带相对等词的命题逻辑（PLRI）与分析悖论的解决*

文学锋
(中山大学逻辑与认知研究所，中山大学哲学系，广东　广州 510275)

内容题要：本文构造了带相对等词的命题逻辑 PLRI，给出了其代数语义，证明了 PLRI 相对该语义是强可靠和强完全的，并应用 PLRI 解决了分析悖论，从而弥补了现有的超内涵逻辑在内涵同一刻画上的薄弱和不足。最后，本文还指出了关于 PLRI 的进一步研究方向。

关键词：相对等词；分析悖论；超内涵逻辑

中图分类号：**B81**　　　**文献标识码**：**A**

一、问题与动机

Montague 在可能世界语义上发展的内涵逻辑为语言逻辑的发展奠定了良好基础。然而内涵逻辑不能表达不同重言式之间的内涵差异，因此在内涵逻辑诞生后不久，M. Cresswell 等人就提出了所谓“超内涵语境”与“超内涵逻辑”（参见(Cresswell, 1975)）。现有的超内涵逻辑其核心思想是通过在经典逻辑的基础上引入一个表示内涵同一的等词来完成的。这样的逻辑可以区分内涵同一与外延等价。即使逻辑等价的表达式也不必然内涵同一。这样就解决了内涵逻辑对内涵刻画过粗引起的超内涵问题。然而，这样的超内涵逻辑仍然不能很好的解决所谓的“分析悖论”（*paradox of analysis*），即不能解释为何下面的论证是无效的：

$$\frac{\begin{array}{l}S\text{ 相信 } A = A\\ A =_{df} B\end{array}}{S\text{ 相信 } A = B}$$

因为 $A =_{df} B$ 是定义式，这样就可以用超内涵逻辑中表达内涵同一的等词来刻画，而在超内涵逻辑中，内涵相等的命题是可以到处替换的，从而得出上述推理是有效的。解决上述困难的一个办法是不把自然语言中同义的表达式看作内涵同一，而只是看作外延相等，这样，我们就可以避免上述无效推理。然而，如果我们连自然语言中同义的表达式都不表达为形式系统中的内涵同一，那么超内涵逻辑中用于刻画内涵同一的等词就变得没有意义了。

问题的关键在于，自然语言中的内涵同一是强烈依赖于语境的。比如，一般的，我们不能说“a 不是白的”与“a 是非白的”具有相同的内涵，但如果相对于讨论 a 的颜色这个语境，就可以认为这两句话具有相同内涵。又如，一般的，我们不认为“a 是三角形”与“a 是三边形”具有相同内涵，但如果相对于数学命题这个语境，那么它们也可以看作是内涵同一的。对于某些逻辑家而言（相对于他们的公共信念集这个语境），“非 p 或 q”与“p 蕴含 q”具有相同的内涵，而对于另一些逻辑学家而言，二者则具有不同的意义。因此，一个仅有绝对内涵同一概念的逻辑系统要么不能很好的刻画自然语言，要么对于自然语言就是无意义的。对于内涵同一，我们需要一个更丰富、更灵活的概念，如同我们需要一个更丰富、更

收稿日期：2006-3-30
基金项目：本文获得教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目资助。
作者简介：文学锋(1977-)，男，湖北人，中山大学博士生。

灵活的类型论（*flexible type theory*）一样。换言之，自然语言不但具有类型上的多态性（*polymorphism*），而且在内涵同一上也具有某种多态性。但现有的超内涵逻辑研究只注意到了类型应该灵活，而忽略了内涵的同一性也应该是灵活的。事实上，由于认识论的原因，特别的，由于开放类的存在（参见(鞠实儿 2004)，人们在辨认两个对象是否同一时总是只能在局部、相对于一定的语境进行。对于非内涵对象是这样（关于这一点，P. T. Geach 等人已有过论述，参见(Geach 1967)和(Deutsch 2006)），对于内涵对象而言更是如此。因此，内涵同一只能是相对的，总是相对于某个语境的同一。这就是我们引入带相对等词的命题逻辑的主要动机。

(Suszko, S. L. 1971)和(Bloom 1972)讨论了带绝对等词的命题逻辑及其超内涵性，为本文讨论带相对等词的命题逻辑提供了技术基础。

二、PLRI-语言与公理系统

定义 2.1 PLRI-语言

初始符号

命题变元：$p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$；

联结词：$\neg, \rightarrow, \equiv$；

辅助符号：(,)。

所有命题变元构成的集合记为 Var。

合式公式

所有合式公式构成的集合 Form 由下列规则生成：

（1）若 $p\in \mathrm{Var}$，则 $p\in \mathrm{Form}$；

（2）若$\alpha, \beta, \gamma\in \mathrm{Form}$，则$\neg\alpha, (\alpha\rightarrow\beta), \gamma\alpha\equiv\beta\in \mathrm{Form}$；

（3）所有合式公式由（1）、（2）生成。

我们称上述合式公式为 PLRI-公式。其中$\gamma\alpha\equiv\beta$表示命题α和β相对于语境γ内涵同一。

如果我们把$\neg$, $\rightarrow$和$\equiv$分别看作 Form 上的一元运算、二元运算和三元运算，那么四元组$\mathfrak{A} = \langle \mathrm{Form}, \neg, \rightarrow, \equiv\rangle$就是一个代数。我们称形如$\mathfrak{A}$的代数为 PLRI-代数。

如通常那样可定义$\wedge, \vee$和$\leftrightarrow$，并规定联结词的结合力按下面从左到右的顺序依次减弱：$\neg, \equiv, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$。 □

定义 2.2 真值函项公理集

称下列公式模式的所有代入特例构成的集合为**真值函项公理集**，记为 TFA：

（T1） $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$，

（T2） $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$，

（T3） $(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$。 □

易见，TFA 即为经典命题逻辑的公理集。

定义 2.3 相对等词公理集

称下列公式模式的所有代入特例构成的集合为**相对等词公理集**，记为 RIA：

（RI1） $\gamma\alpha\equiv\alpha$，

（RI2） $\gamma\alpha\equiv\beta\rightarrow\gamma\beta\equiv\alpha$，

（RI3） $\delta\alpha\equiv\beta\rightarrow(\delta\beta\equiv\gamma\rightarrow\delta\alpha\equiv\gamma)$， （RI4） $\gamma\alpha\equiv\beta\rightarrow\gamma\neg\alpha\equiv\neg\beta$，

（RI5） $\gamma\alpha\equiv\alpha'\rightarrow(\gamma\beta\equiv\beta'\rightarrow\gamma(\alpha\rightarrow\beta)\equiv(\alpha'\rightarrow\beta')$，

（RI6） $\delta\gamma\equiv\gamma'\rightarrow(\delta\alpha\equiv\alpha'\rightarrow(\delta\beta\equiv\beta'\rightarrow\delta(\gamma\alpha\equiv\beta)\equiv(\gamma'\alpha'\equiv\beta')))$。 □

易见，(RI1)-(RI3)表示的是某种等价关系，这对于刻画内涵同一显然是必需的。(RI4)-(RI6)则表明，相对于某个语境内涵同一的命题，在添加相同的联结词后相对于同样的语境仍然具有相同的内涵，这也是一个相当直观的基本要求。

定义 2.4 PLRI 公理系统、句法后承、内定理

称由公理集 TFA∪RIA 和唯一的推理规则分离规则（*Modus Ponens*）构成的系统为 **PLRI 公理系统**，简称 PLRI。称 PLRI-公式集Ψ是 PLRI-公式集Φ相对于 PLRI 的**句法后承**，当且仅当，Ψ中的每个公式都能从集合 TFA∪RIA∪Φ在有限步内仅通过分离规则得到，记作Φ $\square_{PLRI}$ Ψ，在不致引起混淆之处记为Φ □ Ψ。若Φ □ Ψ不成立，则记为Φ □ Ψ。

若Φ □ Ψ且Φ = ∅，Ψ = {α}，则称α是 PLRI 的**内定理**，记作□α。所有 PLRI 的内定理构成的集合记作 Th(PLRI)。 □

定义 2.5 一致集、极大一致集

称 PLRI-公式集Φ是**一致的**，当且仅当存在一个 PLRI-公式α，使得Φ □ α。

称 PLRI-公式集Φ是**极大一致的**，当且仅当Φ是一致的，且不存在一致集Ψ使得Φ⊂Ψ。 □

三、PLRI-模型与语义

定义 3.1 PLRI-模型

称三元组<$\mathfrak{A}$, g, D>为 PLRI-模型，当且仅当下列条件满足：

（1）$\mathfrak{A} = \langle A, \neg^*, \rightarrow^*, \equiv^*\rangle$为一个 PLRI-代数，其中 $A \neq \emptyset$；

（2）g 是定义在 A 到$\wp(A\times A)$上的一个函数，使得对任意 d∈A，g(d)是一个 $\mathfrak{A}$ 上的一个全等关系，即满足下列条件：对任意 a, b, c, d, a', b', c'∈A

（g1）$\langle a, a\rangle\in g(d)$，

（g2）$\langle a, b\rangle\in g(d) \Rightarrow \langle b, a\rangle\in g(d)$，

（g3）$\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\in g(d) \Rightarrow \langle a, c\rangle\in g(d)$，

（g4）$\langle a, b\rangle\in g(d) \Rightarrow \langle\neg^* a, \neg^* b\rangle\in g(d)$，

（g5）$\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle\in g(d) \Rightarrow \langle a\rightarrow^* b, a'\rightarrow^* b'\rangle\in g(d)$，

（g6）$\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle, \langle c, c'\rangle\in g(d) \Rightarrow \langle ca\equiv^* b, c'a'\equiv^* b'\rangle\in g(d)$；

（3）D⊆A 且满足下列条件：对任意 a, b, c∈A

（D1）$\neg^* a\in D \Leftrightarrow a\notin D$，

（D2）$a\rightarrow^* b\in D \Leftrightarrow a\notin D$ 或 $b\in D$，

（D3）$ca\equiv^* b\in D \Leftrightarrow \langle a, b\rangle\in g(c)$。 □

上述对 PLRI-模型的定义反映了我们直观上对于相对内涵同一的基本要求。相对内涵同一实际上就是对每一个所相对的语境都给出一个全等关系，这些不同语境下的全等关系可以相同但不必相同。这样，内涵同一就变得灵活和丰富起来。

有了 PLRI-模型，我们就可以很容易定义 PLRI 的完整语义了。

定义 3.2 赋值、可满足、真、语义后承与有效性

令 $\mathfrak{M}$ = <$\mathfrak{A}$, g, D>为一个 PLRI-模型，称 v 为一个 $\mathfrak{M}$-**赋值**，当且仅当 v 是一个从 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的同态映射，即满足下列条件：对任意$\alpha, \beta, \gamma \in$Form，

（v1）$v(\neg\alpha) = \neg^* v(\alpha)$，

（v2）$v(\alpha\to\beta) = v(\alpha)\to^* v(\beta)$，

（v3）$v(\gamma\alpha\equiv\beta) = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^* v(\beta)$。

我们把 PLRI-模型与其上的赋值合称为 PLRI 语义。

称 PLRI-公式α在模型 $\mathfrak{M}$ 中被赋值 v **满足**，当且仅当 $v(\alpha)\in D$，记作 $\mathfrak{M}, v \vDash_{PLRI} \alpha$。在不致引起混淆之处记为 $\mathfrak{M}, v \vDash \alpha$。称 PLRI-公式集$\Phi$在模型 $\mathfrak{M}$ 中被赋值 v 满足，当且仅当Φ中的每个公式在 $\mathfrak{M}$ 中被 v 满足，记作 $\mathfrak{M}, v \vDash_{PLRI} \Phi$，在不致引起混淆之处记为 $\mathfrak{M}, v \vDash \Phi$。称 PLRI-公式$\alpha$在模型 $\mathfrak{M}$ 中**可满足**，当且仅当它在 $\mathfrak{M}$ 中被某个 $\mathfrak{M}$-赋值所满足。

称 PLRI-公式α在模型 $\mathfrak{M}$ 中**真**，当且仅当它被所有 $\mathfrak{M}$-赋值所满足。

称 PLRI-公式集Ψ是 PLRI-公式集Φ的**语义后承**，当且仅当对任意 PLRI-模型 $\mathfrak{M}$ 和任意 $\mathfrak{M}$-赋值 v，如果 $\mathfrak{M}, v \vDash \Phi$，那么 $\mathfrak{M}, v \vDash \Psi$，记作$\Phi \vDash \Psi$。若$\Phi \vDash \Psi$不成立，则记为$\Phi \nvDash \Psi$。

称 PLRI-公式α是 PLRI **有效的**，当且仅当对任意 PLRI-模型 $\mathfrak{M}$ 和任意 $\mathfrak{M}$-赋值 v，$\mathfrak{M}, v \vDash \alpha$，记作$\vDash\alpha$。 □

四、PLRI 的可靠性与完全性

引理 4.1 令Φ是极大一致集，则

（1） $\neg\alpha\in\Phi \Leftrightarrow \alpha\notin\Phi$，

$\alpha\to\beta\in\Phi \Leftrightarrow \alpha\notin\Phi$或$\beta\in\Phi$，

$\alpha\wedge\beta\in\Phi \Leftrightarrow \alpha\in\Phi$且$\beta\in\Phi$，

$\alpha\in\Phi$且$\vdash \alpha\to\beta \Rightarrow \beta\in\Phi$，

$\alpha\in\Phi$且$\alpha\to\beta\in\Phi \Rightarrow \beta\in\Phi$；

（2） Th(PLRI)$\subseteq\Phi$；

（3） 若$\Phi \nvdash \alpha$，则存在极大一致集Ψ使得$\Phi\cup\{\neg\alpha\}\subseteq\Psi$。

证明：如通常所证，从略。 □

定理 4.2 令Φ和Ψ为 PLRI-公式集，则$\Phi \vdash \Psi \Leftrightarrow \Phi \vDash \Psi$，从而 PLRI 公理系统相对于 PLRI 语义是强可靠和强完全的。

证明：

“$\Rightarrow$”：只需验证对任意 PLRI-模型 $\mathfrak{M}$ 和任意 $\mathfrak{M}$-赋值 v，$\mathfrak{M}, v \vDash$ TFA$\cup$RIA。TFA 的验证显然。下面验证 RIA。

(RI1)：对任意$\gamma\in$Form，

据(g1) $<v(\alpha), v(\alpha)>\in g(v(\gamma))$，

故 $v(\gamma\alpha\equiv\alpha) = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^* v(\alpha)\in D$，

即 $\mathfrak{M}, v \vDash \gamma\alpha\equiv\alpha$。

(RI2)：设 $\mathfrak{M}, v \vDash \gamma\alpha\equiv\beta$，

则 $v(\gamma\alpha\equiv\beta) = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^* v(\beta)\in D$，

故 $<v(\alpha), v(\beta)>\in g(v(\gamma))$，

据(g2)有 $<v(\beta), v(\alpha)>\in g(v(\gamma))$，

所以 $v(\gamma\beta\equiv\alpha) = v(\gamma)v(\beta)\equiv^* v(\alpha)\in D$，

即 $\mathfrak{M}, v \models \gamma\beta\equiv\alpha$，

故 $\mathfrak{M}, v \models \gamma\alpha\equiv\beta\to\gamma\beta\equiv\alpha$。

(RI3)：设 $\mathfrak{M}, v \models \delta\alpha\equiv\beta$，$\mathfrak{M}, v \models \delta\beta\equiv\gamma$，

则 $v(\delta\alpha\equiv\beta) = v(\delta)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta),\ v(\delta\beta\equiv\gamma) = v(\delta)v(\beta)\equiv^{*}v(\gamma)\in D$，

故 $<v(\alpha), v(\beta)>, <v(\beta), v(\gamma)>\in g(v(\delta))$，

据(g3)有 $<v(\alpha), v(\gamma)>\in g(v(\delta))$，

所以 $v(\delta\alpha\equiv\gamma) = v(\delta)v(\alpha)\equiv^{*}v(\gamma)\in D$，

即 $\mathfrak{M}, v \models \delta\alpha\equiv\gamma$，

故 $\mathfrak{M}, v \models \delta\alpha\equiv\beta\to(\delta\beta\equiv\gamma\to\delta\alpha\equiv\gamma)$。

(RI4)：设 $\mathfrak{M}, v \models \gamma\alpha\equiv\beta$，

则 $v(\gamma\alpha\equiv\beta) = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta)\in D$，

故 $<v(\alpha), v(\beta)>\in g(v(\gamma))$，

据(g4)有 $<\neg^{*}v(\beta), \neg^{*}v(\alpha)>\in g(v(\gamma))$，

所以 $v(\gamma\neg\alpha\equiv\neg\beta) = v(\gamma)\neg^{*}v(\beta)\equiv^{*}\neg^{*}v(\alpha)\in D$，

即 $\mathfrak{M}, v \models \gamma\neg\alpha\equiv\neg\beta$，

故 $\mathfrak{M}, v \models \gamma\alpha\equiv\beta\to\gamma\neg\alpha\equiv\neg\beta$。

(RI5)：设 $\mathfrak{M}, v \models \gamma\alpha\equiv\alpha'$，$\mathfrak{M}, v \models \gamma\beta\equiv\beta'$，

则 $v(\gamma\alpha\equiv\beta) = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta),\ v(\gamma'\alpha'\equiv\beta') = v(\gamma')v(\alpha')\equiv^{*}v(\beta')\in D$，

故 $<v(\alpha), v(\beta)>, <v(\alpha'), v(\beta')>\in g(v(\gamma))$，

据(g5)有 $<v(\alpha)\to^{*}v(\beta), v(\alpha')\to^{*}v(\beta')>\in g(v(\gamma))$，

所以 $v(\gamma(\alpha\to\beta)\equiv(\alpha'\to\beta')) = v(\gamma)(v(\alpha)\to^{*}v(\beta))\equiv^{*}(v(\alpha')\to v(\beta'))\in D$，

即 $\mathfrak{M}, v \models \gamma(\alpha\to\beta)\equiv(\alpha'\equiv\beta')$，

故 $\mathfrak{M}, v \models \gamma\alpha\equiv\alpha'\to(\gamma\beta\equiv\beta'\to\gamma(\alpha\to\beta)\equiv(\alpha'\to\beta')$。

(RI6)：设 $\mathfrak{M}, v \models \delta\gamma\equiv\gamma', \mathfrak{M}, v \models \delta\alpha\equiv\alpha', \mathfrak{M}, v \models \delta\beta\equiv\beta'$，

则 $v(\delta\gamma\equiv\gamma') = v(\delta)v(\gamma)\equiv^{*}v(\gamma')\in D$，

$v(\delta\alpha\equiv\alpha') = v(\delta)v(\alpha)\equiv^{*}v(\alpha')\in D$，

$v(\delta\beta\equiv\beta') = v(\delta)v(\beta)\equiv^{*}v(\beta')\in D$，

故 $<v(\gamma), v(\gamma')>, <v(\alpha), v(\alpha')>, <v(\beta), v(\beta')>\in g(v(\delta))$，

据(g6)有 $<v(\gamma)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta),v(\gamma')v(\alpha')\equiv^{*}v(\beta')>\in g(v(\delta))$，

所以 $v(\delta(\gamma\alpha\equiv\beta)\equiv(\gamma'\alpha'\equiv\beta')) = v(\delta)(v(\gamma)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta))\equiv^{*}(v(\gamma')v(\alpha')\equiv^{*}v(\beta'))\in D$，

即 $\mathfrak{M}, v \models \delta(\gamma\alpha\equiv\beta)\equiv(\gamma'\alpha'\equiv\beta')$，

故 $\mathfrak{M}, v \models \delta\gamma\equiv\gamma'\to(\delta\alpha\equiv\alpha'\to(\delta\beta\equiv\beta'\to\delta(\gamma\alpha\equiv\beta)\equiv(\gamma'\alpha'\equiv\beta')))$。

“$\Leftarrow$”：设若$\Phi \nvdash \Psi$，则存在$\varepsilon\in\Psi$使得$\Phi \nvdash \varepsilon$，因此据引理 4.1(3)，存在极大一致集Ψ使得$\Phi\cup\{\neg\varepsilon\}\subseteq\Psi$。

定义 Form 上的关系$\sim_{\Psi}$：对任意$\alpha, \beta\in$Form，

$$\alpha \sim_{\Psi} \beta \Leftrightarrow \text{对所有}\gamma\in\text{Form}，\gamma\alpha\equiv\beta\in\Psi。$$

据公理(RI1)，(RI2)和(RI3)，对任意$\alpha, \beta, \gamma\in$Form，

有 $c\beta\equiv\beta,\ c\alpha\equiv\beta\to c\beta\equiv\alpha,\ c\alpha\equiv\beta\to(c\beta\equiv\gamma\to c\alpha\equiv\gamma)\in Th(PLRI)$，

据引理 4.1 有 $Th(PLRI)\subseteq\Psi$，

从而据$\sim_{\Psi}$的定义知其满足自返性、对称性和传递性，故$\sim_{\Psi}$为 Form 上的等价关系。

记 Form 中每个元素 α 相对于$\sim_{\Psi}$构成的等价类为$|\alpha|$，所有这些等价类构成的集合记为 A，记所有Ψ中元素的等价类构成的集合为 D。分别定义 A 上的一元运算$\neg^{*}$，二元运算$\to^{*}$

和三元运算$\equiv^*$如下：

$$\neg^*|\alpha| =_{df} |\neg\alpha|,\ |\alpha|\to^*|\beta| =_{df} |\alpha\to\beta|,\ |\gamma||\alpha|\equiv^*|\beta| =_{df} |\gamma\alpha\equiv\beta|。$$

首先验证上述定义是合理的，即定义项与被定义项的代表元选取无关。

设$\alpha \sim_\Psi \alpha'$，则对所有$\gamma\in$Form，有

$$\gamma\alpha\equiv\alpha'\in\Psi,$$

据公理（RI4）和引理 4.1(1)，对所有$\gamma\in$Form，

$$\gamma\neg\alpha\equiv\neg\alpha',$$

从而 $\neg\alpha \sim_\Psi \neg\alpha'$，

故 $|\neg\alpha| = |\neg\alpha'|$。

设$\alpha \sim_\Psi \alpha', \beta \sim_\Psi \beta'$，则对所有$\gamma\in$Form，

有 $\gamma\alpha\equiv\alpha', \gamma\beta\equiv\beta'\in\Psi$，

据公理（RI5）和引理 4.1(1)，对所有$\gamma\in$Form，

有 $\gamma(\alpha\to\beta)\equiv(\alpha'\to\beta')$，

从而 $(\alpha\to\beta) \sim_\Psi (\alpha'\to\beta')$，

故 $|\alpha\to\beta| = |\alpha'\to\beta'|$。

设$\alpha \sim_\Psi \alpha', \beta \sim_\Psi \beta', \gamma \sim_\Psi \gamma'$，则对所有$\delta\in$Form，

有 $\delta\alpha\equiv\alpha', \delta\beta\equiv\beta', \delta\gamma\equiv\gamma'\in\Psi$，

据公理（RI6）和引理 4.1(1)，对所有 $\delta\in$Form，

有 $\delta(\gamma\alpha\equiv\beta)\equiv(\gamma'\alpha'\equiv\beta')$，

从而 $(\gamma\alpha\equiv\beta) \sim_\Psi (\gamma'\alpha'\equiv\beta')$，

故 $|\gamma\alpha\equiv\beta| = |\gamma'\alpha'\equiv\beta'|$。

其次证明 $\mathfrak{A} = \langle A, \neg^*, \to^*, \equiv^*\rangle$为一个 PLRI-代数。

对任意$|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\in A$，有$\alpha, \beta, \gamma\in$Form。因为 $\mathfrak{F} = \langle \text{Form}, \neg, \to, \equiv\rangle$是一个代数，

所以 $\neg\alpha, \alpha\to\beta, \gamma\alpha\equiv\beta\in$Form，

故 $|\neg\alpha|, |\alpha\to\beta|, |\gamma\alpha\equiv\beta|\in A$，

从而据上述 $\neg^*, \to^*, \equiv^*$ 的定义，

$$\neg^*|\alpha|, |\alpha|\to^*|\beta|, |\gamma||\alpha|\equiv^*|\beta|\in A,$$

即 A 对这些运算保持封闭，故 $\mathfrak{A} = \langle A, \neg^*, \to^*, \equiv^*\rangle$为一个 PLRI-代数。

再次定义 A 上的函数 g 为：对任意$|\gamma|\in A$，$g(|\gamma|)\subseteq A\times A$ 使得对任意$|\alpha|, |\beta|\in A$，

$$\langle|\alpha|, |\beta|\rangle\in g(|\gamma|) \Leftrightarrow |\gamma||\alpha|\equiv^*|\beta|\in D,$$

易见该定义是合理的，即定义项与被定义项的代表元选取无关。

下面验证对任意$|\delta|\in A$，$g(|\delta|)$是 $\mathfrak{A}$ 上的全等关系。

对任意 $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\alpha'|, |\beta'|, |\gamma'|\in A$，

(g1)：$|\alpha| = |\beta| \Rightarrow \delta\alpha\equiv\beta\in\Psi \Rightarrow |\delta\alpha\equiv\beta|\in D \Rightarrow |\delta||\alpha|\equiv^*|\beta|\in D \Rightarrow \langle|\alpha|, |\beta|\rangle\in g(|\delta|)$，

(g2)：$\langle|\alpha|, |\beta|\rangle\in g(|\delta|) \Rightarrow |\delta||\alpha|\equiv^*|\beta|\in D \Rightarrow |\delta\alpha\equiv\beta|\in D \Rightarrow \delta\alpha\equiv\beta\in\Psi$

$\Rightarrow \delta\beta\equiv\alpha\in\Psi \Rightarrow |\delta\beta\equiv\alpha|\in D \Rightarrow |\delta||\beta|\equiv^*|\alpha|\in D \Rightarrow \langle|\beta|, |\alpha|\rangle\in g(|\delta|)$，

(g3)：$\langle|\alpha|, |\beta|\rangle, \langle|\beta'|, |\gamma\rangle|\in g(|\delta|), |\beta| = |\beta'| \Rightarrow \delta\alpha\equiv\beta, \delta\beta\equiv\beta', \delta\beta'\equiv\gamma\in\Psi$

$\Rightarrow \delta\alpha\equiv\gamma\in\Psi \Rightarrow \langle|\alpha|, |\gamma|\rangle\in g(|\delta|)$，

(g4)：$\langle|\alpha|, |\beta|\rangle\in g(|\delta|) \Rightarrow \delta\alpha\equiv\beta\in\Psi \Rightarrow \delta\neg\alpha\equiv\neg\beta\in\Psi$

$\Rightarrow \langle|\neg\alpha|, |\neg\beta|\rangle\in g(|\delta|) \Rightarrow \langle\neg^*|\alpha|, \neg^*|\beta|\rangle\in g(|\delta|)$，

(g5)：$\langle|\alpha|, |\alpha'|\rangle, \langle|\beta|, |\beta'|\rangle\in g(|\delta|) \Rightarrow \delta\alpha\equiv\alpha', \delta\beta\equiv\beta'\in\Psi$

$\Rightarrow \delta(\alpha\to\beta)\equiv(\alpha'\to\beta')\in\Psi \Rightarrow \langle|\alpha\to\beta|, |\alpha'\to\beta'|\rangle\in g(|\delta|)$

$\Rightarrow \langle|\alpha|\to^*|\beta|, |\alpha'|\to|\beta'|\rangle\in g(|\delta|)$， (g6)：$<|\alpha|, |\alpha'|>, <|\beta|, |\beta'|>, <|\gamma|, |\gamma'|\in g(|\delta|) \Rightarrow \delta\alpha\equiv\alpha', \delta\beta\equiv\beta', \delta\gamma\equiv\gamma'\in\Psi$

$\Rightarrow \delta(\gamma\alpha\equiv\beta)\equiv(\gamma'\alpha'\equiv\beta')\in\Psi \Rightarrow <|\gamma\alpha\equiv\beta|, |\gamma'\alpha'\equiv\beta'|>\in g(|\delta|)$

$\Rightarrow <|\gamma||\alpha\equiv^{*}|\beta|, |\gamma'||\alpha'\equiv^{*}|\beta'|>\in g(|\delta|)$。

下面验证上面定义的 D 满足（D1），（D2）和（D3）。

对任意$|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\in A$，

(D1)：$\neg^{*}|\alpha|\in D \Leftrightarrow |\neg\alpha|\in D \Leftrightarrow \neg\alpha\in\Psi \Leftrightarrow \alpha\notin\Psi \Leftrightarrow |\alpha|\notin D$，

(D2)：$|\alpha|\rightarrow^{*}|\beta|\in D \Leftrightarrow |\alpha\rightarrow\beta|\in D \Leftrightarrow \alpha\rightarrow\beta\in\Psi \Leftrightarrow \alpha\notin\Psi$或$\beta\in\Psi \Leftrightarrow |\alpha|\notin D$ 或$|\beta|\in D$，

(D3)：$|\gamma||\alpha|\equiv^{*}|\beta|\in D \Leftrightarrow <|\alpha|, |\beta|>\in g(|\gamma|)$（据 g 的定义）。

据以上证明可知 $\mathfrak{M} = <\mathfrak{A}, g, D>$是一个 PLRI-模型。

最后定义从 Form 到 A 的映射 v 为：对任意$\alpha\in$Form，$v(\alpha) = |\alpha|$。

下面验证 v 是一个 $\mathfrak{M}$-赋值。

(v1)：$v(\neg\alpha) = |\neg\alpha| = \neg^{*}|\alpha| = \neg^{*}v(\alpha)$，

(v2)：$v(\alpha\rightarrow\beta) = |\alpha\rightarrow\beta| = |\alpha|\rightarrow^{*}|\beta| = v(\alpha)\rightarrow^{*}v(\beta)$，

(v3)：$v(\gamma\alpha\equiv\beta) = |\gamma\alpha\equiv\beta| = |\gamma||\alpha|\equiv^{*}|\beta| = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta)$。

对任意$\alpha\in\Psi$，$v(\alpha) = |\alpha|\in D$，从而 $\mathfrak{M}$, v □ Ψ，即有 $\mathfrak{M}$, v □ Φ，但 $\mathfrak{M}$, v □ ε，矛盾于Φ □ Ψ，故Φ □ Ψ。 □

五、PLRI 对分析悖论的解决

下面我们应用 PLRI 解决本文开头提到的“分析悖论”问题。首先我们证明如下命题。

命题 5.1 {γα≡α, δα≡β} □ γα≡β。

证明：由于 PLRI 是强可靠的，因此只要证明{γα≡α, δα≡β} □ γα≡β即可。

考虑模型 $\mathfrak{M} = <\mathfrak{A}, g, D>$，其中 $\mathfrak{A} = <A, \neg^{*}, \rightarrow^{*}, \equiv^{*}>$定义如下：

A = {0, 1}，D = {1}，并定义 A 上的运算$\neg^{*}, \rightarrow^{*}, \equiv^{*}$如下：

$\neg^{*}0 = 1, \neg^{*}1 = 0$；

$0\rightarrow^{*}0 = 1, 0\rightarrow^{*}1 = 1, 1\rightarrow^{*}0 = 0, 1\rightarrow^{*}1 = 1$；

$00\equiv^{*}0 = 1, 00\equiv^{*}1 = 1, 01\equiv^{*}0 = 1, 01\equiv^{*}1 = 1, 10\equiv^{*}0 = 1, 10\equiv^{*}1 = 0, 11\equiv^{*}0 = 0, 11\equiv^{*}1 = 1$。

容易验证，如上定义的 $\mathfrak{A}$ 是一个 PLRI-代数。

定义 A 到$\wp(A\times A)$的函数 g 如下：

g(0) = {<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <1, 1>}，

g(1) = {<0, 0>, <1, 1>}。

容易验证，g 满足(g1)-(g6)，D 满足(D1)-(D3)。

不妨令α, β, γ, δ均为命题变元，定义 $\mathfrak{F} = <\text{Form}, \neg, \rightarrow, \equiv>$到 $\mathfrak{A} = <A, \neg^{*}, \rightarrow^{*}, \equiv^{*}>$的同态映射 v，使得 v(α) = 0, v(β) = 1, v(γ) = 1, v(δ) = 0，则

$v(\gamma\alpha\equiv\alpha) = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^{*}v(\alpha) = 10\equiv^{*}0 = 1$，

$v(\delta\alpha\equiv\beta) = v(\delta)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta) = 00\equiv^{*}1 = 1$，但

$v(\gamma\alpha\equiv\beta) = v(\gamma)v(\alpha)\equiv^{*}v(\beta) = 10\equiv^{*}1 = 0$。

故 $\mathfrak{M}$, v □ γα≡α，$\mathfrak{M}$, v □ δα≡β，但 $\mathfrak{M}$, v □ γα≡β，从而{γα≡α, δα≡β} □ γα≡β。 □

考察分析悖论在 PLRI 中的表达。我们把“S 相信 A = A”表示为γα≡α，其中α表示命题 A，γ表示 S 的信念集这个语境；把“A =$_{df}$ B”表示为δα≡β，其中α和β分别表示命题 A 和 B，δ表示 A 获得定义 B 所在的语境，因为这个语境与 S 的信念集语境不一定相同，因此γ和δ需要用不同的公式来表示。根据命题 5.1，{γα≡α, δα≡β} □ γα≡β，因此由“S 相信 A = A”

和“A = $_{df}$ B”推不出“S 相信 A = B”，从而解释了其论证的无效。这样，我们既保留了刻画内涵同一的等词，又避免了某些无效论证。

六、进一步的问题与研究

1. PLRI 似乎还不是一个极小系统，因为在 PLRI-模型 $\mathfrak{A} = <\mathfrak{A}, g, D>$中，要求对任意 $d \in A$，g(d)是 $\mathfrak{A}$ 上的全等关系，而这个要求还不是最弱的，对 g(d)的要求似乎可以减弱为等价关系，而不要求是全等关系，即只要求(g1)-(g3)，不要求(g4)-(g6)。相应的，在公理系统中，可以去掉相对等词公理(RI4)-(RI6)。这种减弱的公理系统相对上述减弱的模型是否完全需要进一步研究。如果可以证明，那么 PLRI 就不能看作是一个极小系统，上述逻辑将取代 PLRI 成为“带相对等词的命题逻辑”的更好候选者，因为它更具一般性。如果能证明其否定，那么最少需要增加哪些条件才能使其完全，从而回答在多大程度上(g4)-(g6)是必需的。
2. 可以根据需要对 PLRI 进行扩充。比如引入公理$\gamma\alpha\equiv\beta\to(\gamma\to(\alpha\to\beta))$，引入规则$\gamma\leftrightarrow\delta$ / $\gamma\alpha\equiv\beta\to\delta\alpha\equiv\beta$等等。还可以进一步引入时态和模态算子，或者如同(Suszko 1971)那样，通过 PLRI 中的等词定义模态算子，进而讨论 PLRI 与经典模态逻辑之间的关系，以考察 PLRI 的表达力强度。
3. 在 PLRI 中，为了方便起见，命题α, β与其所相对的语境γ都是用公式来表示的，这一点显得不够自然。可以考虑在语言中分别引进语句符号（即命题变元）和语境符号，从而使得语境与公式分离出来，这样表达可能更自然、更灵活，相应的语义也将有所不同。
4. 在命题逻辑上引入相对等词还可以仿照(Garbacz 2002)在经典谓词逻辑中引入相对等词的方法进行，即对命题引入一元谓词，通过这些一元谓词提供相对标准来表达命题的内涵同一，但这种方法最后是否能导出本质上不同的逻辑来还需要探索。
5. 进一步可考虑带相对等词的谓词逻辑，以及带相对等词的类型论，从而为自然语言提供更丰满的逻辑刻画。

致谢

本文的写作得到了中山大学逻辑与认知研究所鞠实儿教授和聂文龙副教授的悉心指导，中山大学逻辑与认知研究所博士生徐敏提供了很好的建议，在此一并致谢。

A Propositional Logic with Relative Identity Connective (PLRI) and a Solution to the Paradox of Analysis

WEN Xue-feng

(Institute of Logic and Cognition of Sun Yat-sen University 510275, Guangdong, China)

Abstract: Motivated by the deficiencies of hyperintensional logics with absolute identity connective for the equality of intensions, we construct a propositional logic with relative identity connective (PLRI) and prove its strong soundness and completeness with respect to an algebraic semantics. We apply PLRI and give a solution to the paradox of analysis that cannot be solved by the existing hyperintensional

logics. We also indicate further issues and possible worthwhile research on PLRI.

Key words: relative identity; paradox of analysis; hyperintensional logic

参考文献：

[1] Bloom, S. L. 1972. Investigations into the sentential calculus with identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13, no. 3: 289-308.

[2] Cresswell, M. 1975. Hyperintensional logic. *Studia Logica* 34:25-38.

[3] Deutsch, H. 2006. Relative identity. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2006 Edition)*, ed. E. N. Zalta. forthcoming URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2006/entries/identity-relative/>.

[4] Garbacz, P. 2002. Logics of relative identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 43: 27-50.

[5] Geach, P. T. 1967. Identity. *Review of Metaphysics* 21: 3-13.

[6] Suszko, R. 1971. Identity connective and modality. *Studia Logica* 27: 7-41.

[7] Suszko, R. and Bloom, S. L. 1971. Semantics for sentential calculi with identity. *Studia Logica* 28: 77-82.

[8] 鞠实儿. 开放类逻辑的的哲学基础——一种非规范三值内涵语义理论. *中国社会科学*. 2004(4): 64-74.