定理 1.8，t(A)和¬t(A)都是 $\mathbf{PC_0}$ 的内定理，矛盾于 $\mathbf{PC_0}$ 的协调性。

二、有序邻域语义和可靠性定理

2.1　定义

任给集合 X，我们用 P(X)表示 X 的幂集。

(1)　称二元组 F＝<W, N>是有序邻域框架，简称 F 是 **ON**-框架，当且仅当

　① W 是非空的可能世界集，

　② 邻域映射 N 是从 W 到 P(P(W)×P(W)×P(W))的一元映射。

(2)　称三元组 M＝<W, N, [ ]>是有序邻域模型，简称 M 是 **ON**-模型，当且仅当<W, N>是 **ON**-框架且

　③ [ ]是从全体句符到 P(W)的指派映射。

2.2　定义　真值集定义

令 M＝<W, N, [ ]>是 **ON**-模型。对每一复合公式 A，定义 A 相对 M 的真值集[A]如下，对任意 w∈W：

(1)　w∈[¬A] ⇔ w∉[A]，

(2)　w∈[A∧B] ⇔ w∈[A]且 w∈[B]，

(3)　w∈[CA≡B] ⇔ <[C], [A], [B]>∈N(w)。

2.3 定义

(1) 称 **ON**-框架 F＝<W, N>是**相对于条件的命题同一句框架**，简称 F 是 **pirc**-框架，当且仅当下列框架条件成立：对任意 w∈W 和 X, Y, Z, U⊆W，

　(sy)　<X, Y, Z>∈N(w) ⇒ <X, Z, Y>∈N(w)；

　(tr)　<X, Y, Z>∈N(w)且<X, Z, U>∈N(w) ⇒ <X, Y, U>∈N(w)；

　(ie)　<X, Y, Z>∈N(w)且 w∈X∩Y ⇒ w∈Z；

　(ci)　<X, Y, Z>∈N(w) ⇔ <X, X∩Y, X∩Z>∈N(w)；

　(ei)　X∩Y＝X∩Z ⇒ <X, Y, Z>∈N(w)。

(2) 所有的 **pirc**-框架的类记作 Frame(**pirc**)。

2.4 定义　有效性

令 F＝<W, N>是 **ON**-框架，M＝<W, N, [ ]>是 **ON**-模型，

(1)　称 A 在 M 中有效，记为 M □A，当且仅当[A]＝W；否则称 A 在 M 中不有效，记为 M □A。

(2)　称 A 在 F 中有效，记为 F □A，当且仅当，对 F 上的任意指派映射[ ]，有[A]＝W；否则称 A 在 F 中不有效，记为 F □A。

(3)　称规则 $A_1,\ldots, A_n$ / C 相对 M 保持有效性，当且仅当，若$[A_1]=\ldots=[A_n]$＝W，则[C]＝W。

2.5 引理

令 M＝<W, N, [ ]>是 **ON-**模型。则

(1) $[\neg A]=W-[A]$，
$[A\wedge B]=[A]\cap[B]$，
$[A\vee B]=[A]\cup[B]$，
$[\perp]=\varnothing$，$[\Box]=W$，其中⊥表示某个固定的常假式。

(2) $[A]\cap[A\to B]\subseteq[B]$。

(3) $[A\to B]=W\Leftrightarrow[A]\subseteq[B]$。

(4) $[A\leftrightarrow B]=W\Leftrightarrow[A]=[B]$。

证明：易证。

2.6 定义

(1) 称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是框架可靠系统，当且仅当，**S** 的内定理在 ***C*** 的所有框架中有效。

(2) 称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是框架完全系统，当且仅当，在 ***C*** 的所有框架中有效的公式是 **S** 的内定理。

2.7 定理 框架可靠性定理

PIRC 相对框架类 Frame(**pirc**)是可靠的。

证明：

任给 **PIRC-**框架 F＝<W, N>和 F 上赋值[ ]，

下面验证 **PIRC** 的公理相对 M＝<F, [ ]>有效且 **PIRC** 的推理规则相对 M 保持有效性。

验证公理 TA 和规则 MP：显然。

验证公理 SY：任给 $w\in[CA\equiv B]$，

据 2.2(3)，　$<[C], [A], [B]>\in N(w)$，
据 2.3 的(sy)，　$<[C], [B], [A]>\in N(w)$,
再据 2.2(3)，　$w\in[CB\equiv A]$，
故　$[CA\equiv B]\subseteq[CB\equiv A]$，
据 2.5，　$[CA\equiv B\to CB\equiv A]=W$。

验证公理 TR：任给 $w\in[(CA\equiv B)\wedge(CB\equiv D)]$，

据 2.5 和 2.2(3)，　$<[C], [A], [B]>\in N(w)$且$<[C], [B], [D]>\in N(w)$，
据 2.3 的(tr)，　$<[C], [A], [D]>\in N(w)$，
再据 2.2(3)，　$w\in[CA\equiv D]$，
故　$[(CA\equiv B)\wedge(CB\equiv D)]\subseteq[CA\equiv D]$，
从而据 2.5　$[(CA\equiv B)\wedge(CB\equiv D)\to CA\equiv D]=W$。

验证公理 IE：任给 $w\in[(CA\equiv B)\wedge C\wedge A]$，

据 2.5 和 2.2(3)，　$<[C], [A], [B]>\in N(w)$且 $w\in[C]\cap[A]$，
据 2.3 的(ie)，　$w\in[B]$，
故　$[(CA\equiv B)\wedge C\wedge A]\subseteq[B]$，
从而据 2.5　$[(CA\equiv B)\wedge C\wedge A\to B]=W$。

验证公理 CI：任给 $w\in W$，则有

$w\in[CA\equiv B]\Leftrightarrow<[C], [A], [B]>\in N(w)$　　据 2.2(3)

$\Leftrightarrow <[C], [C]\cap[A], [C]\cap[B]>\in N(w)$　　据 2.3 的(ci)

$\Leftrightarrow <[C], [C\wedge A], [C\wedge B]\in N(w)$　　据 2.5

$\Leftrightarrow w\in[CC\wedge A\equiv C\wedge B]$　　据 2.2(3)

从而　　$[CA\equiv B]=[CC\wedge A\equiv C\wedge B]$，

所以据 2.5　　$[CA\equiv B\leftrightarrow CC\wedge A\equiv C\wedge B]=W$。

验证规则 EI，设$[C\wedge A\leftrightarrow C\wedge B]=W$，

则据 2.5　　$[C]\cap[A]=[C]\cap[B]$，

据 2.3 的(ei)，　　$<[C], [A], [B]>\in N(w)$，

据 2.2(3)，　　$w\in[CA\equiv B]$，

由 w 的任意性得　　$[CA\equiv B]=W$。

三、完全性定理

3.1 定义

令 w 是公式集，

(1) 称 w 是一致集，当且仅当对所有有穷序列 $A_1,\ldots, A_n\in w$，有□$\neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$。

(2) 称 w 是极大集，当且仅当对所有 $A\in Form$，$A\in w$ 或$\neg A\in w$。

(3) 称 w 是极大一致集，当且仅当 w 既是一致的又是极大的。

(4) 称 **PIRC** 是一致系统，当且仅当 Th(**PIRC**)是一致的。

3.2 定理

PIRC 是一致的。

证明：

假设 **PIRC** 不一致，则 Th(**PIRC**)不一致。所以存在有穷序列 $A_1,\ldots, A_n\in$Th(**PIRC**)使得

□$\neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$。

另一方面，因为 $A_1,\ldots, A_n\in$Th(**PIRC**)，所以易证

□$A_1\wedge\ldots\wedge A_n$。

据定义 1.11，**PIRC** 不是协调的，矛盾于定理 1.12。

因为 **PIRC** 是 **PC** 的扩充，所以如通常证明，我们有下列结果。

3.3 引理

(1) 令 w 是极大一致集。则

$\neg A\in w\Rightarrow A\notin w$，

$A\wedge B\in w\Rightarrow A\in w$ 且 $B\in w$，

$A\vee B\in w\Rightarrow A\in w$ 或 $B\in w$，

$A\in w$ 且□$A\rightarrow B\Rightarrow B\in w$，

$A, A\rightarrow B\in w\Rightarrow B\in w$。

(2) Th(**PIRC**)$\subseteq$w。

(3) 若□A，则存在极大一致集 w 使得 $A\notin w$。

3.4 定义

$|A|=_{df}\{w$：w 是极大一致集使得 $A\in w\}$。

3.5 引理

(1) $|\neg A| = W - |A|$，其中 W 是所有极大一致集的集合，

$|A \wedge B| = |A| \cap |B|$，

$|A \vee B| = |A| \cup |B|$，

$|\perp| = \varnothing$，$|\square| = W$。

(2) $|A| \cap |A \to B| \subseteq |B|$。

(3) $|A \to B| = W \Leftrightarrow |A| \subseteq |B| \Leftrightarrow \square A \to B$。

(4) $|A \leftrightarrow B| = W \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow \square A \leftrightarrow B$。

证明：据引理 3.3 易证。

3.6 定义

(1) 定义 **PIRC** 的典范框架 $N = <W, N>$如下：

① $W = \{w：w$ 是极大一致集$\}$；

② N 是从 W 到 $P(P(W) \times P(W) \times P(W))$的一元映射使得

$<|C|, |A|, |B|> \in N(w) \Leftrightarrow CA \equiv B \in w$，对任意 $w \in W$ 和公式 C, A 和 B；

(2) 定义 **PIRC** 的典范模型 $M = <W, N, [\ ]>$如下：$<W, N>$是 **PIRC** 的典范框架，且

③ $[p] = |p|$，对每一句符 p。

说明：

(1) **PIRC** 的典范框架相对系统 **PIRC** 不是唯一的。

(2) 据定理 3.2，**PIRC** 是一致的，所以 W 是非空的。

3.7 定理　典范模型基本定理

令 $M = <W, N, [\ ]>$是如上定义的 **PIRC** 的典范模型。

(1) $D \in w \Leftrightarrow w \in [D]$，对每一 $w \in W$ 和公式 D。

(2) $|D| = [D]$，对每一公式 D。

证明：

(2)从(1)易得，故只须证(1)。

施归纳于 D 的结构。句符的情况据上一定义的③。

布尔联结词¬和∧的情况如通常所证。

令 $D = CA \equiv B$。据归纳假设，我们有对任意 $w \in W$，

$w \in [D] \Leftrightarrow w \in [CA \equiv B]$

$\Leftrightarrow <[C], [A], [B]> \in N(w)$　　据 2.2(3)

$\Leftrightarrow <|C|, |A|, |B|> \in N(w)$　　据归纳假设

$\Leftrightarrow CA \equiv B \in w$　　据 3.6(1)②

$\Leftrightarrow D \in w$

3.8 定理

令 M 是 **PIRC** 的典范模型。则对每一公式 A，我们有

$M \square A \Leftrightarrow \square A$。

证明：

$\square A \Leftrightarrow |A| = W$　　据 3.3

$\Leftrightarrow [A] = W$　　据 3.7

⇔ M □A　　　　　据 2.4。

3.9 定义

(1) 定义 **PIRC** 的适当结构(proper structure) M＝<W, N, [ ]>如下：

① W＝{w：w 是极大一致集}；

② 对所有 w∈W，$N(w)=N_1(w)\cup N_2(w)$，其中

$N_1(w)$＝{<X, Y, Z>∈P(W)×P(W)×P(W)：存在 CA≡B∈w 且 X＝|C|, X∩Y＝|A|, X∩Z＝|B|}，

$N_2(w)$＝{<X, Y, Z>∈P(W)×P(W)×P(W)：X∩Y＝X∩Z}。

(2) F＝<W, N>称为 **PIRC** 的适当框架。

3.10 引理

令 M＝<W, N, [ ]>是 **PIRC** 的适当结构，则 M 是 **PIRC** 的典范模型。

证明：

据定义 3.6，只须证：

<|C|, |A|, |B|>∈N(w) ⇔ CA≡B∈w，对任意 w∈W 和公式 C, A 和 B。

“⇐”：设 CA≡B∈w，

因为　　　　　□CA≡B↔CC∧A≡C∧B，

所以据 3.3　　　　CC∧A≡C∧B∈w。

又据 3.5　　　　|C|＝|C|, |C|∩|A|＝|C∧A|, |C|∩|B|＝|C∧B|，

故据 $N_1(w)$定义有　　<|C|, |A|, |B|>∈$N_1(w)$，

从而　　　　　<|C|, |A|, |B|>∈N(w)。

“⇒”：设<|C|, |A|, |B|>∈N(w)，

情况 1　<|C|, |A|, |B|>∈$N_1(w)$：则

① 存在 C’A’≡B’∈w，

② |C|＝|C’|, |C|∩|A|＝|A’|, |C|∩|B|＝|B’|。

据②和 3.5，有　　(C(C’，(C(A(A’，(C(B(B’。

据 CE 和 1.5(2)-(3)有　③ (CC(A≡C(B(C’A’≡B’。

据①③和 3.3 有　　CC∧A≡C∧B∈w。

再据 3.3 和 CI 有　　CA≡B∈w。

情况 2　<|C|, |A|, |B|>∈$N_2(w)$：则

|C|∩|A|＝|C|∩|B|

据 3.5 有　　　□C∧A↔C∧B

据 EI 有　　　□CA≡B

据 3.3 有　　　CA≡B∈w。

3.11 引理

PIRC 的适当框架 F 是 **pirc**-框架。

证明：

下面我们来验证 F 满足定义 2.3 给出的框架条件。

为了证明方便，我们先验证(ci)（验证其他条件时将用到这个条件），即：

(*) <X, Y, Z>∈N(w) ⇔ <X, X∩Y, X∩Z>∈N(w)

验证(ci)：

“⇒”：设$\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$，

情况 1 $\langle X, Y, Z\rangle \in N_1(w)$：则

据 $N_1(w)$的定义 ① 存在 $CA \equiv B \in w$，

② $X=|C|, X\cap(X\cap Y)=X\cap Y=|A|, X\cap(X\cap Z)=X\cap Z=|B|$。

故据①②和 $N_1(w)$的定义有

$\langle X, X\cap Y, X\cap Z\rangle \in N_1(w)$。

从而 $\langle X, X\cap Y, X\cap Z\rangle \in N(w)$。

情况 2 $\langle X, Y, Z\rangle \in N_2(w)$：则

据 $N_2(w)$的定义 $X\cap Y=X\cap Z$，

所以 $X\cap(X\cap Y)=X\cap(X\cap Z)$，

故据 $N_2(w)$的定义 $\langle X, X\cap Y, X\cap Z\rangle \in N_2(w)$，

从而 $\langle X, X\cap Y, X\cap Z\rangle \in N(w)$。

“⇐”：设$\langle X, X\cap Y, X\cap Z\rangle \in N(w)$，

情况 1 $\langle X, X\cap Y, X\cap Z\rangle \in N_1(w)$：则

据 $N_1(w)$的定义 ① 存在 $CA \equiv B \in w$，

② $X=|C|, X\cap Y=X\cap(X\cap Y)=|A|, X\cap Z=X\cap(X\cap Z)=|B|$。

故据①②和 $N_1(w)$的定义有

$\langle X, Y, Z\rangle \in N_1(w)$

从而 $\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$。

情况 2 $\langle X, X\cap Y, X\cap Z\rangle \in N_2(w)$：则

据 $N_2(w)$的定义 $X\cap(X\cap Y)=X\cap(X\cap Z)$，

所以 $X\cap Y=X\cap Z$。

故据 $N_2(w)$的定义 $\langle X, Y, Z\rangle \in N_2(w)$，

从而 $\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$。

验证(sy)：设$\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$，

情况 1 $\langle X, Y, Z\rangle \in N_1(w)$：则

据 $N_1(w)$定义 ① 存在 $CA \equiv B \in w$，

② $X=|C|, X\cap Y=|A|, X\cap Z=|B|$。

据 SY 有 ③ $\Box CA\equiv B \rightarrow CB\equiv A$，

据①③和 3.3 有 ④ $CB\equiv A \in w$，

据②④和 $N_1(w)$定义有 $\langle X, Z, Y\rangle \in N_1(w)$，

从而 $\langle X, Z, Y\rangle \in N(w)$。

情况 2 $\langle X, Y, Z\rangle \in N_2(w)$：则

$X\cap Y=X\cap Z$，

所以 $X\cap Z=X\cap Y$，

故据 $N_2(w)$的定义 $\langle X, Z, Y\rangle \in N_2(w)$，

从而 $\langle X, Z, Y\rangle \in N(w)$。

验证(tr)：设$\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$且$\langle X, Z, U\rangle \in N(w)$，要证$\langle X, Y, U\rangle \in N(w)$。

情况 1 $\langle X, Y, Z\rangle \in N_1(w)$且$\langle X, Z, U\rangle \in N_1(w)$：则

据 3.9 ① 存在 $CA \equiv B \in w$，

② $X=|C|, X\cap Y=|A|, X\cap Z=|B|$，

③ 存在 $C'A'\equiv B' \in w$，

④ $X=|C'|, X\cap Z=|A'|, X\cap U=|B'|$。

据②④有 $|C|=|C'|, |B|=|A'|$，

故据 3.5 有 ⑤ $\Box C\leftrightarrow C', \Box B\leftrightarrow A'$，

所以，据 CE 和 1.5(3)有

⑥ $\Box CA\equiv B\leftrightarrow C'A\equiv A'$，

据 TR 有 ⑦ $\Box C'A\equiv A'\to C'A'\equiv B'\to C'A\equiv B'$，

据①⑥⑦和 3.3 有 ⑧ $C'A'\equiv B'\to C'A\equiv B'\in w$

据③⑧和 3.3 有 ⑨ $C'A\equiv B'\in w$，

据②④⑨和 $N_1(w)$的定义有

$<X, Y, U>\in N_1(w)$，

从而 $<X, Y, U>\in N(w)$。

情况 2 $<X, Y, Z>\in N_1(w)$且$<X, Z, U>\in N_2(w)$：则

据 $N_2(w)$的定义 ① $X\cap Z=X\cap U$，

因为 $<X, Y, Z>\in N_1(w)$，

所以 $<X, Y, Z>\in N(w)$，

故据(*)有 ② $<X, X\cap Y, X\cap Z>\in N(w)$。

据①②有 $<X, X\cap Y, X\cap U>\in N(w)$，

再据(*)有 $<X, Y, U>\in N(w)$。

情况 3 $<X, Y, Z>\in N_2(w)$且$<X, Z, U>\in N_1(w)$：则

据 $N_2(w)$的定义 ① $X\cap Y=X\cap Z$，

因为 $<X, Z, U>\in N_1(w)$，

所以 $<X, Z, U>\in N(w)$，

故据(*)有 ② $<X, X\cap Z, X\cap U>\in N(w)$。

据①②有 $<X, X\cap Y, X\cap U>\in N(w)$，

再据(*)有 $<X, Y, U>\in N(w)$。

情况 4 $<X, Y, Z>\in N_2(w)$且$<X, Z, U>\in N_2(w)$：则

据 $N_2(w)$的定义 ① $X\cap Z=X\cap U$，

因为 $<X, Y, Z>\in N_2(w)$，

所以 $<X, Y, Z>\in N(w)$，

故据(*)有 ② $<X, X\cap Y, X\cap Z>\in N(w)$，

据①②有 $<X, X\cap Y, X\cap U>\in N(w)$，

再据(*)有 $<X, Y, U>\in N(w)$。

验证(ie)：设$<X, Y, Z>\in N(w)$且 $w\in X\cap Y$，要证 $w\in Z$。

情况 1 $<X, Y, Z>\in N_1(w)$：则

据 $N_1(w)$的定义 ① 存在 $CA\equiv B\in w$，

② $X=|C|, X\cap Y=|A|, X\cap Z=|B|$。

据 IE ③ $\Box CA\equiv B\to C\wedge A\to B$，

据①③和 3.3 $C\wedge A\to B\in w$，

所以据 3.3 有 $C\wedge A\in w \Rightarrow B\in w$，

故据 3.4 和 3.5 有 ④ $w\in|C|\cap|A| \Rightarrow w\in|B|$。

因为 $w\in X\cap Y$，

据②有 ⑤ $w\in X\cap(X\cap Y)=|C|\cap|A|$，

所以据②④⑤有 $w\in|B|=X\cap Z$，

所以 $w\in Z$。

情况 2 $\langle X, Y, Z\rangle \in N_2(w)$：则

据 $N_2(w)$的定义 $X\cap Y = X\cap Z$。

因为 $w\in X\cap Y$，

所以 $w\in X\cap Z$，

所以 $w\in Z$。

验证(ei)：设 $X\cap Y = X\cap Z$，则$\langle X, Y, Z\rangle \in N_2(w)$，故$\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$。

说明：

上面的引理说明：**PIRC** 的适当框架是 **pirc-**框架，所以这个引理也证明 Frame(**pirc**)非空。

3.12 定理　框架完全性定理

PIRC 相对框架类 Frame(**pirc**)是完全的。

证明：

只须证：

若 A 不是 **PIRC** 的内定理，则 A 在某个 **pirc-**框架中不有效。

设 A 不是 **PIRC** 的内定理。据引理 3.10，M＝<F, [ ]>是 **PIRC** 的典范模型。据设定和定理 3.8，有 M □A，所以 F □A。再据引理 3.11，F 是 **pirc-**框架，故要证结果成立。

参考文献：

[1] 李小五，陈小平(2004). 双结果条件句逻辑. *逻辑与认知*（电子期刊），Vol.2, No.4

A Logic of Propositional Identity Relative to Conditions

WEN Xue-feng

(Institute of Logic and Cognition of Sun Yat-sen University 510275, Guangdong, China)

Abstract: Firstly, we construct an axiomatic system **PIRC** of propositional identity relative to conditions and give some results in its proof theory. Secondly, we introduce the ordered neighborhood semantics, and give the frame conditions of its characteristic axioms and inferential rules. We prove the frame soundness with respect to the frame conditions. Finally, we prove the frame completeness with respect to the frame conditions.

Key words: propositional identity; ordered neighborhood semantics; relative to conditions