

研究报告 2005*

李小五

(中山大学逻辑与认知研究所, 中山大学哲学系, 广东 广州 510275)

内容提要: 我们建立若干逻辑分别刻画下列概念: 溯因条件句; 通过活动否定、普遍活动可能性、知道活动弱优越关系、知道主体、相信主体、知道个体、通过活动知道命题、动态认知过程、活动后果。

关键词: 溯因条件句; 通过活动否定; 普遍活动可能性; 知道活动弱优越关系; 知道主体; 相信主体; 知道个体; 通过活动知道命题; 动态认知过程; 活动后果

中图分类号: B81 **文献标识码:** A

一、溯因条件句

为了简单, 本节只考虑单主体的情况。以后我们另行撰文把这里结果推广到多主体逻辑。

溯因条件句的最基本的想法是由结果溯求原因: 某主体已知结果 E , 再加上他与之相关的认知内容 (与之相关的知识背景和其他东西), 断定 C 是 E 的原因。由果溯因是人们常识思维与科学研究中的一种重要的认知活动。夸张一点说, 我们每天都要频繁进行由果溯因的认知活动。

1. 形式系统及其证明论

1.1.1 定义 令 $At = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$ 是可数个原子公式的集合。我们总用 p 表示 At 中元素。

在经典句子语言中引入 3 个一元认知模态算子 P, R, F 。本节我们总用 A, B, C 和 E (加或不加下标) 表示公式, 其形成规则为: $p \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid PA \mid RA \mid FA$ 。

所有公式的集合记为 $Form$ 。另外引入缩写定义

$$(E \mapsto C) =_{df} PE \wedge R(C \rightarrow E) \wedge F(C \rightarrow E), \quad \text{其中 } E \text{ 和 } C \text{ 不含 } \mapsto, \neg$$

说明: PA 的直观意义是: 主体认为 A 是他现在感知到的命题。这样的 A 类似我们所谓的感性认识 (perception (感知), learning (获悉), awareness (觉察)), 即 A 是表述主体现实感受到的东西的命题。 RA 的直观意义是: 主体认为 A 是过去一直对他呈现规律性的命题。这样的 A 类似我们所谓的理性认识。 FA 的直观意义是: 主体相信 A 是将来对他呈现规律性的命题。这样的 A 类似所谓的信念 (faith), 即 A 是表述主体相信将来总出现的东西的命题。这种相信是一种预期性的信念。这样, PE 表示主体关于结果 E 的现实认知, 而 $R(C \rightarrow E) \wedge F(C \rightarrow E)$ 表示主体关于相关 E 的知识背景和其他东西。

根据 $E \mapsto C$ 的缩写定义, 我们认为 $E \mapsto C$ 描述了下列直观意义:

主体由结果 E 回溯断定 C 是 E 的原因。

由于上述理由, 我们称形如 $E \mapsto C$ 的公式为由果溯因的条件句, 简称为溯因条件句。

举例: 今晨我醒来, 看到窗外操场是湿的, 于是我溯因断定昨夜下了不小的雨 (虽然昨夜我不知道此事), 因为以前我每次发现下了不小的雨后操场是湿的, 而且我相信将来每次下了不小的雨后操场是湿的。

收稿日期: 2005-9-10

基金项目: 本文得到教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目 (04JZD0006) 资助和教育部基地重大项目《归纳逻辑及其应用》(项目编号 05JJD720.40001) 资助。

作者简介: 李小五 (1955-), 男, 河北人, 中山大学教授, 博导, 北京书生公司书生研究中心客座研究员。

通过这样的溯因推断,我认为我得到已知结果的原因。显然,这样的溯因推断是主观的,即在认知层次上进行。因为今晨操场湿这一结果很可能由其他原因造成。在我们看来,主体溯求得到的东西不见得是造成结果的客观原因(若有的话),尽管他自己认为如此。

我们注意到,不像一般的嵌套因果条件句,嵌套溯因条件句的直观意义并不清楚。因为我们很难说清 $A \mapsto (B \mapsto C)$ 和 $(A \mapsto B) \mapsto C$ 的直观意义。这里有一系列问题。相对前者, $(B \mapsto C) \rightarrow A$ 如何是过去一直或将来对主体呈现规律性的命题? 相对后者,主体如何感知 $A \mapsto B$? 如此等等。在我们看来,由果溯因更具有活动的含义。¹ 所以我们在下面不考虑嵌套的溯因条件句。

通过 1.1.1 的缩写定义,我们初步揭示了一个溯因条件句的内部结构。

后面我们总用 C (加或不加下标) 直观表示原因,用 E (加或不加下标) 直观表示结果。

1.1.2 规定与缩写 联结符 $\vee, \rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 定义如通常。省略括号的法则如通常。为了方便,我们规定联结符的结合力从左到右依次减弱: $\neg, P, R, F, \wedge, \vee, \mapsto, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。

T 定义为 $p_1 \vee \neg p_1$, $\perp$ 定义为 $\neg T$ 。我们用 $\Leftrightarrow$ 表示“当且仅当”,用 $\Rightarrow$ 表示“若..., 则...”,用 $\sim$ 表示“并非”。以后若不特别提到,总用 O 表示认知算子 R, P 和 F 中的任何一个:

$$O \in \{P, R, F\}. \perp$$

下面我们给出一个刻画溯因条件句的系统 **BTC1**。为了简单,我们给出的系统比较小,保留继续扩充的余地。

1.1.3 定义 溯因条件句系统 BTC1 定义如下:

(TA) 所有重言式的代入特例,

(OC) $OA \wedge OB \rightarrow O(A \wedge B)$,

(NOF) $\neg O \perp$,

(RT) $RA \rightarrow A$,

(FN) FT 。

(MP) $A, A \rightarrow B / B$,

(ROM) $A_0 \rightarrow A / OA_0 \rightarrow OA$ 。 $\perp$

说明: (1) 由 TA 和 MP 构成的系统称为经典句子系统,记为 **PC**。我们也用 **PC**₀ 表示用不含 P, R 和 F 的语言表述的 **PC**。

(2) 如上规定, $OA \wedge OB \rightarrow O(A \wedge B)$ 实际是下面 3 条模式的综述:

$$PA \wedge PB \rightarrow P(A \wedge B), \quad RA \wedge RB \rightarrow R(A \wedge B), \quad FA \wedge FB \rightarrow F(A \wedge B).$$

其他关于 O 的公理和规则也如此理解。

(3) 上述 TA 以外的公理称为 **BTC1** 的特征公理, ROM 称为 **BTC1** 的特征规则。这样称谓是因为我们在后面将看到,需要一定的语义条件才能保证特征公理有效,才能保证特征规则保持有效。

1.1.4 定义 我们用 $\vdash A$ 表示 A 是 **BTC1** 的内定理: A 在 **BTC1** 中有一形式证明。**BTC1** 的全体内定理的集合记为 $\text{Th}(\text{BTC1})$ 。我们也用 $\nvdash A$ 表示 $A \notin \text{Th}(\text{BTC1})$ 。 $\perp$

1.1.5 引理 下面是 **BTC1** 的内定理和导出规则:

- (1) $O(A \wedge B) \leftrightarrow OA \wedge OB$ 。 (2) $O(A \rightarrow B) \rightarrow (OA \rightarrow OB)$ 。
- (3) $A_0 \leftrightarrow A / OA_0 \leftrightarrow OA$ 。 (4) A / FA 。 (全信规则)
- (5) $FA \rightarrow \neg F \neg A$ 。 (6) $(E \mapsto C) \leftrightarrow PE \wedge R(C \rightarrow E) \wedge F(C \rightarrow E)$ 。
- (7) $E_0 \leftrightarrow E / E_0 \mapsto C \leftrightarrow E \mapsto C$ 。 (8) $C_0 \leftrightarrow C / E \mapsto C_0 \leftrightarrow E \mapsto C$ 。
- (9) $(E_1 \mapsto C) \wedge (E_2 \mapsto C) \leftrightarrow E_1 \wedge E_2 \mapsto C$ 。 (结果合取律)
- (10) $(E \mapsto C_1) \wedge (E \mapsto C_2) \rightarrow E \mapsto C_1 \vee C_2$ 。 (原因析取律)
- (11) $(E \mapsto C) \wedge C \rightarrow E$ 。 (12) $\neg(\perp \mapsto C)$ 。

¹ 本节第 2 部分引入的实验溯因条件句逻辑就是一种动态溯因条件句逻辑。

(13) $(A \mapsto B) \wedge (B \mapsto C) \rightarrow A \mapsto C$ 。 (溯因传递律)

证明：我们只给出形式证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。

(1) 据 TA 和 ROM, 有 $O(A \wedge B) \rightarrow OA \wedge OB$ 。再据 OC。

- (2) ① $O((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow OB$ TA, ROM
 ② $O(A \rightarrow B) \wedge OA \rightarrow OB$ ①, (1)
 ③ $O(A \rightarrow B) \rightarrow (OA \rightarrow OB)$ ②

(3) 据 ROM。

- (4) ① A 假设
 ② $T \rightarrow A$ ①
 ③ $FT \rightarrow FA$ ②, ROM
 ④ FA。 ③, FN

- (5) ① $F(A \wedge \neg A) \rightarrow F\perp$ TA, ROM
 ② $FA \wedge F\neg A \rightarrow F\perp$ ①, (1)
 ③ $\neg F\perp \rightarrow (FA \rightarrow \neg F\neg A)$ ②
 ④ $FA \rightarrow \neg F\neg A$ 。 ③, NOF

(6) 据缩写定义 1.1.1 (5)。

- (7) ① $E_0 \leftrightarrow E$ 假设
 ② $(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow (C \rightarrow E)$ ①
 ③ $R(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow R(C \rightarrow E)$ ②, (3)
 ④ $PE_0 \leftrightarrow PE$ ①, (3)
 ⑤ $F(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow F(C \rightarrow E)$ ②, (3)
 ⑥ $PE_0 \wedge R(C \rightarrow E_0) \wedge F(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow PE \wedge R(C \rightarrow E) \wedge F(C \rightarrow E)$ ④, ③, ⑤
 ⑦ $E_0 \mapsto C \leftrightarrow E \mapsto C$ 。 ⑥, (6)

(8) 本证明类似 (7) 的证明。

(9)

- ① $(E_1 \mapsto C) \wedge (E_2 \mapsto C) \leftrightarrow PE_1 \wedge R(C \rightarrow E_1) \wedge F(C \rightarrow E_1) \wedge PE_2 \wedge R(C \rightarrow E_2) \wedge F(C \rightarrow E_2)$ (6)
 ② $(E_1 \mapsto C) \wedge (E_2 \mapsto C) \leftrightarrow P(E_1 \wedge E_2) \wedge R((C \rightarrow E_1) \wedge (C \rightarrow E_2)) \wedge F((C \rightarrow E_1) \wedge (C \rightarrow E_2))$ ①, (1)
 ③ $(E_1 \mapsto C) \wedge (E_2 \mapsto C) \leftrightarrow P(E_1 \wedge E_2) \wedge R(C \rightarrow E_1 \wedge E_2) \wedge F(C \rightarrow E_1 \wedge E_2)$ ②, (3)
 ④ $(E_1 \mapsto C) \wedge (E_2 \mapsto C) \leftrightarrow (E_1 \wedge E_2 \mapsto C)$ 。 ③, (6)

(10) ① $O(C_1 \rightarrow E) \wedge O(C_2 \rightarrow E) \rightarrow O(C_1 \vee C_2 \rightarrow E)$ TA, ROM, (1)

- ② $PE \wedge R(C_1 \rightarrow E) \wedge F(C_1 \rightarrow E) \wedge PE \wedge R(C_2 \rightarrow E) \wedge F(C_2 \rightarrow E)$
 $\rightarrow PE \wedge R(C_1 \vee C_2 \rightarrow E) \wedge F(C_1 \vee C_2 \rightarrow E)$ ①
 ③ $(E \mapsto C_1) \wedge (E \mapsto C_2) \rightarrow (E \mapsto C_1 \vee C_2)$ 。 ②

- (11) ① $E \mapsto C \rightarrow R(C \rightarrow E)$ TA, 缩写定义
 ② $E \mapsto C \rightarrow (C \rightarrow E)$ ①, RT
 ③ $(E \mapsto C) \wedge C \rightarrow E$ 。 ②

- (12) ① $\perp \mapsto C \rightarrow P\perp$ TA
 ② $\neg(\perp \mapsto C)$ ①, NOF

(13)

- ① $R(B \rightarrow A) \wedge R(C \rightarrow B) \rightarrow R(C \rightarrow A)$ TA, ROM, (1)
 ② $F(B \rightarrow A) \wedge F(C \rightarrow B) \rightarrow F(C \rightarrow A)$ TA, ROM, (1)
 ③ $PA \wedge R(B \rightarrow A) \wedge F(B \rightarrow A) \wedge PB \wedge R(C \rightarrow B) \wedge F(C \rightarrow B) \rightarrow PA \wedge R(C \rightarrow A) \wedge F(C \rightarrow A)$ ①, ②
 ④ $(A \mapsto B) \wedge (B \mapsto C) \rightarrow A \mapsto C$ 。 ③ $\vdash$

说明：如果我们把 P, R, F 分别看作是必然算子□, 则易见上述系统中

关于算子 P 的公理和规则构成的系统是模态系统 $R + \neg \Box \perp$,

关于算子 R 的公理和规则构成的系统是模态系统 $R + \neg \Box \perp + T$,

关于算子 F 的公理和规则构成的系统是模态系统 D 。²

另外, 溯因传递律是否自然。这可以讨论。以后我们还要回到这个问题上来。

下面我们研究 $BTC1$ 与 PC_0 的关系。我们要证明前者可以协调地退化为后者。

1.1.6 定义 (1) 定义从 $Form$ 到不含 P , R 和 F 的 $Form_0 \subseteq Form$ 的翻译映射 t 如下:

$$t(p) = p, \quad \text{对所有 } p \in At, ;$$

$$t(\neg A) = \neg t(A); \quad t(A \wedge B) = t(A) \wedge t(B); \quad t(OA) = t(A).$$

(2) 对每一公式 $A \in Form$, 我们称 $t(A)$ 是 A 的 t -翻译。 $\dashv$

说明: 据上面的定义, 易证

$$t(A \vee B) = t(A) \vee t(B), \quad t(A \rightarrow B) = t(A) \rightarrow t(B), \quad t(A \leftrightarrow B) = t(A) \leftrightarrow t(B).$$

1.1.7 定义 令 S 和 T 是任意两个公理化系统。

我们称 S 能 t -退化为 T , 当且仅当 S 的所有内定理的 t -翻译是 T 的内定理。 $\dashv$

1.1.8 定理 $BTC1$ 能 t -退化为 PC_0 。

证明: 据 t -翻译的定义显然。 $\dashv$

1.1.9 定义 称系统 S 是协调系统, 当且仅当不存在 A 使 A 和 $\neg A$ 都是 S 的内定理。 $\dashv$

1.1.10 定理 $BTC1$ 是协调的。

证明: 假设 $BTC1$ 不协调, 则存在 A 使得 A 和 $\neg A$ 都是 $BTC1$ 的内定理。据上面的定理, $t(A)$ 和 $\neg t(A)$ 都是 PC_0 的内定理, 矛盾于 PC_0 的协调性。 $\dashv$

1.1.11 例 令 e 是一个原子公式 (直观上表示一个结果)。则

$$e \mapsto e =_{df} P e \wedge R(e \rightarrow e) \wedge F(e \rightarrow e)$$

的 t -翻译不是 PC_0 的内定理, 据 1.1.8, 易见 $e \mapsto e$ 不是 $BTC1$ 的内定理。 $\dashv$

说明: 这个结果是我们想要的, 因为根据结果 e , 主体溯求 e 是 e 的原因毫无意义!

1.1.12 例 令 p, q 和 r 是 3 个原子公式。(1) 易见

$$p \mapsto q \rightarrow p \wedge r \mapsto q =_{df} P p \wedge R(q \rightarrow p) \wedge F(q \rightarrow p) \rightarrow P(p \wedge r) \wedge R(q \rightarrow p \wedge r) \wedge F(q \rightarrow p \wedge r)$$

的 t -翻译 $p \wedge (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow p \wedge r \wedge (q \rightarrow p \wedge r) \wedge (q \rightarrow p \wedge r)$ 不是 PC_0 的内定理, 据 1.1.8, $p \mapsto q \rightarrow p \wedge r \mapsto q$ 不是 $BTC1$ 的内定理。

(2) 易见

$$p \mapsto q \rightarrow \neg q \mapsto \neg p =_{df} P p \wedge R(q \rightarrow p) \wedge F(q \rightarrow p) \rightarrow P \neg q \wedge R(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge F(\neg p \rightarrow \neg q)$$

的 t -翻译 $p \wedge (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow \neg q \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$ 不是 PC_0 的内定理, 据 1.1.8, $p \mapsto q \rightarrow \neg q \mapsto \neg p$ 不是 $BTC1$ 的内定理。

我们甚至能看到, 连 $p \mapsto p \rightarrow \neg p \mapsto \neg p$ 也不是 $BTC1$ 的内定理。

(3) 易见 $\perp \mapsto \perp =_{df} P \perp \wedge R(\perp \rightarrow \perp) \wedge F(\perp \rightarrow \perp)$ 的 t -翻译 $\perp \wedge (\perp \rightarrow \perp) \wedge (\perp \rightarrow \perp)$ 不是 PC_0 的内定理, 据 1.1.8, $\perp \mapsto \perp$ 不是 $BTC1$ 的内定理。 $\dashv$

说明: 这些结果都是我们想要的, 特别是 (1)。由 (1) 可见, 溯因条件句有某种非单调性。事实上也是如此。今晨我看到窗外操场是湿的, 从而溯因断定昨夜下了不小的雨。但这并不蕴涵: 今晨我看到窗外操场是湿的且操场水管爆裂, 从而溯因断定昨夜下了不小的雨。

从上面的例子, 我们可以看到, $E \mapsto C$ 的逻辑性质不同于 $C \rightarrow E$ 的逻辑性质的主要原因在于 $E \mapsto C$ 的 PE -部分。它调控某些公式成为 $BTC1$ 的非内定理。而把这些非内定理中形如 $A \mapsto B$ 的子公式置换为 $B \rightarrow A$ 得到的公式可以是内定理!

后面我们还要证明, 连 $T \mapsto T$ 也不是 $BTC1$ 的内定理。

2. 邻域语义和可靠性定理

2.1 定义 任给集合 X , 本文我们用 $P(X)$ 表示 X 的幂集。

² R 和 D 指模态逻辑的相应系统, T 指模态逻辑的相应公理。参见后面的参考文献 [2]。

称 $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 是邻域框架, 简称 F 是 **N**-框架, 当且仅当 W 是非空集, 邻域映射 P, R 和 F 都是从 W 到 $P(P(W))$ 中的映射。

称 $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 是邻域模型, 简称 M 是 **N**-模型, 当且仅当 $\langle W, P, R, F \rangle$ 是 **N**-框架且 $[]$ 是从全体原子公式 At 到 $P(W)$ 的指派映射。 $[]$ 也称为框架 $\langle W, P, R, F \rangle$ 上的指派映射。

以后若不特别提到, 总用斜体 O 表示 P, R 和 F 中的任何一个: $O \in \{P, R, F\}$ 。 $\dashv$

1.2.2 定义 真值集定义 令 $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 是 **N**-模型。对每一复合公式 A , 定义 A 相对 M 的真值集 $[A]$ 如下: 对任意 $w \in W$,

- (1) $w \in [\neg A] \Leftrightarrow w \notin [A]$, (2) $w \in [A \wedge B] \Leftrightarrow w \in [A] \text{ 且 } w \in [B]$,
(3) $w \in [OA] \Leftrightarrow [A] \in O(w)$ 。 $\dashv$

说明: 易见邻域映射 P 对应算子 P , R 对应算子 R , F 对应算子 F 。

1.2.3 定义 称 $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 是刻画溯因条件句的框架, 简称 F 是 **btc1**-框架, 记作 $F \in \text{Frame}(\text{btc1})$, 当且仅当下列框架条件成立: 对任意 $w \in W$ 和 $X, Y \subseteq W$,

- (oc) $X, Y \in O(w) \Rightarrow X \cap Y \in O(w)$,
(nof) $\emptyset \notin O(w)$, (rt) $X \in R(w) \Rightarrow w \in X$,
(fn) $W \in F(w)$, (rom) $X \in O(w) \text{ 且 } X \subseteq Y \Rightarrow Y \in O(w)$ 。 $\dashv$

1.2.4 定义 有效性定义 令 $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 是 **N**-框架, $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 是 **N**-模型。

称 A 在 M 中有效, 记为 $M \models A$, 当且仅当 $[A] = W$; 否则称 A 在 M 中不有效, 记为 $M \not\models A$ 。称 A 在 F 中有效, 记为 $F \models A$, 当且仅当, 对 F 上的任意指派映射 $[]$, 有 $[A] = W$; 否则称 A 在 F 中不有效, 记为 $F \not\models A$ 。称规则 $A_1, \dots, A_n / C$ 相对 M 保持有效性, 当且仅当, 若 $[A_1] = \dots = [A_n] = W$, 则 $[C] = W$ 。 $\dashv$

1.2.5 引理 令 $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 是 **N**-模型。则

- (1) $[\neg A] = W - [A]$, $[A \wedge B] = [A] \cap [B]$, $[A \vee B] = [A] \cup [B]$, $[\perp] = \emptyset$, $[T] = W$ 。
(2) $[A] \cap [A \rightarrow B] \subseteq [B]$ 。
(3) $[A \rightarrow B] = W \Leftrightarrow [A] \subseteq [B]$ 。 (4) $[A \leftrightarrow B] = W \Leftrightarrow [A] = [B]$ 。 $\dashv$

1.2.6 定义 称系统 **S** 相对框架类 **C** 是框架可靠系统, 当且仅当, **S** 的内定理在 **C** 的所有框架中有效。称系统 **S** 相对框架类 **C** 是框架完全系统, 当且仅当, 在 **C** 的所有框架中有有效的公式是 **S** 的内定理。 $\dashv$

1.2.7 框架可靠性定理 **BTC1** 相对 $\text{Frame}(\text{btc1})$ 是可靠的。

证明: 任给 **btc1**-框架 $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 和 F 上赋值 $[]$ 。

下面验证 **BTC1** 的公理相对 $M = \langle F, [] \rangle$ 有效且 **BTC1** 的推理规则相对 M 保持有效性。

验证公理 **TA**: 参见后面 6.2.11 的相关证明。

验证规则 **MP**: 显然。

验证公理 **OC**: 任给 $w \in [OA \wedge OB]$ 。据 1.2.2 (2) - (3), 有 $[A], [B] \in O(w)$, 据 1.2.3 的 (oc), 有 $[A] \cap [B] \in O(w)$, 再据引理 1.2.5 (1), 有 $[A \wedge B] \in O(w)$, 所以 $w \in [O(A \wedge B)]$ 。

据 w 的任意性, 有 $[OA \wedge OB] \subseteq [O(A \wedge B)]$, 再据 1.2.5 (3), 有 $[OA \wedge OB \rightarrow O(A \wedge B)] = W$ 。

验证公理 **NOF**: 任给 $w \in W$, 据 1.2.3 的 (nof), 有 $\emptyset \notin O(w)$ 。据 1.2.5, 有 $[\perp] = \emptyset$, 再据 1.2.2 (1), 有 $w \in [\neg O\perp]$ 。

验证公理 **RT**: 任给 $w \in [RA]$ 。则 $[A] \in R(w)$, 据 1.2.3 的 (rt), 有 $w \in [A]$ 。

验证公理 **FN**: 任给 $w \in W$, 据 1.2.3 的 (fn), 有 $W \in F(w)$ 。据 1.2.5, 有 $[T] = W$, 因此 $w \in [FT]$ 。

验证规则 **ROM**: 设 $[A_0 \rightarrow A] = W$ 。据 1.2.5 (3), 有

(#) $[A_0] \subseteq [A]$ 。

任给 $w \in W$, 我们有

$$\begin{aligned} w \in [OA_0] &\Leftrightarrow [A_0] \in O(w) && \text{据真值集定义 1.2.2} \\ &\Rightarrow [A] \in O(w) && \text{据 (＃) 和 1.2.3 的(rom)} \\ &\Leftrightarrow w \in [OA]. && \text{据真值集定义 1.2.2} \end{aligned}$$

因此据 w 的任意性, 有 $[OA_0] \subseteq [OA]$, 据 1.2.5 (3), 我们有 $[OA_0 \rightarrow OA] = W$ 。┐

1.2.8 例 令 $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 满足下列条件:

- (1) $W = \{w\}$, (2) $P(w) = F(w) = \{W\}$, (3) $R(w) = \emptyset$ 。

易见 $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 满足 1.2.3 的框架条件, 所以是 **btc1**-框架。据上一定理, 有

- (4) **BTC1** 的内定理在 F 中有效。

易见 RT 不在 F 中有效, 所以

- (5) $T \mapsto T$ 也不在 F 中有效。

再据 (4), 易见

- (6) $T \mapsto T$ 不是 **BTC1** 的内定理。

另一方面, $T \wedge T$ 在 F 中有效, 所以据 (5),

- (7) $T \wedge T \rightarrow T \mapsto T$ 不在 F 中有效。

再据 (4), 易见

- (8) $T \wedge T \rightarrow T \mapsto T$ 不是 **BTC1** 的内定理。┐

说明: (6) 说明: 即使重言式作为一个结果, 溯求它是自身的原因也无意义。

据 (8), $T \wedge T \rightarrow T \mapsto T$ 不是 **BTC1** 的内定理, 从而 $A \wedge B \rightarrow A \mapsto B$ 不是 **BTC1** 的内定理。这也是我们想要的结果: 智能主体在认知层面上 (主观上), 发现不是任何两个事件 (真命题) 都有因果关系。

3. 完全性定理

1.3.1 定义 令 w 是公式集。

- (1) 称 w 是一致集, 当且仅当对所有有穷公式序列 $A_1, \dots, A_n \in w$, 有 $\not\vdash \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ 。
 (2) 称 w 是极大集, 当且仅当对所有 $A \in \text{Form}$, $A \in w$ 或 $\neg A \in w$ 。
 (3) 称 w 是极大一致集, 当且仅当 w 既是一致的又是极大的。
 (4) 称 **BTC1** 是一致系统, 当且仅当 $\text{Th}(\text{BTC1})$ 是一致的。┐

1.3.2 引理 **BTC1** 是一致的。

证明: 假设 **BTC1** 不一致。则 $\text{Th}(\text{BTC1})$ 不一致, 所以存在 $A_1, \dots, A_n \in \text{Th}(\text{BTC1})$ 使得 $\vdash \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ 。

另一方面, 因为 $A_1, \dots, A_n \in \text{Th}(\text{BTC1})$, 所以易证 $\vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ 。据定义 1.1.9, **BTC1** 不协调, 矛盾于定理 1.1.10。┐

因为 **BTC1** 是 **PC** 的扩充, 所以如通常证明, 我们有下列结果。

1.3.3 引理 (1) 令 w 是极大一致集。则 $\neg A \in w \Leftrightarrow A \notin w$,

$$A \wedge B \in w \Leftrightarrow A \in w \text{ 且 } B \in w, \quad A \vee B \in w \Leftrightarrow A \in w \text{ 或 } B \in w,$$

$$A \in w \text{ 且 } \vdash A \rightarrow B \Rightarrow B \in w, \quad A \in w \text{ 且 } A \rightarrow B \in w \Rightarrow B \in w, \quad \text{Th}(\text{BTC1}) \subseteq w.$$

- (2) 若 $\not\vdash A$, 则存在极大一致集 u 使得 $A \notin u$ 。┐

1.3.4 定义 $|A| =_{\text{df}} \{w: w \text{ 是极大一致集使得 } A \in w\}$ 。┐

1.3.5 引理 令 W 是所有极大一致集的集合。

- (1) $| \neg A | = W - |A|$, $|A \wedge B| = |A| \cap |B|$, $|A \vee B| = |A| \cup |B|$, $| \perp | = \emptyset$, $|T| = W$ 。

- (2) $|A| \cap |A \rightarrow B| \subseteq |B|$ 。 (3) $|A \rightarrow B| = W \Leftrightarrow |A| \subseteq |B| \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B$ 。

- (4) $|A \leftrightarrow B| = W \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow \vdash A \leftrightarrow B$ 。

证明: 据上一引理易证。┐

1.3.6 定义 (1) 定义 **BTC1** 的典范框架 $N = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 如下:

- ① $W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}$;

② O 是从 W 到 $P(P(W))$ 中的映射使得

$$|A| \in O(w) \Leftrightarrow OA \in w, \quad \text{对任意 } w \in W \text{ 和公式 } A;$$

(2) 定义 **BTC1** 的典范模型 $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 如下: $\langle W, P, R, F \rangle$ 是 **BTC1** 的典范框架, 且③ $[p] = |p|$, 对每一原子公式 p 。 $\dashv$

说明: 据引理 1.3.2, **BTC1** 是一致的, 所以 W 非空, 因此典范框架是良定义的。

1.3.7 定理 典范模型基本定理 令 $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 是 **BTC1** 的典范模型。

(1) $A \in w \Leftrightarrow w \in [A]$, 对每一 $w \in W$ 和公式 A 。

(2) $|A| = [A]$, 对每一公式 A 。

证明: (2) 从 (1) 易得。所以我们只须证 (1)。施归纳于 A 的结构。

原子公式的情况据上一定义的③。布尔联结词 $\neg$ 和 $\wedge$ 的情况如通常所证。

令 $A = OB$ 。所以

$$\begin{aligned} w \in [A] &\Leftrightarrow w \in [OB] \\ &\Leftrightarrow [B] \in O(w) && \text{据 1.2.2 的 (3)} \\ &\Leftrightarrow |B| \in O(w) && \text{据归纳假设} \\ &\Leftrightarrow OB \in w && \text{据上一定义的②} \\ &\Leftrightarrow A \in w. \dashv \end{aligned}$$

1.3.8 定理 令 M 是 **BTC1** 的典范模型。则对每一公式 A , 我们有 $M \models A \Leftrightarrow \vdash A$ 。

证明: $\vdash A \Leftrightarrow |A| = W$ 据引理 1.3.3

$$\Leftrightarrow [A] = W \quad \text{据上一定理}$$

$$\Leftrightarrow M \models A \quad \text{据有效性定义 1.2.4.} \dashv$$

1.3.9 定义 (1) 定义 **BTC1** 的适当结构(proper structure) $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 如下:

① $W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\};$

② $O(w) = \{X \subseteq W: \text{存在 } OA \in w \text{ 使得 } |A| \subseteq X\},$ 对每一 $w \in W;$

③ $[p] = |p|$, 对每一原子公式 p 。

(2) $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 称为 **BTC1** 的适当框架。 $\dashv$

1.3.10 引理 令 $M = \langle W, P, R, F, [] \rangle$ 是 **BTC1** 的适当结构。则 M 是 **BTC1** 的典范模型。

证明: 据定义 1.3.6, 只须证: 对任意 $w \in W$ 和公式 A ,

(1) $|A| \in O(w) \Leftrightarrow OA \in w$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $OA \in w$ 。因为 $|A| \subseteq |A|$, 所以据 $O(w)$ 的构造, 有 $|A| \in O(w)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $|A| \in O(w)$ 。因为等价类的代表元不是惟一的, 所以据 $O(w)$ 的构造,

(2) 存在 $OA_0 \in w$ 使得 $|A_0| \subseteq |A|$ 。

因为 $|A_0| \subseteq |A|$, 所以据引理 1.3.5 (3), 有 $\vdash A_0 \rightarrow A$, 据 ROM, 有 $\vdash OA_0 \rightarrow OA$ 。因为 $OA_0 \in w$, 所以据引理 1.3.3, 有 $OA \in w$ 。 $\dashv$

1.3.11 引理 令 $F = \langle W, P, R, F \rangle$ 是 **BTC1** 的适当框架。则 F 是 **btc1**-框架。

证明: 下面我们来验证 F 满足定义 1.2.3 给出的框架条件。

验证(oc)。任给 $X, Y \in O(w)$ 。则

(1) 存在 $OA \in w$ 使得 $|A| \subseteq X$, 且 (2) 存在 $OB \in w$ 使得 $|B| \subseteq Y$ 。

再据公理 OC 和 1.3.5 (1) 以及集合论的基本知识, 易见

(3) 存在 $O(A \wedge B) \in w$ 使得 $|A \wedge B| \subseteq X \cap Y$ 。

所以 $X \cap Y \in O(w)$ 。

验证(nof)。任给 $w \in W$ 。据公理 NOF, 有 $\neg O \perp \in w$, 所以据 1.3.3, 有

(1) $O \perp \notin w$ 。

假设 $\emptyset \in O(w)$ 。则据 $O(w)$ 的构造, 有

(2) 存在 $OA \in w$ 使得 $|A| \subseteq \emptyset$ 。

故 $|A|=\emptyset$ ，因此据 1.3.5 (1)，有 $|A|=|\perp|$ ，再据 1.3.5 (4)，有 $\vdash A\leftrightarrow\perp$ ，再据 1.1.5 (3)，有 $\vdash OA\leftrightarrow O\perp$ ，再据 (2) 和 1.3.3，易见 $O\perp\in w$ 。矛盾于 (1)。这样，我们证明了 $\emptyset\notin O(w)$ 。

验证(rt)。设 $X\in R(w)$ 。则

(1) 存在 $RA\in w$ 使得 $|A|\subseteq X$ 。

再据公理 RT，有 $A\in w$ ，所以 $w\in|A|$ 。因为 $|A|\subseteq X$ ，所以 $w\in X$ 。

验证(fn)。任给 $w\in W$ 。据公理 FN，有 $FT\in w$ ，所以据 1.3.10 证明中的 (1)，有 $|T|\in F(w)$ 。因此据 1.3.5 (1)，易见 $W\in F(w)$ 。

验证(rom)。设 $X\in O(w)$ 且 $X\subseteq Y$ 。据前者，有

(1) 存在 $OA\in w$ 使得 $|A|\subseteq X$ 。

再据 $X\subseteq Y$ ，有

(2) 存在 $OA\in w$ 使得 $|A|\subseteq Y$ 。

所以 $Y\in O(w)$ 。 $\dashv$

1.3.12 框架完全性定理 **BTC1** 相对 **Frame(btc1)** 是完全的。

证明：只须证：

(%) 若 A 不是 **BTC1** 的内定理，则 A 在某个 **btc1**-框架中不有效。

令 $M=\langle W, P, R, F, [] \rangle$ 是 **BTC1** 的适当结构。据引理 1.3.10， M 是 **BTC1** 的典范模型。因为 $F=\langle W, P, R, F \rangle$ 是 **BTC1** 的适当框架，所以据上一引理， F 是 **btc1**-框架。

设 A 不是 **BTC1** 的内定理。据定理 1.3.8，有 $M \models A$ ，所以 $F \models A$ 。 $\dashv$

我们下一步要考虑的问题：

1、更精细地分析映射 P, R 和 F 的机制，特别是动态机制。例如，映射 F 没有反映主体相对新知识或新证据如何进行信念修正，即使这样的信念是一种预期性的信念。

2、我们可以弱化 $E \mapsto C$ 的缩写定义： $(E \mapsto_w C) =_{df} R(C \rightarrow E) \wedge PE$ 。由此我们可以考虑相应的弱化系统。

3、如果要扩充现有的系统，下面两组公理可以考虑：

① **RT**。(对应的框架条件是 $W \in R(w)$ 。)

刻画高智能主体的系统应该接受 **RT**。但若接受 **RT**，也就接受规则 **(RRN)** $A \diagup RA$ 。而一般认为这个规则太强了，会导致逻辑全知 (logical omniscience)。

易见若我们把 R 看作是必然算子，则增加 **RT**后，上述系统关于算子 R 的公理和规则构成的系统是模态系统 **T**。

② 反思性公理，即认知算子叠加的公理。

这样的公理有：令 $O \in \{R, F\}$ ，且令 $O \in \{R, F\}$ 。

(正反思公理) $OA \rightarrow OOA$,

(负反思公理) $\neg OA \rightarrow O\neg OA$ 。

这两条公理对应的框架条件是

$X \in O(w) \Rightarrow \{u \in W : X \in O(u)\} \in O(w)$, $X \notin O(w) \Rightarrow \{u \in W : X \notin O(u)\} \in O(w)$ 。

4、把上述结果推广到相应的多主体逻辑。

5、据 1.1.5 (13)，我们的系统有溯因传递律。注意：溯因传递律不是一般意义上的因果传递律。后者并不自然，尤其当因果链变得足够长时。我们认为溯因传递律由于描述主体认知状态应该更自然一些，特别是对某类特定的主体。例如，对认知目的比较简单的主体。

据 1.1.5 (13) 的证明，在我们的系统中，溯因传递性来自实质蕴涵的传递性。若不要溯因传递性，一个简单的改进方案是把关于算子 O 的单调规则 **ROM** (中的一部分) 改成等价规则，就像我们下面的逻辑所做的那样。

6、在形式语言中把 $\mapsto$ 作为初始符号引入，以代替 3 个一元认知模态算子 P, R, F ，从而把 1.1.1 (3) 的形成规则改成：

$p \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (E \mapsto C)$, 其中 E 和 C 不含 $\mapsto$ 。

真值集定义的 1.2.2 (3) 改成:

(3) $w \in [E \mapsto C] \Leftrightarrow [E] \in P(w) \text{ 且 } [C \rightarrow E] \in R(w) \cap F(w)$ 。

1.1.3 给出的形式系统 **BTC1** 也要进行相应的修改: 在 **PC** 上增加直接刻画 $\mapsto$ 的公理和规则。例如, 增加 1.1.5 (7) — (13) 中的一些作为公理和规则。我们认为, 这样构成的逻辑本质上与上面我们提出的逻辑相同, 只是形式上要更简洁一些。

二、实验溯因条件句

实验溯因条件句的直观意义是由结果通过实验溯求原因: 某主体已知结果 E , 然后猜测 C 是造成 E 的原因, 最后通过做实验得知 C 就是 E 的原因。由结果通过实验溯求原因是经验科学研究中的一种重要的认知活动。

本小节许多内容同于上一小节, 所以下面我们只提到不同的内容。

2.1.1 定义 令 $\text{Act} = \{a_1, \dots, a_m, \dots\}$ 是实验活动的集合。我们总用 a 表示 Act 中的元素。

在经典句子语言中引入 3 个一元认知模态算子 P, G, K 和实验活动算子集 $\{[a]: a \in \text{Act}\}$ 。

公式的形成规则为: $p \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid PA \mid GA \mid KA \mid [a]A$ 。

另外引入缩写定义

$(E \mapsto_a C) =_{\text{df}} PE \wedge G(C \rightarrow E) \wedge [a]K(C \rightarrow E)$, 其中 E 和 C 不含 $\mapsto_b$ 使得 $b \in \text{Act}$ 。 $\perp$

说明: PA 的直观意义同于 1.1.1 后面关于 PA 的直观意义。

GA 的直观意义是: 主体猜测 (**guess**) A 为真。

$[a]A$ 的直观意义是: “(主体)做了 a 后 A 真’是必然的”(It is necessary that after (the agent) executing a , A is true.³), 或者 “任何搞活动 a 后都使 A 成立”(A holds after any execution of action a)。若 a 指称的一个实验, 则 $[a]A$ 表示做了理想实验或完备实验 a 后产生结果 A 。⁴

KA 的直观意义是: 主体知道 A 。这样的 A 类似我们所谓的知识(knowledge)。

根据 $E \mapsto_a C$ 的缩写定义, 我们认为 $E \mapsto_a C$ 描述了上面提到的直观意义:

主体由结果 E 猜测 C 是造成 E 的原因, 然后通过做实验 a 知道 C 就是 E 的原因。

我们称形如 $E \mapsto_a C$ 的公式为由结果 E 通过实验 a 溯求原因 C 的条件句, 简称为实验溯因条件句。

再举前面的例子: 今晨我看到窗外操场是湿的, 于是我猜测昨夜下了不小的雨, 最后我通过做实验 (例如人工降雨) 知道下了不小的雨是操场湿的原因。

注意: 科学家通常在科学实验中要做一系列相关实验才能由果溯因。例如, 在不同情况下进行人工降雨。这时应该把前面的缩写概括为

$(E \mapsto_{a_1 \dots a_n} C) =_{\text{df}} PE \wedge G(C \rightarrow E) \wedge [a_1] \dots [a_n]K(C \rightarrow E)$ 。

但这里我们为了简单就不这样处理了。类似前面说明, 实验溯因推断也是主观的, 即在认知层次上进行。同样, 嵌套实验溯因条件句的直观意义也不清楚, 所以我们在下面不考虑嵌套的实验溯因条件句。

2.1.2 规定与缩写 类似 1.1.2。 $\perp$

下面我们给出一个刻画实验溯因条件句的系统 **BTC2**。

2.1.3 定义 实验溯因条件句系统 **BTC2** 定义如下: TA 和 MP 如前定义,

(OC) $OA \wedge OB \rightarrow O(A \wedge B)$, 其中 $O \in \{P, G, K\} \cup \{[a]: a \in \text{Act}\}$;

(NPF) $\neg P \perp$; (NGF) $\neg G \perp$; (GD) $GA \rightarrow \neg G \neg A$;

(KT) $KA \rightarrow A$; (RGE) $A_0 \leftrightarrow A / GA_0 \leftrightarrow GA$;

(RZM) $A_0 \rightarrow A / ZA_0 \rightarrow ZA$, 其中 $Z \in \{P, K\} \cup \{[a]: a \in \text{Act}\}$ 。 $\perp$

说明: (1) 在我们看来,

³ 参见文献 [1] 的第 166 页。

⁴ 这里的理想实验和完备实验就是指有必然性的实验。

(GM) $G(A \wedge B) \rightarrow GA \wedge GB$

的直观意义也许自然，但从 RGE 和 GM 易得下列单调规则：

(RGM) $A_0 \rightarrow A / GA_0 \rightarrow GA$ 。

而对 RGM, 很容易举出直观的反例，所以这里我们不用 GM 做公理。另一方面，我们在 **BTC2** 引入的规则 RGE 要比 RGM 自然一些。大凡有点智能的主体猜测命题 A 后都应该能猜测 A 的等价命题。

(2) 上述 TA 以外的公理称为 **BTC2** 的特征公理，RZM 称为 **BTC2** 的特征规则。

(3) 如果我们把 P, G, K 分别看作是必然算子 $\Box$ ，则易见上述系统中

关于算子 P 的公理和规则构成的系统是模态系统 $R + \neg \Box \perp$ ，

关于算子 G 的公理和规则构成的系统是模态系统 $E + C + \neg \Box \perp + D$ ，

关于算子 K 的公理和规则构成的系统是模态系统 $R + T$ 。⁵

2.1.4 定义 类似 1.1.4。 $\vdash$

2.1.5 引理 下面是 **BTC2** 的内定理和导出规则：

- (1) $Z(A \wedge B) \leftrightarrow ZA \wedge ZB$, 其中 $Z \in \{P, K\} \cup \{[a]: a \in \text{Act}\}$ 。
- (2) $Z(A \rightarrow B) \rightarrow (ZA \rightarrow ZB)$, 其中 $Z \in \{P, K\} \cup \{[a]: a \in \text{Act}\}$ 。
- (3) $A_0 \leftrightarrow A / OA_0 \leftrightarrow OA$, 其中 $O \in \{P, G, K\} \cup \{[a]: a \in \text{Act}\}$ 。
- (4) $(E \vdash_a C) \leftrightarrow PE \wedge G(C \rightarrow E) \wedge [a]K(C \rightarrow E)$ 。
- (5) $E_0 \leftrightarrow E / E_0 \vdash_a C \leftrightarrow E \vdash_a C$ 。
- (6) $C_0 \leftrightarrow C / E \vdash_a C_0 \leftrightarrow E \vdash_a C$ 。
- (7) $(E_1 \vdash_a C) \wedge (E_2 \vdash_a C) \rightarrow E_1 \wedge E_2 \vdash_a C$. (结果合取律)
- (8) $(E \vdash_a C_1) \wedge (E \vdash_a C_2) \rightarrow E \vdash_a C_1 \vee C_2$. (原因析取律)
- (9) $\neg(\perp \vdash_a C)$ 。

证明：我们只给出形式证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。

(1) 和 (2) 的证明如同 1.1.5 (1) 和 (2) 的证明。

(3) 据 RZM 和 RGE. (4) 据缩写定义 2.1.1 (6)。

(5)

- | | |
|---|---------|
| ① $E_0 \leftrightarrow E$ | 假设 |
| ② $(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow (C \rightarrow E)$ | ① |
| ③ $G(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow G(C \rightarrow E)$ | ②, (3) |
| ④ $PE_0 \leftrightarrow PE$ | ①, (3) |
| ⑤ $[a]K(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow [a]K(C \rightarrow E)$ | ②, (3) |
| ⑥ $PE_0 \wedge G(C \rightarrow E_0) \wedge [a]K(C \rightarrow E_0) \leftrightarrow PE \wedge G(C \rightarrow E) \wedge [a]K(C \rightarrow E)$ | ④, ③, ⑤ |
| ⑦ $E_0 \vdash_a C \leftrightarrow E \vdash_a C$ | ⑥, (4) |

(6) 本证明类似 (5) 的证明。

(7)

- ① $(E_1 \vdash_a C) \wedge (E_2 \vdash_a C) \rightarrow PE_1 \wedge G(C \rightarrow E_1) \wedge [a]K(C \rightarrow E_1) \wedge PE_2 \wedge G(C \rightarrow E_2) \wedge [a]K(C \rightarrow E_2)$ (4)
 - ② $(E_1 \vdash_a C) \wedge (E_2 \vdash_a C) \rightarrow P(E_1 \wedge E_2) \wedge G((C \rightarrow E_1) \wedge (C \rightarrow E_2)) \wedge [a](K(C \rightarrow E_1) \wedge K(C \rightarrow E_2))$
①, OC
 - ③ $[a](K(C \rightarrow E_1) \wedge K(C \rightarrow E_2)) \rightarrow [a]K((C \rightarrow E_1) \wedge (C \rightarrow E_2))$ OC, RZM
 - ④ $(E_1 \vdash_a C) \wedge (E_2 \vdash_a C) \rightarrow P(E_1 \wedge E_2) \wedge G((C \rightarrow E_1) \wedge (C \rightarrow E_2)) \wedge [a]K((C \rightarrow E_1) \wedge (C \rightarrow E_2))$ ②, ③
 - ⑤ $(E_1 \vdash_a C) \wedge (E_2 \vdash_a C) \rightarrow P(E_1 \wedge E_2) \wedge G(C \rightarrow E_1 \wedge E_2) \wedge [a]K(C \rightarrow E_1 \wedge E_2)$ ④, (3)
 - ⑥ $(E_1 \vdash_a C) \wedge (E_2 \vdash_a C) \rightarrow E_1 \wedge E_2 \vdash_a C$ ⑤, (4)
- (8)

⁵ R 和 E 指模态逻辑的相应系统，C 和 D 以及 T 指模态逻辑的相应公理。见后面参考文献 [2]。

- ① $[a]K(C_1 \rightarrow E) \wedge [a]K(C_2 \rightarrow E) \rightarrow [a]K(C_1 \vee C_2 \rightarrow E)$ TA, RZM, (1)
 ② $G(C_1 \rightarrow E) \wedge G(C_2 \rightarrow E) \rightarrow G((C_1 \rightarrow E) \wedge (C_2 \rightarrow E))$ OC
 ③ $G((C_1 \rightarrow E) \wedge (C_2 \rightarrow E)) \leftrightarrow G(C_1 \vee C_2 \rightarrow E)$ TA, (3)
 ④ $G(C_1 \rightarrow E) \wedge G(C_2 \rightarrow E) \rightarrow G(C_1 \vee C_2 \rightarrow E)$ ②, ③
 ⑤ $PE \wedge G(C_1 \rightarrow E) \wedge [a]K(C_1 \rightarrow E) \wedge PE \wedge G(C_2 \rightarrow E) \wedge [a]K(C_2 \rightarrow E) \rightarrow PE \wedge G(C_1 \vee C_2 \rightarrow E) \wedge [a]K(C_1 \vee C_2 \rightarrow E)$ ①, ④
 ⑥ $(E \mapsto_a C_1) \wedge (E \mapsto_a C_2) \rightarrow E \mapsto_a C_1 \vee C_2$ ⑤, (4)
 (9)
 ① $\perp \mapsto_a C \rightarrow P \perp$ TA
 ② $\neg(\perp \mapsto_a C)$ ①, NPF $\neg$

如前定义 t -翻译 (本质上删去所有的算子), t -退化和协调系统的概念, 我们有

2.1.6 定理 **BTC2** 能 t -退化为 **PC**₀ 且是协调的。 $\dashv$

2.1.7 例 令 e 是一个原子公式。则 $e \mapsto_a e =_{df} PE \wedge G(e \rightarrow e) \wedge [a]K(e \rightarrow e)$ 的 t -翻译不是 **PC**₀ 的内定理, 据 2.1.6 (1), 易见 $e \mapsto_a e$ 不是 **BTC2** 的内定理。 $\dashv$

2.1.8 例 令 p, q 和 r 是 3 个原子公式。(1) 易见

$p \mapsto_a q \rightarrow p \wedge r \mapsto_a q =_{df} Pp \wedge G(q \rightarrow p) \wedge [a]K(q \rightarrow p) \rightarrow P(p \wedge r) \wedge G(q \rightarrow p \wedge r) \wedge [a]K(q \rightarrow p \wedge r)$ 的 t -翻译 $p \wedge (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow p \wedge r \wedge (q \rightarrow p \wedge r) \wedge (q \rightarrow p \wedge r)$ 不是 **PC**₀ 的内定理, 据 2.1.6 (1), $p \mapsto_a q \rightarrow p \wedge r \mapsto_a q$ 不是 **BTC2** 的内定理。

(2) 易见

$p \mapsto_a q \rightarrow \neg q \mapsto_a \neg p =_{df} Pp \wedge G(q \rightarrow p) \wedge [a]K(q \rightarrow p) \rightarrow P\neg q \wedge G(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge [a]K(\neg p \rightarrow \neg q)$ 的 t -翻译 $p \wedge (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow \neg q \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$ 不是 **PC**₀ 的内定理, 据 2.1.6 (1), $p \mapsto_a q \rightarrow \neg q \mapsto_a \neg p$ 不是 **BTC2** 的内定理。

我们甚至能看到, 连 $p \mapsto_a p \rightarrow \neg p \mapsto_a \neg p$ 也不是 **BTC2** 的内定理。

(3) 易见 $\perp \mapsto_a \perp =_{df} P\perp \wedge G(\perp \rightarrow \perp) \wedge [a]K(\perp \rightarrow \perp)$ 的 t -翻译 $\perp \wedge (\perp \rightarrow \perp) \wedge (\perp \rightarrow \perp)$ 不是 **PC**₀ 的内定理, 据 2.1.6 (1), $\perp \mapsto_a \perp$ 不是 **BTC2** 的内定理。 $\dashv$

说明: 如前说明, 这些结果也是我们想要的。

后面我们还要证明, 连 $T \mapsto_a T$ 也不是 **BTC2** 的内定理。

2.2.1 定义 称 $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 是邻域活动框架, 简称 F 是 **NA**-框架, 当且仅当 W 是非空集, P, G 和 K 是从 W 到 $P(P(W))$ 中的邻域映射, 且

$$N = \{N_a: a \in \text{Act} \text{ 使得 } N_a \text{ 是从 } W \text{ 到 } P(P(W)) \text{ 中的邻域映射}\}.$$

称 $M = \langle W, P, G, K, N, [] \rangle$ 是邻域活动模型, 简称 M 是 **NA**-模型, 当且仅当 $\langle W, P, G, K, N \rangle$ 是 **NA**-框架且 $[]$ 是从全体原子公式 At 到 $P(W)$ 的指派映射。

以后若不特别提到, 我们总令 $O \in \{P, G, K\} \cup N$ 。 $\dashv$

2.2.2 定义 类似 1.2.2。 $\dashv$

2.2.3 定义 称 $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 是刻画实验溯因条件句的框架, 简称 F 是 **btc2**-框架, 记作 $F \in \text{Frame}(\text{btc2})$, 当且仅当下列框架条件成立: 对任意 $w \in W$ 和 $X, Y \subseteq W$,

- (oc) $X, Y \in O(w) \Rightarrow X \cap Y \in O(w)$,
 (npf) $\emptyset \notin P(w)$, (ngf) $\emptyset \notin G(w)$,
 (gd) $X \in G(w) \Rightarrow W - X \notin G(w)$, (kt) $X \in K(w) \Rightarrow w \in X$,
 (rzm) $X \in Z(w)$ 且 $X \subseteq Y \Rightarrow Y \in Z(w)$, 其中 $Z \in \{P, K\} \cup N$ 。 $\dashv$

2.2.4—2.2.6 类似 1.2.4—1.2.6。 $\dashv$

2.2.7 框架可靠性定理 **BTC2** 相对 $\text{Frame}(\text{btc2})$ 是可靠的。

证明: 任给 **btc2**-框架 $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 和 F 上赋值 $[]$ 。

验证公理 TA 和规则 MP: 显然。

验证公理 OC, NPF, NGF 和 KT 以及规则 RZM: 证明类似 1.2.7 的证明对 OC, NOF 和 RT 以及 ROM 的验证。

验证公理 GD: 任给 $w \in [GA]$ 。则 $[A] \in G(w)$, 据 2.2.3 的(gd), 有 $W - [A] \notin G(w)$, 再据引理 2.2.5 (1), 有 $[\neg A] \notin G(w)$, 所以据 2.2.2 (1), 有 $w \in [\neg G \neg A]$ 。因此据 w 的任意性, 有 $[GA] \subseteq [\neg G \neg A]$ 。再据 2.2.5 (3), 我们有 $[GA \rightarrow \neg G \neg A] = W$ 。

验证规则 RGE: 设 $[A_0 \leftrightarrow A] = W$ 。据 2.2.5 (4), 有

(#) $[A_0] = [A]$ 。

任给 $w \in W$, 我们有

$w \in [GA_0] \Leftrightarrow [A_0] \in G(w)$ 据真值集定义 2.2.2

$\Leftrightarrow [A] \in G(w)$ 据 (#)

$\Leftrightarrow w \in [GA]$ 。 据真值集定义 2.2.2

因此据 w 的任意性, 有 $[GA_0] = [GA]$, 再据 2.2.5 (4), 我们有 $[GA_0 \leftrightarrow GA] = W$ 。 $\dashv$

2.2.8 例 令 $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 满足下列条件:

(1) $W = \{w\}$, (2) $P(w) = G(w) = K(w) = \{W\}$,

(3) $N_a(w) = \emptyset$, 其中 $a \in \text{Act}$ 。

易见 $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 满足 2.2.3 的框架条件, 所以是 **btc2**-框架。据上一定理, 有

(4) **BTC2** 的内定理在 F 中有效。

易见 $[a]K(T \rightarrow T)$ 不在 F 中有效, 所以

(5) $T \mapsto_a T$ 也不在 F 中有效。

再据 (4), 易见

(6) $T \mapsto_a T$ 不是 **BTC2** 的内定理。

另一方面, $T \wedge T$ 在 F 中有效, 所以据 (5),

(7) $T \wedge T \rightarrow T \mapsto_a T$ 不在 F 中有效。

再据 (4), 易见

(8) $T \wedge T \rightarrow T \mapsto_a T$ 不是 **BTC2** 的内定理。 $\dashv$

说明: 上面的 (6) 说明: 即使重言式作为一个结果, 通过实验溯求它是自身的原因也无意义。据 (8), $T \wedge T \rightarrow T \mapsto_a T$ 不是 **BTC2** 的内定理, 从而 $A \wedge B \rightarrow A \mapsto_a B$ 不是 **BTC2** 的内定理。这也是我们想要的结果: 通过实验, 智能主体在认知层面上, 发现不是任何两个事件都有因果关系。

2.2.9 例 令 $M = \langle W, P, G, K, N, [] \rangle$ 满足下列条件:

(1) $W = \{w, u, v\}$;

(2) $P(w) = K(w) = N_a(w) = \{\{w\}, \{w, u\}, \{w, v\}, W\}$, 其中 $a \in \text{Act}$,

$P(u) = K(u) = N_a(u) = \{\{u\}, \{u, w\}, \{u, v\}, W\}$, 其中 $a \in \text{Act}$,

$P(v) = K(v) = N_a(v) = \{\{v\}, \{v, w\}, \{v, u\}, W\}$, 其中 $a \in \text{Act}$;

(3) $G(w) = \{\{w\}, \{w, u\}, \{w, v\}\}$, $G(u) = \{\{u\}\}$, $G(v) = \{\{v\}\}$;

(4) $[p] = [r] = \{w, u\}$, $[q] = \{w, v\}$ 。

易见 $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 满足 2.2.3 的框架条件, 所以是 **btc2**-框架。据上一定理, 有

(5) **BTC2** 的内定理在 F 中有效。

另一方面, 易见

(6) $[q \rightarrow p] = \{w, u\}$, $[r \rightarrow q] = \{w, v\}$ 。

所以

(7) $[K(q \rightarrow p)] = \{w, u\}$, $[K(r \rightarrow q)] = \{w, v\}$, $[G(q \rightarrow p)] = \{w\}$, $[G(r \rightarrow q)] = \{w\}$ 。

因此

(8) $w \in [Pp \wedge G(q \rightarrow p) \wedge [a]K(q \rightarrow p) \wedge Pq \wedge G(r \rightarrow q) \wedge [a]K(r \rightarrow q)]$ 。

因为 $[r \rightarrow p] = W \notin G(w)$, 所以我们有

(9) $w \notin [G(r \rightarrow p)]$ 。

据(8)和(9), 最后我们有

(10) $w \notin [(p \mapsto_a q) \wedge (q \mapsto_a r) \rightarrow p \mapsto_a r]$ 。

再据(5), 易见

(11) $(p \mapsto_a q) \wedge (q \mapsto_a r) \rightarrow p \mapsto_a r$ 不是 **BTC2** 的内定理。⊥

说明: (11) 说明: 实验溯因条件句不满足传递律。**BTC1** 也可以仿效从而得到改善。

2.3.1–2.3.5 类似 1.3.1–1.3.5。⊥

2.3.6 定义 (1) 定义 **BTC2** 的典范框架 $N = \langle W, P, G, K, N, [] \rangle$ 如下:

① $W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}$;

② O 是从 W 到 $P(P(W))$ 中的映射使得

$|A| \in O(w) \Leftrightarrow OA \in w$, 对任意 $w \in W$ 和公式 A ;

(2) 定义 **BTC2** 的典范模型 $M = \langle W, P, G, K, N, [] \rangle$ 如下: $\langle W, P, G, K, N \rangle$ 是 **BTC2** 的典范框架, 且

③ $[p] = |p|$, 对每一原子公式 p 。⊥

说明: 据引理 2.3.2, **BTC2** 是一致的, 所以 W 非空, 因此典范框架是良定义的。

类似 1.3.7 和 1.3.8 的证明, 我们有:

2.3.7–2.3.8 类似 1.3.7–1.3.8。⊥

2.3.9 定义 (1) 定义 **BTC2** 的适当结构(proper structure) $M = \langle W, P, G, K, N, [] \rangle$ 如下:

① $W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}$;

② $G(w) = \{|A|: \text{存在 } GA \in w\}$, 对每一 $w \in W$;

③ $Z(w) = \{X \subseteq W: \text{存在 } ZA \in w \text{ 使得 } |A| \subseteq X\}$,

对每一 $w \in W$ 和 $Z \in \{P, K\} \cup \{[a]: a \in \text{Act}\}$;

④ $[p] = |p|$, 对每一原子公式 p 。

(2) $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 称为 **BTC2** 的适当框架。⊥

2.3.10 引理

令 $M = \langle W, P, G, K, N, [] \rangle$ 是 **BTC2** 的适当结构。则 M 是 **BTC2** 的典范模型。

证明: 据定义 2.3.6, 只须证: 对任意 $w \in W$ 和公式 A ,

(1) $|A| \in O(w) \Leftrightarrow OA \in w$ 。

先验证:

(2) $|A| \in G(w) \Leftrightarrow GA \in w$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $GA \in w$ 。据 $G(w)$ 的构造, 有 $|A| \in G(w)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $|A| \in G(w)$ 。因为等价类的代表元不是惟一的, 所以据 $G(w)$ 的构造,

(3) 存在 $GA_0 \in w$ 使得 $|A_0| = |A|$ 。

因为 $|A_0| = |A|$, 所以据引理 2.3.5 (4), 有 $\vdash A_0 \leftrightarrow A$, 据 RGE, 有 $\vdash GA_0 \leftrightarrow GA$ 。因为 $GA_0 \in w$, 所以据引理 2.3.3, 有 $GA \in w$ 。

再验证:

(4) $|A| \in Z(w) \Leftrightarrow ZA \in w$, 对每一 $Z \in \{P, K\} \cup \{[a]: a \in \text{Act}\}$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $ZA \in w$ 。因为 $|A| \subseteq |A|$, 所以据 $Z(w)$ 的构造, 有 $|A| \in Z(w)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $|A| \in Z(w)$ 。据 $Z(w)$ 的构造,

(5) 存在 $ZA_0 \in w$ 使得 $|A_0| \subseteq |A|$ 。

因为 $|A_0| \subseteq |A|$, 所以据引理 2.3.5 (3), 有 $\vdash A_0 \rightarrow A$, 据 RZM, 有 $\vdash ZA_0 \rightarrow ZA$ 。因为 $ZA_0 \in w$, 所以据引理 2.3.3, 有 $ZA \in w$ 。⊥

2.3.11 引理 令 $F = \langle W, P, G, K, N \rangle$ 是 **BTC2** 的适当框架。则 F 是 **btc2**-框架。

证明：下面我们来验证 F 满足定义 2.2.3 给出的框架条件。

验证(oc)。证明如同 1.3.11 的证明对(oc)的验证。

验证(npf)和(ngf)。证明如同 1.3.11 的证明对(nof)的验证。

验证(gd)。设 $X \in G(w)$ 。则

(1) 存在 $GA \in w$ 使得 $|A| = X$ 。

再据公理 GD，有

(2) $\neg G\neg A \in w$ 。

假设要证结果不成立，即 $W - X \in G(w)$ 。则

(3) 存在 $GB \in w$ 使得 $|B| = W - X$ 。

据(3)和(1)，易见 $|B| = W - X = W - |A| = |\neg A|$ ，所以 $\vdash B \leftrightarrow \neg A$ ，再据 RGE，有 $\vdash GB \leftrightarrow G\neg A$ ，再据(3)，易见 $G\neg A \in w$ ，矛盾于(2)和 w 的一致性。

验证(kt)。证明如同 1.3.11 的证明对(rt)的验证。

验证(rzm)。证明如同 1.3.11 的证明对(rom)的验证。 $\dashv$

2.3.12 框架完全性定理 **BTC2** 相对 $\text{Frame}(\text{btc2})$ 是完全的。

证明：证明类似 1.3.12 的证明。 $\dashv$

我们下一步要考虑的问题：

1、我们也可以弱化 $E \mapsto_a C$ 的缩写定义：

$$(E \mapsto_{aw} C) =_{df} PE \wedge [a]K(C \rightarrow E)。$$

由此我们可以考虑相应的弱化系统。但这样的溯因推断有一种盲目性，而且会导致相应的溯因传递律。

2、如果要扩充现有的系统，也可以考虑本节第 1 部分最后的两组公理，只是把算子 R 和 O 改成 K。

3、把上述结果推广到相应的多主体逻辑。

4、如前所述，把前面的缩写概括为

$$(E \mapsto_{a_1 \dots a_n} C) =_{df} PE \wedge G(C \rightarrow E) \wedge [a_1] \dots [a_n]K(C \rightarrow E)。$$

5、用认知算子（知道算子 K 和相信算子 B）和时态算子 H 和 G 的组合来定义溯因条件句。例如，

$$(E \mapsto C) =_{df} KE \wedge KH(C \rightarrow E) \wedge BG(C \rightarrow E)，$$

$$(E \mapsto_a C) =_{df} KE \wedge KH(C \rightarrow E) \wedge [a]BG(C \rightarrow E)。$$

6、何谓 C 是 E 的原因？经典观点是：C 是某条件 B 的必要条件而 B 是 E 的充分条件。日常语言中我们之所以说 C 是 E 的原因，是因为 B 的其他必要条件可以不提。也就是说，其他必要条件融入背景，在正常情况下总是存在的。例如，日常生活中我们常说，把水加热到 100 度水就会沸腾。这表示：“把水加热到 100 度”是“水沸腾”的原因。但我们知道使“水沸腾”还需要其他条件。例如，需要一定的大气压（或海拔高度）。但在正常情况下我们认为这些条件总是在一个合理的范围之内。

上述分析使我们想到用正常条件句来刻画溯因条件句。在文献 [9] 中，作者就提出一种正常条件句逻辑。

令 $C > E$ 表示在正常情况下 C 是产生 E 的条件，则我们可以如下定义溯因条件句：

$$(E \mapsto C) =_{df} KE \wedge K(C > E)，$$

$$(E \mapsto_a C) =_{df} KE \wedge [a]K(C > E)。$$

当然，我们也可以仿照前面的定义，定义类似的溯因条件句。

7、如第 1 节最后说明的那样，在形式语言中把 $\mapsto$ 作为初始符号引入，相应地修改形成规则 2.1.1 (4)、真值集定义 2.2.2 (3) 和 2.1.3 给出的形式系统 **BTC2**。

三、对通过活动否定

本节我们用动态逻辑作为基础,对通过活动否定(negation by action)这样一个概念进行逻辑刻画。这里逻辑刻画的含义就是:给出通过活动否定的语义(可满足关系)和形式系统,然后证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。

考虑命题 ϕ : 苹果 a 在树上。现在我把它摘下来(做了一个活动),因此 ϕ 就不成立。这表明通过某个活动,否定了原来的命题。用逻辑的术语说,通过活动 α 改变了 ϕ 的真值。因此,我们得到“通过活动来否定”这样一个概念。这个概念以后简称“活动否定”。

现在我们引入形式表达式 $\neg_\alpha\phi$,它直观表示:做了活动 α 从而否定 ϕ 。

这样的直观解释当然有歧义,下面的工作就是试图从各方面揭示 $\neg_\alpha\phi$ 的逻辑特征。

1. PDL0

本小节我们先给出动态逻辑 **PDL0**。它是 **PDL** 的一个简单形式(所有活动都看作原子活动)。请参见后面的参考文献 [1]。

本节许多内容同于上一节,所以下面我们只提到不同的内容。

3.1.1 定义 公式的形成规则: $p \mid \neg\phi \mid (\phi \wedge \psi) \mid [\alpha]\psi$, 其中 $p \in \text{At}$, $\alpha \in \text{Act}$ 。 $\vdash$

3.1.2 规定与缩写 令 $\langle\alpha\rangle\phi$ 是对 $\neg[\alpha]\neg\phi$ 的缩写。 $\vdash$

3.1.3 定义 系统 **PDL0** 定义如下: TA 和 MP 如前定义,

(RK $_\alpha$) $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi / [\alpha]\phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha]\phi_n \rightarrow [\alpha]\psi$, 对任意自然数 n 。 $\vdash$

说明: 当 $n=0$ 时,如通常规定 $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ 是 T ,所以 RK $_\alpha$ 相对 **PC** 等价于 $\psi / [\alpha]\psi$ 。

3.1.4 定义 类似 1.1.4。 $\vdash$

3.1.5 引理 下面是 **PDL0** 的导出规则和内定理:

- (1) $[\alpha](\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha]\phi \rightarrow [\alpha]\psi$, (2) $\phi \rightarrow \psi / [\alpha]\phi \rightarrow [\alpha]\psi$,
- (3) $\phi \rightarrow \psi / \langle\alpha\rangle\phi \rightarrow \langle\alpha\rangle\psi$, (4) $[\alpha]\phi \leftrightarrow \neg\langle\alpha\rangle\neg\phi$,
- (5) $[\alpha]\phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha]\phi_n \leftrightarrow [\alpha](\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)$, (6) $\langle\alpha\rangle(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\phi_1 \wedge \dots \wedge \langle\alpha\rangle\phi_n$ 。

证明: 证明如 [2]。 $\vdash$

3.1.6 定义 称 $\langle W, R \rangle$ 是框架,记作 $F \in \text{Frame}$,当且仅当 W 是非空集, R 是定义域为 Act 的映射使得对每一 $\alpha \in \text{Act}$, $R(\alpha)$ 是 W 上的二元通达关系。

称 $\langle W, R, [] \rangle$ 是模型,当且仅当 $\langle W, R \rangle$ 是框架且 $[]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。 $\vdash$

说明: 为了简洁,我们以后用 R_α 缩写 $R(\alpha)$ 。

3.1.7 定义 令 $\langle W, R \rangle$ 是框架。任给 $w \in W$ 和 $\alpha \in \text{Act}$, $R_\alpha(w) =_{\text{df}} \{u \in W: wR_\alpha u\}$ 。 $\vdash$

3.1.8 真值集定义 令 $\langle W, R, [] \rangle$ 是模型。定义复合公式 ϕ 相对 M 的真值集 $[\phi]$ 如下:

- (1) $w \in [-\phi] \Leftrightarrow w \notin [\phi]$, (2) $w \in [\phi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\psi]$,
- (3) $w \in [[\alpha]\phi] \Leftrightarrow R_\alpha(w) \subseteq [\phi]$ 。 $\vdash$

3.1.9–3.1.11 类似 1.2.4–1.2.6。 $\vdash$

3.1.12 定理 **PDL0** 相对 **Frame** 框架可靠。

证明: 证明如通常。 $\vdash$

3.1.13 类似 1.3.1。 $\vdash$

3.1.14 引理 (1) 类似 1.3.3 (1)。 (2) 类似 1.3.5。

(3) ϕ 属于每一以 w 为子集的极大一致集,当且仅当,存在 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w$ 使得

$$\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \phi。$$

(4) 若 $\not\models \phi$, 则存在极大一致集 w 使得 $\phi \notin w$ 。

(5) (**Lindenbaum-引理**) 令 w 是一致的公式集。则存在极大一致集 u 使得 $w \subseteq u$ 。

(6) **PDL0** 是一致的。

(7) 若 $\{\neg\phi\}$ 不一致, 则 $\vdash \phi$ 。 $\vdash$

3.1.15 缩写定义 令 w 是公式集。

$$w^{-[\alpha]} = \{\psi : [\alpha]\psi \in w\}, \quad w^{+[\alpha]} = \{\langle \alpha \rangle \phi : \phi \in w\}。 \perp$$

3.1.16 引理 令 W 是所有极大一致集的集合, 令 $w \in W$ 。则

- (1) $[\alpha]\psi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (w^{-[\alpha]} \subseteq u \Rightarrow \psi \in u)$ 。
- (2) $w^{-[\alpha]} \subseteq u \Leftrightarrow u^{+[\alpha]} \subseteq w$, 对所有 $u \in W$ 。
- (3) $[\alpha] \perp \in w \Leftrightarrow \sim \exists u \in W (w^{-[\alpha]} \subseteq u)$ 。
- (4) $\langle \alpha \rangle \top \in w \Leftrightarrow \exists u \in W (w^{-[\alpha]} \subseteq u)$ 。 $\perp$

3.1.17 定义 定义 **PDL0** 的典范框架 $\langle W, R \rangle$:

$W = \{w : w \text{ 是极大一致集}\}, \quad R = \{R_\alpha : \alpha \in \text{Act}\}$, 其中

$$R_\alpha = \{\langle w, u \rangle \in W^2 : w^{-[\alpha]} \subseteq u\}, \quad \forall \alpha \in \text{Act}。$$

定义 **PDL0** 的典范模型 $\langle W, R, [\] \rangle$: $\langle W, R \rangle$ 是 **PDL0** 的典范框架, 且

$$[p] = |p|, \quad \text{对每一 } p \in \text{At}。 \perp$$

3.1.18—3.1.19 类似 1.3.7—1.3.8。 $\perp$

3.1.20 框架完全性定理 **PDL0** 相对框架类 **Frame** 是完全的。 $\perp$

2. 用缩写公理刻画活动否定

在前面的语言中, 对每一 $\alpha \in \text{Act}$ 和 $\phi \in \text{Form}$, 增加形如 $\neg_\alpha \phi$ 的公式, 即形成规则如下:

$$p \mid \neg \phi \mid \neg_\alpha \phi \mid (\phi \wedge \psi) \mid [\alpha]\psi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, \alpha \in \text{Act}。$$

所谓缩写公理是指形如 $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow f(\phi)$ 的公式使得 $f(\phi)$ 是用 ϕ 和其他符号 (特别是 $[\alpha]$) 构造起来的公式。

(1) 在 **PDL0** 中引入缩写公理

这是一种最简单的方案。下面是可以考虑的缩写公理:

3.2.1 定义

- (A1) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow \phi \wedge [\alpha] \neg \phi$, (A2) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow \phi \wedge \neg [\alpha] \phi$,
- (A3) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow [\alpha] \neg \phi$, (A4) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow \neg [\alpha] \phi$,
- (A5) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow \phi \rightarrow [\alpha] \neg \phi$, (A6) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow \phi \rightarrow \neg [\alpha] \phi$,
- (A7) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow [\alpha] \neg \phi \rightarrow \phi$, (A8) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow \neg [\alpha] \phi \rightarrow \phi$ 。 $\perp$

说明: A1 和 A2 直观表示: 通过活动否定一个命题就是改变原来命题的真值。通常情况下, A2 弱于 A1。A3 和 A4 分别是 A1 和 A2 的退化形式, 它们只有单纯否定的意思, 即没有改变原有命题真值的意思。A5—A8 是蕴涵式定义。

上述的缩写公理, 还有相应的变种。例如 A1 的一个变种是:

$$(A1^*) \neg_\alpha \phi \leftrightarrow \neg \phi \wedge [\alpha] \phi。$$

后面我们要用它构造相应的系统。

对应 A1 的真值集定义是:

3.2.2 真值集定义 在真值集定义 3.1.8 中增加: $w \in [\neg_\alpha \phi] \Leftrightarrow (w \in [\phi] \text{ 且 } R_\alpha(w) \subseteq [\neg \phi])$ 。 $\perp$

$w \in [\neg_\alpha \phi]$ 的直观意义是: w 是原来状态使得 ϕ 在其中真, 在 w 做完 α 必使 ϕ 不成立。显然,

$$w \notin [\neg_\alpha \phi] \Leftrightarrow w \notin [\phi \wedge [\alpha] \neg \phi] \Leftrightarrow w \in [\phi \rightarrow \langle \alpha \rangle \phi]。$$

所以当 w 自返时 $\neg_\alpha \phi$ 不成立。

3.2.3 定理 下面是 **PDL0** + A1 的内定理:

- (1) $(\neg_\alpha)^n \phi \rightarrow \phi$, 其中 $(\neg_\alpha)^n \phi$ 表示 ϕ 前面有 n 个 $\neg_\alpha$ 。
- (2) $\neg \phi \vee \langle \alpha \rangle \phi \leftrightarrow \neg \neg_\alpha \phi$ 。 (3) $\langle \alpha \rangle \phi \rightarrow \neg \neg_\alpha \phi$ 。
- (4) $\neg \phi \rightarrow \neg \neg_\alpha \phi$ 。 (5) $\neg_\alpha \perp$ 。 $\perp$

说明: 上述 (1) 说明: 无论做多少次活动否定一个命题, 它在原来状态中总成立。

上述 (5) 说明 $\perp$ 的真值通过任何活动都无法改变。这是自然的。

考虑对应 A2 的真值集定义:

3.2.4 真值集定义 $w \in [\neg_\alpha \phi] \Leftrightarrow (w \in [\phi] \text{ 且 } R_\alpha(w) \cap [\neg \phi] \neq \emptyset)$ 。 $\perp$

说明： $w \in [\neg_\alpha \varphi]$ 的直观意义是： w 是原来状态使得 φ 在其中真，在 w 做完 α 有可能使 φ 不成立。若 $R_\alpha(w) \neq \emptyset$ ，则易见这里的定义弱于 3.2.2 中的定义；若 $R_\alpha(w) = \emptyset$ ，则 $w \notin [\neg_\alpha \varphi]$ 。

3.2.5 定理 下面是 **PDL0** + A2 的内定理：

- (1) $(\neg_\alpha)^n \varphi \rightarrow \varphi$, 其中 $(\neg_\alpha)^n \varphi$ 表示 φ 前面有 n 个 $\neg_\alpha$ 。
 (2) $\neg \varphi \vee [\alpha] \varphi \leftrightarrow \neg \neg_\alpha \varphi$. (3) $[\alpha] \varphi \rightarrow \neg \neg_\alpha \varphi$. (4) $\neg \varphi \rightarrow \neg \neg_\alpha \varphi$.
 (5) $\neg_\alpha \top$. (6) $\neg \neg_\alpha \perp$. $\vdash$

说明：(5) 从 (3) 得到，(6) 从 (4) 得到。(5) – (6) 说明逻辑常元的真值通过任何活动都无法改变。这些我们认为都是很自然的。看来采用 A2 是一个不错的方案。

3.2.6 定理 下面是 **PDL0** + A3 的内定理：

- (1) $\neg \neg_\alpha \varphi \leftrightarrow \langle \alpha \rangle \varphi$. (2) $\neg_\alpha \neg \varphi \leftrightarrow [\alpha] \varphi$. (3) $\neg_\alpha \perp$. $\vdash$

说明：据 (3)，**PDL0** + A3 不是一个好的方案。

3.2.7 定理 下面是 **PDL0** + A4 的内定理：

- (1) $\neg \neg_\alpha \varphi \leftrightarrow [\alpha] \varphi$. (2) $\neg_\alpha \neg \varphi \leftrightarrow \langle \alpha \rangle \varphi$. (3) $\neg \neg_\alpha \top$. $\vdash$

说明：这说明 **PDL0** + A4 也是一个可行的方案。

对应 A4 的真值集定义是：

3.2.8 真值集定义 $w \in [\neg_\alpha \varphi] \Leftrightarrow R_\alpha(w) \cap [\neg \varphi] \neq \emptyset$. $\vdash$

易见 $\neg \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$ 是 **PDL0** + A5 或 **PDL0** + A6 的内定理， $\varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$ 是 **PDL0** + A7 或 **PDL0** + A8 的内定理，所以 **PDL0** 分别加入这 4 个缩写公理似乎都不是好方案。因为从前者我们可以得到内定理 $\neg_\alpha \perp$ ，从后者我们可以得到内定理 $\neg_\alpha \top$ 。

为了改进，我们至少有以下两种选择：

1、把 A5–A8 中的蕴涵符号 $\rightarrow$ 改成条件句算子 $\triangleright$ 。(关于条件句逻辑可以参见文献[4]。)由此可以避免上述我们不想要的东西。

2、用拟赋值方法 (参见 [3])，我们可以弱化公理 A1–A8，特别是 A5–A8，即把下列公理分别加入 **PDL0**。(采用其中的一些公理能避免前面一些我们不想要的内定理。)

3.2.9 定义

- (A1.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow \varphi \wedge [\alpha] \neg \varphi$, (A1.2) $\varphi \wedge [\alpha] \neg \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$,
 (A2.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow \varphi \wedge \neg [\alpha] \varphi$, (A2.2) $\varphi \wedge \neg [\alpha] \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$,
 (A3.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow [\alpha] \neg \varphi$, (A3.2) $[\alpha] \neg \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$,
 (A4.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow \neg [\alpha] \varphi$, (A4.2) $\neg [\alpha] \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$,
 (A5.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow \varphi \rightarrow [\alpha] \neg \varphi$,
 (A5.2) $(\varphi \rightarrow [\alpha] \neg \varphi) \rightarrow \neg_\alpha \varphi$ (还会有 $\neg \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$),
 (A6.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \neg [\alpha] \varphi$,
 (A6.2) $(\varphi \rightarrow \neg [\alpha] \varphi) \rightarrow \neg_\alpha \varphi$ (还会有 $\neg \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$),
 (A7.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow [\alpha] \neg \varphi \rightarrow \varphi$,
 (A7.2) $([\alpha] \neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg_\alpha \varphi$ (还会有 $\varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$),
 (A8.1) $\neg_\alpha \varphi \rightarrow \neg [\alpha] \varphi \rightarrow \varphi$,
 (A8.2) $(\neg [\alpha] \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg_\alpha \varphi$ (还会有 $\varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$)。 $\vdash$

把 3.2.1 中我们想要的公理分别加入 **PDL0**，并采用相应的真值集定义作为语义，我们能证明相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。完全性定理的证明非常简单，因为不需要验证框架条件。

(2) 用双模态算子定义活动否定

我们在前面说过， $\neg_\alpha \varphi$ 直观表示：做了活动 α 从而否定 φ 。这就是说，通过活动 α 改变了 φ 的真值。这意味， φ 在原来状态中成立。根据这样的思想，我们可以用两个算子来定义 $\neg_\alpha \varphi$ 。为此我们在语言中再引入形如 $\mathbf{P}_\alpha \varphi$ 的公式，直观意义是： φ 在做活动 α 之前成立。

3.2.10 定义 系统 **NA1** 是在 **PDL0** 中增加下列公理和规则得到的系统：对任意自然数 n ,

$$(RKP_\alpha) \quad \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi / P_\alpha \varphi_1 \wedge \dots \wedge P_\alpha \varphi_n \rightarrow P_\alpha \psi,$$

$$(A9) \quad \neg_\alpha \varphi \leftrightarrow P_\alpha \varphi \wedge [\alpha] \neg \varphi.$$

系统 **NA2** 是在 **PDL0** 中增加下列公理和规则得到的系统：对任意自然数 n ,

$$(RKP_\alpha) \quad \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi / P_\alpha \varphi_1 \wedge \dots \wedge P_\alpha \varphi_n \rightarrow P_\alpha \psi,$$

$$(A10) \quad \neg_\alpha \varphi \leftrightarrow P_\alpha \varphi \wedge \neg [\alpha] \varphi. \quad \vdash$$

3.2.11 定理 下面是 **NA1** 的内定理：

$$(1) \quad P_\alpha \varphi \rightarrow \langle \alpha \rangle \varphi \leftrightarrow \neg \neg_\alpha \varphi. \quad (2) \quad \langle \alpha \rangle \varphi \rightarrow \neg \neg_\alpha \varphi. \quad (3) \quad \neg P_\alpha \varphi \rightarrow \neg \neg_\alpha \varphi.$$

下面是 **NA2** 的内定理：

$$(1) \quad P_\alpha \varphi \rightarrow [\alpha] \varphi \leftrightarrow \neg \neg_\alpha \varphi. \quad (2) \quad [\alpha] \varphi \rightarrow \neg \neg_\alpha \varphi.$$

$$(3) \quad \neg P_\alpha \varphi \rightarrow \neg \neg_\alpha \varphi. \quad (4) \quad \neg \neg_\alpha \top. \quad \vdash$$

说明：从内定理的情况看起来，**NA2** 似乎比 **NA1** 自然。

如 3.2.1 和 3.2.9，我们还可以考虑蕴涵式公理。

3.2.12 定义 称 $\langle W, R, P \rangle$ 是 **P-框架**，记作 $F \in \text{FrameP}$ ，当且仅当， $\langle W, R \rangle$ 是 3.1.6 定义的框架，且 P 是定义域为 Act 的映射，使得对每一 $\alpha \in \text{Act}$ ， R_α 是 W 上的二元通达关系。

称 $\langle W, R, P, [] \rangle$ 是 **P-模型**，当且仅当， $\langle W, R, P \rangle$ 是框架且 $[]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。 $\vdash$

3.2.13 真值集定义 令 $\langle W, R, P, [] \rangle$ 是 **P-模型**。(1) – (3) 同 3.1.8 的 (1) – (3)，

$$(4) \quad w \in [P_\alpha \varphi] \Leftrightarrow P_\alpha(w) \subseteq [\varphi],$$

$$(5.1) \quad w \in [\neg_\alpha \varphi] \Leftrightarrow w \in [P_\alpha \varphi \wedge [\alpha] \neg \varphi], \quad \text{或} \quad (5.2) \quad w \in [\neg_\alpha \varphi] \Leftrightarrow w \in [P_\alpha \varphi \wedge \neg [\alpha] \varphi]. \quad \vdash$$

易证：

3.2.14 定理 (1) **NA1** 相对 FrameP (真值集定义以 (5.1) 为特征) 是可靠且完全的。

(2) **NA2** 相对 FrameP (真值集定义以 (5.2) 为特征) 是可靠且完全的。 $\vdash$

3. 用二元活动关系从另一个角度刻画活动否定

3.3.1 真值集定义 令 $\langle W, R, [] \rangle$ 是 3.1.6 给出的模型。(1) – (3) 同 3.1.8 的 (1) – (3)，

$$(4.1) \quad w \in [\neg_\alpha \varphi] \Leftrightarrow \forall u \in W (u R_\alpha w \text{ 且 } u \in [\varphi] \Rightarrow w \in [\neg \varphi]), \quad \text{或}$$

$$(4.2) \quad w \in [\neg_\alpha \varphi] \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_\alpha u \text{ 且 } w \in [\varphi] \Rightarrow u \in [\neg \varphi]). \quad \vdash$$

说明：4.1 和 4.2 分别等价

$$(4.1^*) \quad w \in [\neg_\alpha \varphi] \Leftrightarrow \forall u \in W (u R_\alpha w \text{ 且 } w \in [\varphi] \Rightarrow u \in [\neg \varphi]),$$

$$(4.2^*) \quad w \in [\neg_\alpha \varphi] \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_\alpha u \text{ 且 } u \in [\varphi] \Rightarrow w \in [\neg \varphi]).$$

4.1 似乎是一个有意思的定义： $u R_\alpha w$ 表示 w 是做完 α 形成的状态。而它的对应 4.2 则是对应 A5 的真值集定义。

3.3.2 定义 系统 **NAT** 是在 **PDL0** 中增加下列公理得到的系统：

$$(T) \quad [\alpha] \varphi \rightarrow \varphi, \quad (T0) \quad \neg \neg_\alpha \varphi \rightarrow \varphi.$$

系统 **NAT1** 是在 **NAT** 中增加下列公理和规则得到的系统：

$$(T1) \quad \langle \alpha \rangle (\neg_\alpha \varphi \wedge \varphi) \rightarrow \neg \varphi, \quad (RT1) \quad \langle \alpha \rangle \psi \rightarrow \neg \varphi / \psi \rightarrow \neg_\alpha \varphi.$$

系统 **NAT2** 是在 **NAT** 中增加下列公理和规则得到的系统：

$$(T2) \quad \neg_\alpha \varphi \wedge \varphi \rightarrow [\alpha] \neg \varphi, \quad (RT2) \quad \psi \rightarrow \neg \varphi / [\alpha] \psi \rightarrow \neg_\alpha \varphi. \quad \vdash$$

说明：T0 就是 3.2.8 后面提到的 $\neg \varphi \rightarrow \neg_\alpha \varphi$ ，它是 **PDL0** + A5 或 **PDL0** + A6 的内定理，由此可得出内定理 $\neg_\alpha \perp$ ，所以不那么自然。这里和下面我们也研究不恰当的逻辑。

定义从当下模态语言到经典句子语言的 t -翻译如下：其中 $p \in \text{At}$,

$$t(p) = p, \quad t(\neg \varphi) = t(\neg_\alpha \varphi) = \neg t(\varphi), \quad t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge t(\psi), \quad t([\alpha] \varphi) = t(\varphi).$$

易证 **NAT**, **NAT1** 和 **NAT2** 协调。

3.3.3 定理 令 $\text{Frame}(\text{ref})$ 是所有自返框架的类。

(1) **NAT1** 相对 $\text{Frame}(\text{ref})$ (真值集定义以 3.3.1 的 (4.1) 为特征) 可靠且完全。

(2) **NAT2** 相对 **Frame(ref)** (真值集定义以 3.3.1 的 (4.2) 为特征) 可靠且完全。

证明: (1) 证明可靠性:

任给 $F = \langle W, R \rangle \in \text{Frame(ref)}$ 和 F 上赋值 $[\]$ (真值集定义以 3.3.1 的 (4.1) 为特征)。

验证公理 T: 据自返性显然。

验证公理 T0: 任给 $w \in [\neg \neg_\alpha \phi]$ 。则据 3.3.1 的 (4.1), $\exists u \in W (uR_\alpha w \text{ 且 } u \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\phi])$ 。所以 $w \in [\phi]$ 。

验证公理 T1: 任给 $w \in [\langle \alpha \rangle (\neg_\alpha \phi \wedge \phi)]$ 。则 $\exists v \in W (wR_\alpha v \text{ 且 } v \in [\neg_\alpha \phi \wedge \phi])$ 。因为 $v \in [\neg_\alpha \phi]$, 所以据 3.3.1 后面的 (4.1*), 有

① $\forall u \in W (uR_\alpha v \text{ 且 } v \in [\phi] \Rightarrow u \in [\neg \phi])$ 。

因为 $wR_\alpha v$ 且 $v \in [\phi]$, 所以据①有 $w \in [\neg \phi]$ 。

验证规则 RT1: 设

② $[\langle \alpha \rangle \psi] \subseteq [\neg \phi]$ 。

要证: $[\psi] \subseteq [\neg_\alpha \phi]$ 。任给 $w \in [\psi]$ 。因 w 自返, 故 $w \in [\langle \alpha \rangle \psi]$, 据②, 有 $w \in [\neg \phi]$ 。因此总有 $\forall u \in W (uR_\alpha w \text{ 且 } u \in [\phi] \Rightarrow w \in [\neg \phi])$ 。

因此据 3.3.1 的 (4.1), 有 $w \in [\neg_\alpha \phi]$ 。

证明完全性: 定义 $\langle W, R \rangle$ 是 **NAT1** 的典范框架, 且令 $w \in W$ 。下证:

③ $\neg_\alpha \phi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (uR_\alpha w \text{ 且 } \phi \in u \Rightarrow \neg \phi \in u)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $\neg_\alpha \phi \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $uR_\alpha w$ 且 $\phi \in u$ 。据前者, 有 $w^{+\langle \alpha \rangle} \subseteq u$ 。因为 $\neg_\alpha \phi \in w$ 且 $\phi \in w$, 所以 $\langle \alpha \rangle (\neg_\alpha \phi \wedge \phi) \in w^{+\langle \alpha \rangle}$, 所以 $\langle \alpha \rangle (\neg_\alpha \phi \wedge \phi) \in u$ 。据公理 T1, 有 $\neg \phi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $\neg_\alpha \phi \notin w$ 。只须证

④ 存在 $u \in W$ 使得 $uR_\alpha w$ 且 $\phi \in u$ 且 $\phi \notin w$ 。

因为 $\neg_\alpha \phi \notin w$, 故 $\neg \neg_\alpha \phi \in w$, 据 T0, 有 $\phi \in w$ 。为证④, 据 Lindenbaum-引理, 现在只须证:

⑤ $w^{+\langle \alpha \rangle} \cup \{\phi\}$ 一致。

假设⑤不成立, 则存在 $\langle \alpha \rangle \phi_1, \dots, \langle \alpha \rangle \phi_n \in w^{+\langle \alpha \rangle}$ 使得 $\vdash \langle \alpha \rangle \phi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha \rangle \phi_n \rightarrow \neg \phi$ 。故据 3.1.5(6),

有 $\vdash \langle \alpha \rangle (\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \neg \phi$ 。据 RT1, 有 $\vdash \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \neg_\alpha \phi$ 。因为 $\langle \alpha \rangle \phi_1, \dots, \langle \alpha \rangle \phi_n \in w^{+\langle \alpha \rangle}$, 所以 $\phi_1, \dots, \phi_n \in w$, 易见 $\neg_\alpha \phi \in w$, 矛盾于设定。

完全性定理的其余证明如常。如前所述, 这样的证明很简单, 因为无框架条件需要验证。

(2) 证明可靠性:

任给 $F = \langle W, R \rangle \in \text{Frame(ref)}$ 和 F 上赋值 $[\]$ (真值集定义以 3.3.1 的 (4.2) 为特征)。

验证公理 T0: 任给 $w \in [\neg \neg_\alpha \phi]$ 。则据 3.3.1 的 (4.2), $\exists u \in W (wR_\alpha u \text{ 且 } w \in [\phi] \text{ 且 } u \in [\phi])$ 。所以 $w \in [\phi]$ 。

验证公理 T2: 任给 $w \in [\neg_\alpha \phi \wedge \phi]$ 。(要证 $w \in [[\alpha] \neg \phi]$ 。)任给 $u \in W$ 使得 $wR_\alpha u$ 。(要证 $u \in [\neg \phi]$ 。)因为 $w \in [\neg_\alpha \phi]$, 所以据 3.3.1 的 (4.2), 有

① $\forall v \in W (wR_\alpha v \text{ 且 } w \in [\phi] \Rightarrow v \in [\neg \phi])$ 。

因为 $wR_\alpha u$ 且 $w \in [\phi]$, 所以据①有 $u \in [\neg \phi]$ 。

验证规则 RT2: 设

② $[\psi] \subseteq [\neg \phi]$ 。

要证: $[[\alpha] \psi] \subseteq [\neg_\alpha \phi]$ 。任给 $w \in [[\alpha] \psi]$ 。因为 w 是自返的, 所以 $w \in [\psi]$, 据②, 有 $w \in [\neg \phi]$ 。因此下式总是空洞成立

$\forall u \in W (wR_\alpha u \text{ 且 } w \in [\phi] \Rightarrow u \in [\neg \phi])$ 。

因此据 3.3.1 的 (4.2), 有 $w \in [\neg_\alpha \phi]$ 。

证明完全性: 定义 $\langle W, R \rangle$ 是 **NAT2** 的典范框架, 且令 $w \in W$ 。下证:

③ $\neg_{\alpha}\varphi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(wR_{\alpha}u \text{ 且 } \varphi \in w \Rightarrow \neg\varphi \in u)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”：设 $\neg_{\alpha}\varphi \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $wR_{\alpha}u$ 且 $\varphi \in w$ 。据前者，有 $w^{-[\alpha]} \subseteq u$ 。因为 $\neg_{\alpha}\varphi \wedge \varphi \in w$ ，所以据公理 T2，有 $[\alpha]\neg\varphi \in w$ 。再据 $w^{-[\alpha]} \subseteq u$ ，有 $\neg\varphi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $\neg_{\alpha}\varphi \notin w$ 。只须证

④ 存在 $u \in W$ 使得 $wR_{\alpha}u$ 且 $\varphi \in u$ 且 $\varphi \in w$ 。

因为 $\neg_{\alpha}\varphi \notin w$ ，所以 $\neg[\alpha]\varphi \in w$ ，据 T0，有 $\varphi \in w$ 。现为证④，据 Lindenbaum-引理，只须证：

⑤ $w^{-[\alpha]} \cup \{\varphi\}$ 一致。

假设⑤不成立，则存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-[\alpha]}$ 使得 $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg\varphi$ 。据 RT2，有

⑥ $\vdash [\alpha](\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \neg_{\alpha}\varphi$ 。

因为 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-[\alpha]}$ ，所以易证 $[\alpha](\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \in w$ ，所以据⑥，有 $\neg_{\alpha}\varphi \in w$ ，矛盾于设定。

完全性定理的其余证明如通常。⊥

4. 用三元活动关系刻画活动否定

3.4.1 公式的形成规则 $p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha_{\varphi}]\psi \mid \neg_{\alpha}\varphi$ ，其中 $p \in \text{At}$ ， $\alpha \in \text{Act}$ 。⊥

说明：我们用 α_{φ} 直观表示： α 是与命题 φ 有关的活动。（参见文献 [8]。） $[\alpha_{\varphi}]\psi$ 可以看作是二元模态算子 $[\alpha](\varphi, \psi)$ 。

3.4.2 定义 $\langle W, R \rangle$ 是三元框架，当且仅当， W 是非空集，且 R 是 Act 上的映射，使得对每一 $\alpha \in \text{Act}$ ， R_{α} 是 W 上的三元通达关系。

称 $\langle W, R, [] \rangle$ 是三元模型，当且仅当， $\langle W, R \rangle$ 是框架且 $[]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。

所有三元框架的类记作 Frame3 。⊥

说明：以后我们用 $R_{\alpha}uvw$ 简单表示 $\langle w, u, v \rangle \in R_{\alpha}$ 。

3.4.3 真值集定义 令 $\langle W, R, [] \rangle$ 是三元模型。对每一复合公式 φ ，定义真值集 $[\varphi]$ 如下：

(1) $w \in [\neg\varphi] \Leftrightarrow w \notin [\varphi]$ ， (2) $w \in [\varphi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\varphi] \text{ 且 } w \in [\psi]$ ，

(3) $w \in [[\alpha_{\varphi}]\psi] \Leftrightarrow \forall uv \in W(R_{\alpha}uvw \Rightarrow u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\psi])$ 。⊥

$R_{\alpha}uvw$ 的直观意义是：活动 α 从初始状态 u 开始经过中间状态 w 最后达到结果状态 v 。

3.4.4 缩写定义 $\langle \alpha_{\varphi} \rangle \psi =_{\text{df}} \neg[\alpha_{\neg\varphi}]\neg\psi$ 。⊥

3.4.5 引理 $w \in \langle \alpha_{\varphi} \rangle \psi \Leftrightarrow \exists uv(R_{\alpha}uvw \text{ 且 } u \in [\varphi] \text{ 且 } v \in [\psi])$ 。⊥

3.4.6 定义 否定活动系统 **3NA0** 由 **PC** 和下列构成：

(RK1) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi / [\alpha_{\varphi}]\varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_{\varphi}]\varphi_n \rightarrow [\alpha_{\varphi}]\psi$ ，

(RK2) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi / [\alpha_{\varphi_1}]\psi \wedge \dots \wedge [\alpha_{\varphi_n}]\psi \rightarrow [\alpha_{\varphi}]\psi$ 。⊥

说明：当 $n=0$ 时，RK1 和 RK2 分别是 $\psi / [\alpha_{\varphi}]\psi$ 和 $\varphi / [\alpha_{\varphi}]\psi$ 。

3.4.7 定理 **3NA0** 相对 Frame3 框架可靠。

证明：任给三元框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[]$ 。

验证规则 RK1：设

① $[\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n] \subseteq [\psi]$ 。

任给 $w \in [[\alpha_{\varphi}]\varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_{\varphi}]\varphi_n]$ 。要证 $w \in [[\alpha_{\varphi}]\psi]$ 。据 3.4.3 (3)，只须证

② $\forall uv(R_{\alpha}uvw \Rightarrow u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\psi])$ 。

任给 $u, v \in W$ 使得 $R_{\alpha}uvw$ 。据 $w \in [[\alpha_{\varphi}]\varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_{\varphi}]\varphi_n]$ ，易见

$\forall uv(R_{\alpha}uvw \Rightarrow u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\varphi_1])$ ， $\dots$ ， $\forall uv(R_{\alpha}uvw \Rightarrow u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\varphi_n])$ 。

再据 $R_{\alpha}uvw$ ，易见

$u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\varphi_1]$ ， $\dots$ ， $u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\varphi_n]$ 。

所以 $u \in [\varphi] \text{ 或 } (v \in [\varphi_1] \text{ 且 } \dots \text{ 且 } v \in [\varphi_n])$ 。因此 $u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n]$ 。再据①，有 $u \in [\varphi] \text{ 或 } v \in [\psi]$ 。

验证规则 RK2：类似上面对 RK1 的验证。⊥

3.4.8 定义 定义 **3NA0** 的典范框架 $\langle W, R \rangle$: ① $W = \{w: w \text{ 是 } \mathbf{3NA0} \text{ 的极大一致集}\}$,

② $R = \{R_\alpha: \alpha \in \text{Act}\}$, 使得

$$R_\alpha = \{\langle u, w, v \rangle \in W^3: [\alpha_\phi]\psi \in w \Rightarrow \phi \in u \text{ 或 } \psi \in v\}, \quad \text{对每一 } \alpha \in \text{Act}.$$

定义 **3NA0** 的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如下: $\langle W, R \rangle$ 是 **3NA0** 的典范框架, 且

③ $[p] = |p|$, 对每一原子公式 p 。 $\dashv$

3.4.9 典范框架主引理 令 $\langle W, R \rangle$ 是 **3NA0** 的典范框架, 且令 $w \in W$ 。则

(1) $[\alpha_\phi]\psi \in w \Leftrightarrow \forall uv \in W (R_\alpha uv \Rightarrow \phi \in u \text{ 或 } \psi \in v)$ 。

(2) $\langle \alpha_\phi \rangle \psi \in w \Leftrightarrow \exists uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } \phi \in u \text{ 且 } \psi \in v)$ 。

证明: (1) “ $\Rightarrow$ ”: 设 $[\alpha_\phi]\psi \in w$ 。任给 $u, v \in W$ 使得 $R_\alpha uv$, 所以对每一 $\phi, \psi \in \text{Form}$,

$$[\alpha_\phi]\psi \in w \Rightarrow \phi \in u \text{ 或 } \psi \in v.$$

再据设定, 易得要证结果。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $[\alpha_\phi]\psi \notin w$ 。只须证

① $\exists uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } \neg \phi \in u \text{ 且 } \neg \psi \in v)$ 。

令 $X = \{\theta: [\alpha_\phi]\theta \in w\}$ 。先证

② $X \cup \{\neg \psi\}$ 一致。

假设②不成立, 则存在 $\theta_1, \dots, \theta_n \in X$ 使得 $\vdash \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \rightarrow \psi$ 。据规则 RK1, 我们有

③ $\vdash [\alpha_\phi]\theta_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_\phi]\theta_n \rightarrow [\alpha_\phi]\psi$ 。

因为 $\theta_1, \dots, \theta_n \in X$, 所以 $[\alpha_\phi]\theta_1, \dots, [\alpha_\phi]\theta_n \in w$, 所以据③, 有 $[\alpha_\phi]\psi \in w$ 。矛盾于设定。

令 $Y = \{\theta: [\alpha_\theta]\psi \in w\}$ 。再证

④ $Y \cup \{\neg \phi\}$ 一致。

假设④不成立, 则存在 $\theta_1, \dots, \theta_n \in Y$ 使得 $\vdash \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \rightarrow \phi$ 。据规则 RK2, 我们有

⑤ $\vdash [\alpha_{\theta_1}]\psi \wedge \dots \wedge [\alpha_{\theta_n}]\psi \rightarrow [\alpha_\phi]\psi$ 。

因为 $\theta_1, \dots, \theta_n \in Y$, 所以 $[\alpha_{\theta_1}]\psi, \dots, [\alpha_{\theta_n}]\psi \in w$, 所以据⑤, 有 $[\alpha_\phi]\psi \in w$ 。矛盾于设定。

据②, ④和 Lindenbaum-引理, 存在 $u, v \in W$ 使

$$\{\theta: [\alpha_\theta]\psi \in w\} \cup \{\neg \phi\} \subseteq u, \quad \{\theta: [\alpha_\theta]\theta \in w\} \cup \{\neg \psi\} \subseteq v.$$

由此易见 $R_\alpha uv$ 成立, 从而①成立。

(2) 我们有

$$\langle \alpha_\phi \rangle \psi \in w \Leftrightarrow \neg [\alpha_{\neg \phi}] \neg \psi \in w \quad \text{据 3.4.4}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_{\neg \phi}] \neg \psi \notin w \quad \text{据 3.1.14 (1)}$$

$$\Leftrightarrow \exists uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } \phi \in u \text{ 且 } \psi \in v). \quad \text{据 (1) } \dashv$$

如前易证典范模型基本定理, 从而易证:

3.4.10 定理 **3NA0** 相对 Frame3 框架完全。 $\dashv$

3.4.11 真值集定义 在 3.4.3 中增加:

(4.1) $w \in [\neg_\alpha \phi] \Leftrightarrow \exists uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } u \in [\phi] \text{ 且 } v \in [\neg \phi])$, 或

(4.2) $w \in [\neg_\alpha \phi] \Leftrightarrow \forall uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } u \in [\phi] \Rightarrow v \in [\neg \phi])$ 。 $\dashv$

3.4.12 定义 系统 **3NA1** 由 **3NA0** 和下列构成:

(NA1) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow \langle \alpha_\phi \rangle \neg \phi$ 。

系统 **3NA2** 由 **3NA0** 和下列构成:

(NA2) $\neg_\alpha \phi \leftrightarrow [\alpha_{\neg \phi}] \neg \phi$ 。 $\dashv$

说明: 易见这样定义的公理也是一种缩写公理。

3.4.13 定理

(1) **3NA1** 相对 Frame3 (真值集定义以 3.4.11 的 (4.1) 为特征) 框架可靠且完全。

(2) **3NA2** 相对 **Frame3** (真值集定义以 3.4.11 的 (4.2) 为特征) 框架可靠且完全。

证明: (1) 证明可靠性:

任给 $F = \langle W, R \rangle \in \text{3Frame}$ 和 F 上赋值 $[\]$ (真值集定义以 3.4.11 的 (4.1) 为特征)。

只须验证公理 **NA1**: 任给 $w \in W$, 则

$$\begin{aligned} w \in [\neg_\alpha \varphi] &\Leftrightarrow \exists uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } u \in [\varphi] \text{ 且 } v \in [\neg \varphi]) && \text{据 3.4.11 的 (4.1)} \\ &\Leftrightarrow w \in [\langle \alpha_\varphi \rangle \neg \varphi]. && \text{据 3.4.5} \end{aligned}$$

证明完全性: 定义 $\langle W, R \rangle$ 是 **NA1** 的典范框架, 且令 $w \in W$ 。下证:

$$\textcircled{3} \quad \neg_\alpha \varphi \in w \Leftrightarrow \exists uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } \varphi \in u \text{ 且 } \neg \varphi \in v).$$

我们有

$$\begin{aligned} \neg_\alpha \varphi \in w &\Leftrightarrow \langle \alpha_\varphi \rangle \neg \varphi \in w && \text{据 NA1} \\ &\Leftrightarrow \exists uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } \varphi \in u \text{ 且 } \neg \varphi \in v). && \text{据 3.4.9 (2)} \end{aligned}$$

(2) 证明可靠性:

任给 $F = \langle W, R \rangle \in \text{3Frame}$ 和 F 上赋值 $[\]$ (真值集定义以 3.4.11 的 (4.2) 为特征)。

只须验证公理 **NA2**: 任给 $w \in W$, 则

$$\begin{aligned} w \in [\neg_\alpha \varphi] &\Leftrightarrow \forall uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } u \in [\varphi] \Rightarrow v \in [\neg \varphi]) && \text{据 3.4.11 的 (4.2)} \\ &\Leftrightarrow \forall uv \in W (R_\alpha uv \Rightarrow u \in [\neg \varphi] \text{ 或 } v \in [\neg \varphi]) \\ &\Leftrightarrow w \in [[\alpha_\neg \varphi] \neg \varphi]. && \text{据 3.4.5} \end{aligned}$$

证明完全性: 定义 $\langle W, R \rangle$ 是 **NA1** 的典范框架, 且令 $w \in W$ 。下证

$$\textcircled{3} \quad \neg_\alpha \varphi \in w \Leftrightarrow \forall uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } \varphi \in u \Rightarrow \neg \varphi \in v):$$

$$\begin{aligned} \neg_\alpha \varphi \in w &\Leftrightarrow [\alpha_\neg \varphi] \neg \varphi \in w && \text{据 NA2} \\ &\Leftrightarrow \forall uv \in W (R_\alpha uv \Rightarrow \neg \varphi \in u \text{ 或 } \neg \varphi \in v) && \text{据 3.4.9 (1)} \\ &\Leftrightarrow \forall uv \in W (R_\alpha uv \text{ 且 } \varphi \in u \Rightarrow \neg \varphi \in v). \quad \dashv \end{aligned}$$

5. 相对 **Act** 刻画活动否定

前面我们考虑的活动否定皆相对单个活动定义。本小节我们要考虑相对全体活动定义的两否定概念: 全称活动否定和存在活动否定。

(1) 刻画全称活动否定

3.5.1 定义 (1) 令 Act_0 就是前面的 **Act**。

(2) 联立归纳定义所有公式的集合 **Form** 和所有活动的集合 **Act** 如下:

- ① $\text{At} \subseteq \text{Form}$; ② $\text{Act}_0 \subseteq \text{Act}$; ③ 若 $\varphi, \psi \in \text{Form}$, 则 $\neg \varphi, (\varphi \wedge \psi), \neg^\forall \varphi \in \text{Form}$;
④ 若 $\alpha \in \text{Act}$ 且 $\varphi \in \text{Form}$, 则 $[\alpha] \varphi \in \text{Form}$; ⑤ 若 $\varphi \in \text{Form}$, 则 $\varphi? \in \text{Act}$ 。 $\dashv$

说明: **Act** 中只有两种活动: 原子活动和形如 $\varphi?$ 的测试活动。⁶

$\varphi?$ 的直观意义是: 测试 φ , 若 φ 真则进行, 否则失败 (test φ ; proceed if true, fail if false)。

(参见文献 [1] 第 166 页。)

$\neg^\forall$ 称为全称活动否定算子。 $\neg^\forall \varphi$ 的直观意义是: 任给 α , 有 $\neg_\alpha \varphi$, 其中 $\neg_\alpha \varphi$ 如下规定:

3.5.2 缩写定义

$$\begin{aligned} (\text{Ad1}) \quad \neg_\alpha \varphi &=_{\text{df}} \varphi \wedge [\alpha] \neg \varphi. & (\text{Ad2}) \quad \neg_\alpha \varphi &=_{\text{df}} \varphi \wedge \neg [\alpha] \varphi. \\ (\text{Ad5}) \quad \neg_\alpha \varphi &=_{\text{df}} \varphi \rightarrow [\alpha] \neg \varphi. & (\text{Ad6}) \quad \neg_\alpha \varphi &=_{\text{df}} \varphi \rightarrow \neg [\alpha] \varphi. \\ (\text{Ad10}) \quad \neg_\alpha \varphi &=_{\text{df}} \mathbf{P}_\alpha \varphi \wedge \neg [\alpha] \varphi. \quad \dashv \end{aligned}$$

说明: 我们也可以如 3.2.1 和 3.2.10 那样引入缩写公理, 但这里引入缩写定义在证明可靠性定理和完全性定理时更简单得多。

3.5.3 定义 称 $\langle W, R, [\] \rangle$ 是 **Act** 的模型, 当且仅当, W 是非空集, $[\]$ 是从 **At** 到 $\mathcal{P}(W)$ 中的映射, 且 R 是定义域为 **Act** 的映射使得

对每一 $a \in \text{Act}_0$, R_a 是 W 上任意的二元通达关系; 且

⁶ 参见 [7] 第 23 页。这里我们为了简单, 不涉及通达关系的 3 种正则复合运算 $\cup$, $;$ 和 $*$ 。

对每一 $\psi? \in \text{Act}$, $R_{\psi?}$ 是如下递归定义的二元通达关系:

$$(\#) R_{\psi?} = \{ \langle w, w \rangle \in W^2 : w \in [\psi] \};$$

所有 Act 的模型的类记作 $\text{Model}(\text{Act})$ 。⊥

注意: (#) 是模型条件而不是框架条件, 所以下面我们只能证明模型可靠性定理和模型完全性定理。

3.5.4 定义 令 $\langle W, R, [\] \rangle$ 是 Act 的模型。 $R_{\alpha}(w) =_{\text{df}} \{ u \in W : w R_{\alpha} u \}$ 。⊥

3.5.5 真值集定义 令 $M = \langle W, R, [\] \rangle$ 是 Act 的模型。定义相对 M 的真值集 $[\varphi]$ 如下:

$$(1) - (3) \text{ 同 3.1.8 的 } (1) - (3), \quad (4) w \in [\neg^{\forall} \varphi] \Leftrightarrow \forall \alpha \in \text{Act} (w \in [\neg_{\alpha} \varphi])。 \perp$$

3.5.6 定义 考虑下面公式:

$$(U0) [\psi?] \varphi \leftrightarrow \psi \rightarrow \varphi。$$

$$(U1) \neg^{\forall} \varphi \rightarrow \neg_{\alpha} \varphi, \quad \text{对每一 } \alpha \in \text{Act}。 \quad (\text{其中 } \neg_{\alpha} \varphi \text{ 取 3.5.2 的某个定义})$$

$$(U2) \neg \neg^{\forall} \varphi \rightarrow \varphi。$$

系统 $\text{NA1}^{\forall} =_{\text{df}} \text{PDL0} + U0 + U1 + U2 + \text{Ad5}$ 。

系统 $\text{NA2}^{\forall} =_{\text{df}} \text{PDL0} + U0 + U1 + U2 + \text{Ad6}$ 。

系统 $\text{NA3}^{\forall} =_{\text{df}} \text{PDL0} + U0 + U1 + \text{Ad1}$ 。

系统 $\text{NA4}^{\forall} =_{\text{df}} \text{PDL0} + U0 + U1 + \text{Ad2}$ 。

系统 $\text{NA5}^{\forall} =_{\text{df}} \text{PDL0} + U0 + U1 + \text{Ad10}$ 。⊥

3.5.7 引理 (1) $\text{PDL0} + U0$ 有内定理 $\langle \psi? \rangle \varphi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ 。

(2) $\text{NA3}^{\forall}$, $\text{NA4}^{\forall}$ 和 $\text{NA5}^{\forall}$ 有内定理 $\neg \neg^{\forall} \varphi$ 。

证明: (1) 据测试公理 U0 易得。下面证 (2):

- ① $\varphi \rightarrow \varphi \wedge \varphi$ 据 TA
- ② $\varphi \rightarrow \langle \varphi? \rangle \varphi$ 据 (1)
- ③ $(\varphi \rightarrow \langle \varphi? \rangle \varphi) \rightarrow \neg \neg^{\forall} \varphi$ 据 U1, Ad1
- ④ $\neg \neg^{\forall} \varphi$ 。 据②, ③
- (3) ① $\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi$ 据 TA
- ② $\varphi \rightarrow [\varphi?] \varphi$ 据 U0
- ③ $(\varphi \rightarrow [\varphi?] \varphi) \rightarrow \neg \neg^{\forall} \varphi$ 据 U1, Ad2
- ④ $\neg \neg^{\forall} \varphi$ 。 据②, ③
- (4) ① $\text{P}_{\alpha} \varphi \rightarrow \neg \text{P}_{\alpha} \varphi? \rightarrow \varphi$ 据 TA
- ② $\text{P}_{\alpha} \varphi \rightarrow [\neg \text{P}_{\alpha} \varphi?] \varphi$ 据 U0
- ③ $(\text{P}_{\alpha} \varphi \rightarrow [\neg \text{P}_{\alpha} \varphi?] \varphi) \rightarrow \neg \neg^{\forall} \varphi$ 据 U1, Ad10
- ④ $\neg \neg^{\forall} \varphi$ 。 据②, ③ ⊥

说明: 据 (2), $\text{NA3}^{\forall}$, $\text{NA4}^{\forall}$ 和 $\text{NA5}^{\forall}$ 都不是恰当刻画全称活动否定的系统。

3.5.8 引理 $\text{NA1}^{\forall} - \text{NA2}^{\forall}$ 是协调的。

证明: 定义从当下模态语言到经典句子语言的 t-翻译如下:

$$\begin{aligned} t(p) &= p, & \text{对所有原子公式 } p \in \text{At}; \\ t(\neg \varphi) &= \neg t(\varphi); & t(\varphi \wedge \psi) &= t(\varphi) \wedge t(\psi); \\ t([a] \varphi) &= t(\varphi), & \text{对每一原子活动 } a \in \text{Act}; \\ t([\psi?] \varphi) &= t(\psi) \rightarrow t(\varphi), & \text{对每一 } \psi? \in \text{Act}; \\ t(\neg^{\forall} \varphi) &= \neg t(\varphi)。 \end{aligned}$$

证 $\text{NA1}^{\forall}$ 协调: 作为说明, 这里只考虑 U1 的 t-翻译。据上面的定义, $t(\neg^{\forall} \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow [\alpha] \neg \varphi))$ 成为下列公式之一:

$$\begin{aligned} \neg t(\varphi) \rightarrow t(\varphi) \rightarrow \neg t(\varphi), & \quad \text{若 } \alpha \text{ 是原子活动;} \\ \neg t(\varphi) \rightarrow t(\varphi) \rightarrow t(\psi) \rightarrow \neg t(\varphi), & \quad \text{若 } \alpha \text{ 是形如 } \psi? \text{ 的活动。} \end{aligned}$$

但这两个公式都是重言式。

证 **NA2**[∀]协调：证明如上。⊥

3.5.9 可靠性定理

NA1[∀]和 **NA2**[∀]相对 **Model(Act)**是可靠的（注意 3.5.5 的（4）随 $\neg_\alpha \phi$ 的不同而不同）。

证明：先证 **U0** 可靠：

$$\begin{aligned} w \in [[\psi?] \phi] &\Leftrightarrow R_{\psi?}(w) \subseteq [\phi] && \text{据 3.5.5 (3) (即 3.1.8 (3))} \\ &\Leftrightarrow \{ \langle u, u \rangle \in W^2 : u \in [\psi] \} (w) \subseteq [\phi] && \text{据 3.5.3 (#)} \\ &\Leftrightarrow w \in [\psi] \Rightarrow w \in [\phi] \\ &\Leftrightarrow w \in [\psi \rightarrow \phi] && \text{据 3.1.9} \end{aligned}$$

相对 **Ad5** 或 **Ad6** 证明 **U1** 可靠：据 3.5.5 (4) 显然。

相对 **Ad5** 或 **Ad6** 证明 **U2** 可靠：任给 $w \in W$ 使得 $w \in [\neg \neg^\forall \phi]$ ，据 3.5.5 (4)，存在 $\alpha \in \text{Act}$ 使得 $w \in [\neg \neg_\alpha \phi]$ ，因此存在 $\alpha \in \text{Act}$ 使得

$$\begin{aligned} w &\in [\phi \wedge \langle \alpha \rangle \phi], && \text{相对 Ad5;} \\ w &\in [\phi \wedge [\alpha] \phi], && \text{相对 Ad6.} \end{aligned}$$

因此我们总有 $w \in [\phi]$ 。

其他公理和规则的可靠性显然。⊥

3.5.10 典范模型定义 定义 **NA1**[∀]（或 **NA2**[∀]）的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如下：

$$\begin{aligned} W &= \{ w : w \text{ 是 } \mathbf{NA1}^\forall \text{ (或 } \mathbf{NA2}^\forall \text{) 的极大一致集} \}. \\ [p] &= |p|, \quad \text{对每一 } p \in \text{At}_0. \\ R &= \{ R_\alpha : \alpha \in \text{Act} \}, \text{ 其中} \\ R_a &= \{ \langle w, u \rangle \in W^2 : w^{-[a]} \subseteq u \}, \quad \text{对每一 } a \in \text{Act}_0; \quad ^7 \\ R_{\psi?} &= \{ \langle w, w \rangle \in W^2 : w \in |\psi| \}, \quad \text{对每一 } \psi \in \text{Form}. \quad \perp \end{aligned}$$

说明：易见 $\langle W, R, [] \rangle$ 是 **Act** 的模型。

3.5.11 典范模型主引理 定义 **NA1**[∀]或 **NA2**[∀]的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如上。则

$$[\alpha] \psi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_\alpha u \Rightarrow \psi \in u), \quad \text{对每一 } w \in W, \psi \in \text{Form 和 } \alpha \in \text{Act}.$$

证明：只须证：

- (1) $[a] \psi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_a u \Rightarrow \psi \in u)$, 且
 - (2) $[\psi?] \phi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (w R_{\psi?} u \Rightarrow \psi \in u)$ 。
- (1) 的证明：“ $\Rightarrow$ ”：显然。“ $\Leftarrow$ ”：用 **RK_α** 如通常可证。
- (2) 的证明：我们有

$$\begin{aligned} [\psi?] \phi \in w &\Leftrightarrow \psi \rightarrow \phi \in w && \text{据 U0} \\ &\Leftrightarrow \psi \in w \Rightarrow \phi \in w && \text{据 3.1.14 (1)} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W (w R_{\psi?} u \Rightarrow \phi \in u). && \text{据 } R_{\psi?} \text{ 的定义 } \quad \perp \end{aligned}$$

3.5.12 完全性定理

NA1[∀]—**NA2**[∀]相对 **Model(Act)**是完全的（注意 3.5.5 的（4）随 $\neg_\alpha \phi$ 的不同而不同）。

证明：（1）定义 **NA1**[∀]的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如上，且令 $w \in W$ 。下证：

- ① $\neg^\forall \phi \in w \Leftrightarrow \forall \alpha \in \text{Act} (\phi \rightarrow [\alpha] \neg \phi \in w)$ 。
- “ $\Rightarrow$ ”：据 **U1** 和 **Ad5** 显然。“ $\Leftarrow$ ”：设 $\neg^\forall \phi \notin w$ 。只须证
- ② 存在 $\alpha \in \text{Act}$ 使得 $\phi \wedge \langle \alpha \rangle \phi \in w$ 。

因为 $\neg^\forall \phi \notin w$ ，所以 $\neg \neg^\forall \phi \in w$ ，据公理 **U2**，有 $\phi \in w$ ，所以 $\phi \wedge (\phi \wedge \phi) \in w$ ，据 3.5.7，有 $\phi \wedge \langle \phi? \rangle \phi \in w$ 。所以②成立。完全性定理的其余证明如通常。

证明 **NA2**[∀]的完全性：定义 **NA2**[∀]的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如上，且令 $w \in W$ 。下证：

- ① $\neg^\forall \phi \in w \Leftrightarrow \forall \alpha \in \text{Act} (\phi \rightarrow \neg [\alpha] \phi \in w)$ 。

⁷ 其中 $w^{-[a]} = \{ \psi : [a] \psi \in w \}$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 据 U1 和 Ad6 显然。 “ $\Leftarrow$ ”: 设 $\neg^{\forall}\varphi \notin w$ 。只须证

② 存在 $\alpha \in \text{Act}$ 使得 $\varphi \wedge [\alpha]\varphi \in w$ 。

因为 $\neg^{\forall}\varphi \notin w$, 所以 $\neg^{\forall}\varphi \in w$, 据公理 U2, 有 $\varphi \in w$, 所以 $\varphi \wedge (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \in w$, 据 U0, 有 $\varphi \wedge [\neg\varphi?]\varphi \in w$ 。所以②成立。 $\dashv$

(2) 刻画存在活动否定

根据对称性, 这里的内容与前一小节的内容大部分相同或相似, 所以我们下面只提到不同之处。为了比较, 下面的标号也是前一小节标号的对偶。

3.5.1_D 定义 ……③_D 若 $\varphi, \psi \in \text{Form}$, 则 $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), \neg^{\exists}\varphi \in \text{Form}$; ……

$\neg^{\exists}$ 称为存在活动否定算子。 $\neg^{\exists}\varphi$ 的直观意义是: 存在活动 α 使 $\neg_{\alpha}\varphi$, 其中 $\neg_{\alpha}\varphi$ 如下规定:

3.5.2_D 缩写定义

(Ad1*) $\neg_{\alpha}\varphi =_{\text{df}} \neg\varphi \wedge [\alpha]\varphi$ 。 (Ad3) $\neg_{\alpha}\varphi =_{\text{df}} [\alpha]\neg\varphi$ 。 $\dashv$

3.5.3_D—3.5.4_D 与 3.5.3—3.5.4 相同。 $\dashv$

3.5.5_D …… (4_D) $w \in [\neg^{\exists}\varphi] \Leftrightarrow \exists \alpha \in \text{Act} (w \in [\neg_{\alpha}\varphi])$ 。 $\dashv$

3.5.6_D 定义 考虑下面公式:

(U0) $[\psi?]\varphi \leftrightarrow \psi \rightarrow \varphi$ 。

(U3) $\neg_{\alpha}\varphi \rightarrow \neg^{\exists}\varphi$, 对每一 $\alpha \in \text{Act}$ 。 (其中 $\neg_{\alpha}\varphi$ 取 3.5.2_D 的某个定义)

(U4) $\neg^{\exists}\varphi \rightarrow \neg\varphi$ 。

系统 **NA1³** =_{df} **PDL0** + U0 + U3 + U4 + Ad1*。

系统 **NA2³** =_{df} **PDL0** + U0 + U3 + Ad3。 $\dashv$

3.5.7_D 引理 **NA2³** 有内定理 $\neg^{\exists}\varphi$, 特别是 $\neg^{\exists}T$ 和 $\neg^{\exists}\perp$ 。

证明: ① $\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ 据 TA

② $[\neg\varphi?]\neg\varphi$ 据 U0

③ $[\neg\varphi?]\neg\varphi \rightarrow \neg^{\exists}\varphi$ 据 U3, Ad3

④ $\neg^{\exists}\varphi$ 。 据②, ③ $\dashv$

说明: 据上一引理, **NA2³** 似乎不是恰当刻画存在活动否定的系统。

3.5.8_D 引理 **NA1³** 是协调的。

证明: 定义 t -翻译如 3.5.8 的证明, 除了用 $t(\neg^{\exists}\varphi) = \neg t(\varphi)$ 替换 $t(\neg^{\forall}\varphi) = \neg t(\varphi)$ 。

作为说明, 这里只考虑 U3 的 t -翻译。易见 $t(\neg\varphi \wedge [\alpha]\varphi \rightarrow \neg^{\exists}\varphi)$ 成为下列公式之一:

$\neg t(\varphi) \wedge t(\varphi) \rightarrow \neg t(\varphi)$, 若 α 是原子活动;

$\neg t(\varphi) \wedge (t(\psi) \rightarrow t(\varphi)) \rightarrow \neg t(\varphi)$, 若 α 是形如 $\psi?$ 的活动。

但这两个公式都是重言式。 $\dashv$

3.5.9_D 可靠性定理 **NA1³** 相对 $\text{Model}(\text{Act})$ 是可靠的 ($\neg_{\alpha}\varphi$ 取 $\neg\varphi \wedge [\alpha]\varphi$)。

证明: U0 的可靠性如前证明。证明 U3 可靠: 据 3.5.5_D 的 (4_D) 显然。

证明 U4 可靠: 任给 $w \in W$ 使得 $w \in [\neg^{\exists}\varphi]$, 据 3.5.5_D 的 (4_D), 存在 $\alpha \in \text{Act}$ 使得 $w \in [\neg_{\alpha}\varphi]$, 所以 $w \in [\neg\varphi \wedge [\alpha]\varphi]$, 因此 $w \in [\neg\varphi]$ 。其他公理和规则的可靠性显然。 $\dashv$

3.5.10_D—3.5.11_D 类似 3.5.10—3.5.11。 $\dashv$

3.5.12_D 完全性定理 **NA1³** 相对 $\text{Model}(\text{Act})$ 是可靠且完全的 ($\neg_{\alpha}\varphi$ 取 $\neg\varphi \wedge [\alpha]\varphi$)。

证明: 定义 **NA1³** 的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如前, 且令 $w \in W$ 。下证:

① $\neg^{\exists}\varphi \in w \Leftrightarrow \exists \alpha \in \text{Act} (\neg\varphi \wedge [\alpha]\varphi \in w)$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $\neg^{\exists}\varphi \notin w$ 。则 $\neg\neg^{\exists}\varphi \in w$, 要证: $\forall \alpha \in \text{Act} (\neg\varphi \rightarrow \neg[\alpha]\varphi \in w)$ 。据 U3 和 Ad1* 显然。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $\neg^{\exists}\varphi \in w$ 。只须证

② 存在 $\alpha \in \text{Act}$ 使得 $\neg\varphi \wedge [\alpha]\varphi \in w$ 。

因为 $\neg^{\exists}\varphi \in w$, 所以据 U4, 有 $\neg\varphi \in w$, 所以 $\neg\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \varphi) \in w$, 再据 U0, 有 $\neg\varphi \wedge [\varphi?]\varphi \in w$ 。所以②成立。 $\dashv$

6. 用活动否定另一个活动

我们用形如 $\neg_\alpha\beta$ 的公式直观表示：通过活动 α 否定活动 β 。这也是一种很自然的想法。

下面我们列出几种刻画 $\neg_\alpha\beta$ 的逻辑。

第一种简单方案是用 $\neg_\alpha\beta$ 缩写 $[\alpha]\neg\langle\beta\rangle\top$ ，后者的直观意义是：活动 α 必使 β 不能做。故

(Ad7) $\neg_\alpha\beta =_{df} [\alpha][\beta]\perp$ 。

据此思路的一个弱化形式是用 $\neg_\alpha\beta$ 缩写 $\langle\alpha\rangle[\beta]\perp$ 。后者的直观意义是：活动 α 有可能使 β 不能做。所以 (Ad8) $\neg_\alpha\beta =_{df} \langle\alpha\rangle[\beta]\perp$ 。我们还可以引入缩写定义

(Ad9) $\neg_\alpha\beta =_{df} \langle\alpha\rangle\top\wedge[\beta]\perp$ 。

(Ad9) 的直观意义较自然：做 α 能使 β 不能做。此定义要比 (Ad7) 或 (Ad8) 优越，因为它和 **PC** 可以推出 $\neg_\alpha\alpha$ ：据 Ad9，有 $\neg_\alpha\alpha \leftrightarrow \neg\langle\alpha\rangle\top\vee\neg[\alpha]\perp$ ，所以有 $\neg_\alpha\alpha \leftrightarrow [\alpha]\perp\vee\neg[\alpha]\perp$ ，因此有 $\neg_\alpha\alpha$ 。

另一个我们认为有意思的方案是在简化了的逻辑 **DA1** 的基础上做工作（参见文献[8]）。为此我们先给出公式的形成规则：

3.6.1 定义 $p \mid \neg\phi \mid (\phi\wedge\psi) \mid [\alpha]\psi \mid D\alpha$ ，其中 $p \in \text{At}$ ， $\alpha, \beta \in \text{Act}$ 。 $\dashv$

说明： $D\alpha$ 的直观意义是：（某主体）做了活动 α 。这里的 $D\alpha$ 可以看作是文献[5]—[8]中 $A\alpha$ 的退化。

3.6.2 真值集定义 在真值集定义 3.1.8 中增加：(4) $w \in [D\alpha] \Leftrightarrow \exists u R_\alpha w$ 。 $\dashv$

说明：(4) 的右边是一个点框架条件，与具体赋值无关（参见文献[8]）。为了匹配点框架有效性，我们也可以如下定义（许多文献也这样定义⁸）框架有效性：

任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 。称 ϕ 在 w 中有效，当且仅当，对 F 上任意指派 $[\]$ ，有 $w \in [\phi]$ 。

称 ϕ 在 F 中有效，当且仅当，对每一 $w \in W$ ， ϕ 在 w 中有效。

实际上，经典模态逻辑中也有点框架有效性。例如，在死点 w 上任给 ϕ 总有 $w \in [\Box\phi]$ 。

3.6.3 定义 系统 **NAD** 是在 **PDL0** 中增加下列公理和规则得到的系统：

(D1) $[\alpha]D\alpha$ 。 (RD) $\langle\alpha\rangle D\alpha \rightarrow [\alpha]\phi / D\alpha \rightarrow \phi$ 。 $\dashv$

说明：若考虑复合活动 $\alpha\cup\beta$ 和 $\alpha;\beta$ ，且增加刻画这些活动的公理 $[\alpha\cup\beta]\phi \leftrightarrow [\alpha]\phi \wedge [\beta]\phi$ 和 $[\alpha;\beta]\phi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\phi$ ，则 $D(\alpha\cup\beta) \leftrightarrow D\alpha \vee D\beta$ 和 $D(\alpha;\beta) \rightarrow D\beta$ 是 **NAD** 的内定理。

3.6.4 缩写定义

(Ad10) $\neg_\alpha\beta =_{df} [\alpha]\neg D\beta$ ，或 (Ad11) $\neg_\alpha\beta =_{df} \langle\alpha\rangle\neg D\beta$ 。 $\dashv$

说明：Ad11 要比 Ad10 优越，因为据后者，从上述系统我们可以推出 $\neg_\alpha\alpha$ 。

3.6.5 定理 **NAD** 相对 Frame（真值集定义相对 3.6.2）可靠。

证明：任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[\]$ 。

验证公理 D1：假设 $[\alpha]D\alpha$ 在 M 中不有效，则存在 $w \in W$ 使得 $w \notin [[\alpha]D\alpha]$ 。据 3.1.8 (3)，

$R_\alpha(w) \not\subseteq [D\alpha]$ ，所以存在 $v \in W$ 使得① $w R_\alpha v$ ，和② $v \notin [D\alpha]$ 。据②和 3.6.2 (4)，我们有 $\sim \exists u R_\alpha v$ ，矛盾于①。

验证规则 R1：设 $\langle\alpha\rangle D\alpha \subseteq [[\alpha]\phi]$ 。证： $[D\alpha] \subseteq [\phi]$ 。任给 $w \in [D\alpha]$ ，据 3.6.2 (4)，有 $\exists u R_\alpha w$ ，故据 $w \in [D\alpha]$ ，有 $u \in \langle\alpha\rangle D\alpha$ ，再据设定，有 $u \in [[\alpha]\phi]$ ，再据 $u R_\alpha w$ ，有 $w \in [\phi]$ 。 $\dashv$

3.6.6 典范框架主引理 如 3.1.17 定义 $\langle W, R \rangle$ 是 **NAD** 的典范框架，且令 $w \in W$ 。则

$D\alpha \in w \Leftrightarrow \exists u R_\alpha w$ 。

证明：“ $\Rightarrow$ ”：设 $D\alpha \in w$ 。则

① $\langle\alpha\rangle D\alpha \in w^{+\langle\alpha\rangle}$ 。

先证：② $w^{+\langle\alpha\rangle}$ 是一致的。假设②不成立，则据①，易见存在 $\langle\alpha\rangle\phi_1, \dots, \langle\alpha\rangle\phi_n \in w^{+\langle\alpha\rangle}$ 使得 $\vdash \langle\alpha\rangle\phi_1 \wedge \dots \wedge \langle\alpha\rangle\phi_n \rightarrow \neg\langle\alpha\rangle D\alpha$ 。

⁸ 参见 [7] 的 124—125 页。

据 3.1.5 (6), 有 $\vdash \langle \alpha \rangle (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \neg \langle \alpha \rangle D\alpha$ 。所以 $\vdash \langle \alpha \rangle D\alpha \rightarrow [\alpha] \neg (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ 。据推理规则 RD, 有 $\vdash D\alpha \rightarrow \neg (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ 。所以

$$\textcircled{3} \quad \vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg D\alpha。$$

因为 $\langle \alpha \rangle \varphi_1, \dots, \langle \alpha \rangle \varphi_n \in w^{+\langle \alpha \rangle}$, 所以 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w$, 因此据 $\textcircled{3}$, 有 $\neg D\alpha \in w$, 矛盾于设定。所以 $\textcircled{2}$ 成立。据 $\textcircled{2}$ 和 Lindenbaum-引理, $\exists u \in W(w^{+\langle \alpha \rangle} \subseteq u)$, 再据 3.1.16 (2), 有

$$\textcircled{4} \quad \exists u \in W(u^{-[\alpha]} \subseteq w),$$

因此 $\exists u R_\alpha w$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $D\alpha \notin w$ 。只须证: $\sim \exists u R_\alpha w$ 。假设 $\exists u R_\alpha w$, 所以有 $\textcircled{4}$ 。因为 $D\alpha \notin w$, 所以据 $\textcircled{4}$, 有 $D\alpha \notin u^{-[\alpha]}$, 因此 $[\alpha]D\alpha \notin u$ 。矛盾于公理 $[\alpha]D\alpha$ 属于 u 。 $\vdash$

如前易证典范模型基本定理, 从而易证:

3.6.7 定理 NAD 相对 Frame 框架完全。 $\vdash$

我们还可以如下考虑对 $\neg_\alpha \beta$ 的解释:

- (1) $w \in [\neg_\alpha \beta] \Leftrightarrow w \in [[\alpha]D\beta]$, (其中 β 是 β 的逆活动⁹)
- (2) $w \in [\neg_\alpha \beta] \Leftrightarrow w \in [\neg_\alpha D\beta]$, (其中 $\neg_\alpha \varphi$ 如前某个定义规定)
- (3) $w \in [\neg_\alpha \beta] \Leftrightarrow w \in [D\alpha > \neg D\beta]$, (其中 $>$ 是条件句算子)
- (4) $w \in [\neg_\alpha \beta] \Leftrightarrow w \in [D\alpha > D\beta]$ 。

(1) 的直观意义是: 做活动 α 必逆转活动 β 。例如, 敌军从 A 点进攻到 B 点, 我军的反攻迫使敌军从 B 点退回 A 点。

对这些语义的进一步研究, 我们将另外发表论文。

四、对普遍活动可能性的刻画

在上面的研究中我们得到一个副产品。简介一下, 也许读者有兴趣。

4.1 定义 联立归纳定义所有公式的集合 Form 和所有活动的集合 Act 如下:

- ① $At \subseteq \text{Form}$; ② $Act_0 \subseteq \text{Act}$;
- ③ 若 $\varphi, \psi \in \text{Form}$, 则 $\neg \varphi, (\varphi \wedge \psi), \langle \text{Act} \rangle \varphi \in \text{Form}$;
- ④ 若 $\alpha \in \text{Act}$ 且 $\varphi \in \text{Form}$, 则 $[\alpha]\varphi \in \text{Form}$; ⑤ 若 $\varphi \in \text{Form}$, 则 $\varphi? \in \text{Act}$ 。 $\vdash$

4.2 定义 类似 3.5.3。 $\vdash$

4.3 真值集定义 类似 3.5.5, 除了

$$(4) \quad w \in [\langle \text{Act} \rangle \varphi] \Leftrightarrow \forall \alpha \in \text{Act} (w \in [\langle \alpha \rangle \varphi])。 \vdash$$

说明: 据 (4), $\langle \text{Act} \rangle$ 算子刻画的是一种普遍活动可能性(universal action possibility): 做任何活动都有可能使 φ 成立。

4.4 定义 系统 UAP 定义为 PDL0 加下列公理:

- (U0) $[\psi?]\varphi \leftrightarrow \psi \rightarrow \varphi$ 。
- (UA1) $\langle \text{Act} \rangle \varphi \rightarrow \langle \alpha \rangle \varphi$, $\forall \alpha \in \text{Act}$ 。
- (UA2) $\neg \langle \text{Act} \rangle \varphi \rightarrow \neg \varphi$ 。 $\vdash$

4.5 定义 定义 $[\text{Act}]\varphi =_{\text{df}} \neg \langle \text{Act} \rangle \neg \varphi$ 。 $\vdash$

4.6 引理 系统 UAP 有下列内定理:

- (1) $\varphi \rightarrow \langle \text{Act} \rangle \varphi$, $\forall \alpha \in \text{Act}$ 。
- (2) $[\alpha]\varphi \rightarrow [\text{Act}]\varphi$, $\forall \alpha \in \text{Act}$ 。
- (3) $[\text{Act}]\varphi \rightarrow \varphi$, $\forall \alpha \in \text{Act}$ 。
- (4) $[\alpha]\varphi \rightarrow \varphi$, $\forall \alpha \in \text{Act}$ 。
- (5) $\langle \text{Act} \rangle \varphi \leftrightarrow \langle \alpha \rangle \varphi$, $\exists \alpha \in \text{Act}$ 。
- (6) $[\text{Act}]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi$, $\exists \alpha \in \text{Act}$ 。

证明: 逆否 UA2 有 (1)。据 UA1, 我们有 (2)。据 UA2 有 (3)。

⁹ 关于逆活动的定义请见 [1] 的第 177 页。

据 (2) 和 (3), 有 (4)

证 (5): 据 UA1, 有 $\langle \text{Act} \rangle \varphi \rightarrow \langle \alpha \rangle \varphi$ 。另一方面, 据 U0, 有 $\langle \varphi? \rangle \varphi \rightarrow \varphi \wedge \varphi$, 加之有 $\varphi \wedge \varphi \rightarrow \varphi$, 所以据 (1), 有 $\langle \varphi? \rangle \varphi \rightarrow \langle \text{Act} \rangle \varphi$ 。

(6) 据 (5) 易得。⊥

说明: 据 (1), (2), (3) 和 UA1, 我们有序列:

$$[\alpha]\varphi \rightarrow [\text{Act}]\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \langle \text{Act} \rangle \varphi \rightarrow \langle \alpha \rangle \varphi, \quad \forall \alpha \in \text{Act}.$$

这个序列说明, 我们找到的 $[\text{Act}]\varphi$ 和 $\langle \text{Act} \rangle \varphi$ 细化了原来的序列 $[\alpha]\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \langle \alpha \rangle \varphi$ (当然这个序列在语义上对应刻画活动的关系是自返的)。

4.7 引理 UAP 是协调的。

证明: 定义 t -翻译如 3.5.8 的证明, 除了用 $t(\langle \text{Act} \rangle \varphi) = t(\varphi)$ 替换 $t(\neg^V \varphi) = \neg t(\varphi)$ 。

作为说明, 这里只考虑 UA1 的 t -翻译。易见 $t(\langle \text{Act} \rangle \varphi \rightarrow \langle \alpha \rangle \varphi)$ 成为下列公式之一:

$$\begin{aligned} t(\varphi) \rightarrow t(\varphi), & \quad \text{若 } \alpha \text{ 是原子活动;} \\ t(\varphi) \rightarrow t(\psi) \rightarrow t(\varphi), & \quad \text{若 } \alpha \text{ 是形如 } \psi? \text{ 的活动。} \end{aligned}$$

但这两个公式都是重言式。⊥

4.8 定理 令 X 是 $\text{Model}(\text{Act})$ 中所有自返模型构成的类: 对每一 $a \in \text{Act}_0$, R_a 是 W 上自返关系。(注意: 据 3.5.3, 每一形如 $R_{\psi?}$ 的关系总是自返的。) 则 **UAP** 相对 X 可靠且完全。

证明: 证明可靠性。任给 X 中模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 。U0 的可靠性如前证明 (参见 3.5.9)。

证明 UA1 可靠: 据 4.3 (4) 显然。

证明 UA2 可靠: 任给 $w \in W$ 使得 $w \in [\neg \langle \text{Act} \rangle \varphi]$, 据 4.3 (4), 存在 $\alpha \in \text{Act}$ 使得 $w \in [\neg \langle \alpha \rangle \varphi]$, 所以据自返性有 $w \in [\neg \varphi]$ 。其他公理和规则的可靠性显然。

证明完全性: 定义 **UAP** 的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如 3.5.10, 且令 $w \in W$ 。下证:

① $\langle \text{Act} \rangle \varphi \in w \Leftrightarrow \forall \alpha \in \text{Act} (\langle \alpha \rangle \varphi \in w)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 据公理 $\langle \text{Act} \rangle \varphi \rightarrow \langle \alpha \rangle \varphi$ 显然。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $\langle \text{Act} \rangle \varphi \notin w$ 。则 $\neg \langle \text{Act} \rangle \varphi \in w$, 要证:

② $\exists \alpha \in \text{Act} (\neg \langle \alpha \rangle \varphi \in w)$ 。

因为 $\neg \langle \text{Act} \rangle \varphi \in w$, 所以据公理 UA2, 有 $\neg \varphi \in w$, 所以 $\neg(\varphi \wedge \varphi) \in w$, 再据测试公理 U0, 有 $\neg \langle \varphi? \rangle \varphi \in w$ 。所以②成立。据①易证典范模型基本定理, 从而易证完全性定理。⊥

五、知道活动弱优越关系

李小五在其 [6] 提出 3 类逻辑: **KA1**, **KA2** 和 **ACK**。现在我们在 **KA1** 和 **ACK** 的基础上提出 **KA3**, 用于刻画知道弱优越关系。

5.1 定义 $p \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K\varphi \mid [\alpha]\varphi \mid K\alpha \mid K\alpha\beta$, 其中 $p \in \text{At}$, $\alpha, \beta \in \text{Act}$ 。⊥

5.2 定义 称 $\langle W, R_K, \underline{R} \rangle$ 是框架, 当且仅当, W 是非空集, R_K 是 W 上的二元通达关系, 且 $\underline{R} = \{R_\alpha: \alpha \in \text{Act}\}$ 使得对每一 $\alpha \in \text{Act}$, R_α 是 W 上的二元通达关系。

称 $\langle W, R_K, \underline{R}, [] \rangle$ 是模型, 当且仅当, $\langle W, R_K, \underline{R} \rangle$ 是框架且 $[]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射, 其中 $P(W)$ 是 W 的幂集。⊥

5.3 定义 令 $\langle W, R_K, \underline{R} \rangle$ 是框架。任给 $w \in W$ 。

$$(1) R_K(w) =_{\text{df}} \{u \in W: w R_K u\}, \quad (2) R_\alpha(w) =_{\text{df}} \{u \in W: w R_\alpha u\}, \quad \forall \alpha \in \text{Act}.$$

(3) 任给集合 X , 定义有界量词表达式如下:

$$\forall x \in X \varphi =_{\text{df}} \forall x (x \in X \rightarrow \varphi), \quad \exists x \in X \varphi =_{\text{df}} \exists x (x \in X \wedge \varphi). \quad \perp$$

5.4 真值集定义 令 $\langle W, R_K, \underline{R}, [] \rangle$ 是模型。定义 φ 相对 $\langle W, R_K, \underline{R}, [] \rangle$ 的真值集 $[\varphi]$ 如下:

$$(1) w \in [\neg \varphi] \Leftrightarrow w \notin [\varphi], \quad (2) w \in [\varphi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\varphi] \text{ 且 } w \in [\psi],$$

$$(3) w \in [K\varphi] \Leftrightarrow R_K(w) \subseteq [\varphi], \quad (4) w \in [[\alpha]\varphi] \Leftrightarrow R_\alpha(w) \subseteq [\varphi],$$

$$(5) w \in [K\alpha] \Leftrightarrow \forall u \in R_K(w) (R_K(u) \subseteq R_\alpha(u)), \quad (\text{点框架条件})$$

$$(6) w \in [K\alpha\beta] \Leftrightarrow \forall u \in R_K(w) (R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u)). \quad (\text{点框架条件}) \quad \perp$$

说明：从（6）的语义可见，知道活动 α 弱优越活动 β 就是知道 β 产生的结果 α 都能产生。例如，在某个状态下，我们知道走产生的结果跑都能产生：达到目的地、达到健身效果、……。这也就是所谓弱优越（不劣于）称谓的来源。

弱优越关系实际我们在 [6] 的 **ACK** 中已用 $\alpha \geq \beta$ 表示。形如 $K\alpha\beta$ 的公式也在那里给出，只是在那里，我们把 $K\alpha\beta$ 的直观意义笼统理解为：（主体）知道 α 和 β 有某种关联， $K\alpha\beta$ 的形式语义用邻域语义给出，没有很好揭示弱优越关系的基本性质。例如，自返和传递性。

5.5 定义 称 $\langle W, R_K, R \rangle$ 是 **ka3**-框架，当且仅当，下列框架条件成立：

$$(ka1) \quad \forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\alpha(u) \forall x \in R_K(v) (R_K(x) \subseteq R_\alpha(x)) \Rightarrow \forall v \in R_K(u) \forall x \in R_K(v) (R_K(x) \subseteq R_\alpha(x))) \\ \Rightarrow \forall u \in R_K(w) (R_K(u) \subseteq R_\alpha(u)).$$

$$(ka3) \quad \forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\beta(u) \forall x \in R_K(v) (R_\alpha(x) \subseteq R_\beta(x)) \Rightarrow \forall v \in R_\alpha(u) \forall x \in R_K(v) (R_\alpha(x) \subseteq R_\beta(x))) \\ \Rightarrow \forall u \in R_K(w) (R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u)).$$

所有的 **ka3**-框架的类记作 $\text{Frame}(\mathbf{ka3})$ 。⊥

说明：由于 5.4 的（5）和（6）都是点框架条件，所以上述条件可以简写为：

$$(ka1) \quad \forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\alpha(u) (v \in [K\alpha]) \Rightarrow \forall v \in R_K(u) (v \in [K\alpha])) \Rightarrow w \in [K\alpha],$$

$$(ka3) \quad \forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\beta(u) (v \in [K\alpha\beta]) \Rightarrow \forall v \in R_\alpha(u) (v \in [K\alpha\beta])) \Rightarrow w \in [K\alpha\beta].$$

甚至简写为：

$$(ka1) \quad \forall u \in R_K(w) (u \in [[\alpha]K\alpha] \Rightarrow u \in [KK\alpha]) \Rightarrow w \in [K\alpha],$$

$$(ka3) \quad \forall u \in R_K(w) (u \in [[\beta]K\alpha\beta] \Rightarrow u \in [[\alpha]K\alpha\beta]) \Rightarrow w \in [K\alpha\beta].$$

上面两式提到的公式可以称为绝对赋值公式。相对这样的公式，我们还可以如通常定义它们的布尔组合的绝对赋值（例如用上面两式的 $\Rightarrow$ 直接定义 $\rightarrow$ 的绝对赋值），从而最终把上面两式简化为下面的框架条件！

$$(ka1) \quad w \in [K([\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha) \rightarrow K\alpha], \quad (ka3) \quad w \in [K([\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta) \rightarrow K\alpha\beta].$$

当然，为了让读者看清内部细节，我们今后还是考虑 5.5 中的 (ka1) 和 (ka3)。

5.6 定义 知道活动系统 **KA3** 定义如下：对所有 $\alpha, \beta \in \text{Act}$ 和 $\phi, \psi \in \text{Form}$,

TA 和 MP 如前定义，

$$(K_K) \quad K(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow K\phi \rightarrow K\psi,$$

$$(K_\alpha) \quad [\alpha](\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha]\phi \rightarrow [\alpha]\psi,$$

$$(KA1) \quad K\alpha \rightarrow K([\alpha]\phi \rightarrow K\phi),$$

$$(KA2) \quad K([\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha) \rightarrow K\alpha,$$

$$(KA3) \quad K\alpha\beta \rightarrow K([\beta]\phi \rightarrow [\alpha]\phi),$$

$$(KA4) \quad K([\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta) \rightarrow K\alpha\beta,$$

$$(RN_K) \quad \phi / K\phi,$$

$$(RN_\alpha) \quad \phi / [\alpha]\phi. \perp$$

注意：这里的 KA1 与 [6] 的 **KA1** 的公理 KA（即 $K\alpha \rightarrow [\alpha]\phi \rightarrow K\phi$ ）不同。KA 是建模者关于主体的认知规律（传统的 T 公理 $K\phi \rightarrow \phi$ 也在此意义上理解），而 KA1 是主体自身的认知规律，带有反思性。

令 **S** 是去掉 **KA3** 中关于 $K\alpha\beta$ 的两条公理 KA3 和 KA4 得到的系统。易见，**S** 是 **KA1** 的一个变种。

5.7 引理 下面是 **KA3** 的导出规则和内定理：

$$(1) \quad \phi \rightarrow \psi / K\phi \rightarrow K\psi,$$

$$(2) \quad \phi \rightarrow \psi / [\alpha]\phi \rightarrow [\alpha]\psi,$$

$$(3) \quad \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \phi / K\phi_1 \wedge \dots \wedge K\phi_n \rightarrow K\phi,$$

$$(4) \quad \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \phi / [\alpha]\phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha]\phi_n \rightarrow [\alpha]\phi,$$

$$(5) \quad K\alpha \leftrightarrow K([\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha),$$

$$(6) \quad K\alpha\beta \leftrightarrow K([\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta),$$

$$(7) \quad K\alpha\alpha,$$

$$(8) \quad K\alpha\beta \wedge K\beta\gamma \rightarrow K\alpha\gamma.$$

证明：如通常可证（1）—（4）。据 KA1 和 KA2 易得（5）。据 KA3 和 KA4 易得（6）。据 RN_K 和 KA4 易得（7）。下证（8）：

$$\textcircled{1} \quad ([\beta]K\alpha\gamma \rightarrow [\alpha]K\alpha\gamma) \wedge ([\gamma]K\alpha\gamma \rightarrow [\beta]K\alpha\gamma) \rightarrow ([\gamma]K\alpha\gamma \rightarrow [\alpha]K\alpha\gamma) \quad \text{TA}$$

$$\textcircled{2} \quad K([\beta]K\alpha\gamma \rightarrow [\alpha]K\alpha\gamma) \wedge K([\gamma]K\alpha\gamma \rightarrow [\beta]K\alpha\gamma) \rightarrow K([\gamma]K\alpha\gamma \rightarrow [\alpha]K\alpha\gamma) \quad \textcircled{1}, (3)$$

$$\textcircled{3} \quad K\alpha\beta \rightarrow K([\beta]K\alpha\gamma \rightarrow [\alpha]K\alpha\gamma) \quad \text{KA3}$$

- | | |
|---|-----------------|
| ④ $K\beta\gamma \rightarrow K([\gamma]K\alpha\gamma \rightarrow [\beta]K\alpha\gamma)$ | KA3 |
| ⑤ $K\alpha\beta \wedge K\beta\gamma \rightarrow K([\gamma]K\alpha\gamma \rightarrow [\alpha]K\alpha\gamma)$ | ③, ④, ② |
| ⑥ $K\alpha\beta \wedge K\beta\gamma \rightarrow K\alpha\gamma$ | ⑤, KA4 $\vdash$ |

说明：从最后两个内定理可见，弱优越关系至少是自返和传递的。

5.8 定理 KA3 相对 Frame(ka3)是可靠的。

证明：任给 **ka3**-框架 $F = \langle W, R_K, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[]$ 。

公理 TA, K_K 和 K_α , 规则 MP, RN_K 和 RN_α 的验证如通常。

验证公理 KA1：任给 $w \in [K\alpha]$ 。据 5.4 (5)，有

- ① $\forall u \in R_K(w)(R_K(u) \subseteq R_\alpha(u))$ 。

任给 $u \in R_K(w)$ ，据①有

- ② $R_K(u) \subseteq R_\alpha(u)$ 。

任给公式 ϕ ，据②易证 $u \in [[\alpha]\phi \rightarrow K\phi]$ ，再据 u 的任意性和 5.4 (3)，有 $w \in [K([\alpha]\phi \rightarrow K\phi)]$ 。

验证公理 KA2：任给 $w \in [K([\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha)]$ 。据 5.4 (3)，有

- ① $\forall u \in R_K(w)(u \in [[\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha])$ 。

所以据 5.4 (4)，(3) 和 (5)，有

- ② $\forall u \in R_K(w)(\forall v \in R_\alpha(u)\forall x \in R_K(v)(R_K(x) \subseteq R_\alpha(x)) \Rightarrow \forall v \in R_K(u)\forall x \in R_K(v)(R_K(x) \subseteq R_\alpha(x)))$ 。

据 5.5 的(ka1)，有 $\forall u \in R_K(w)(R_K(u) \subseteq R_\alpha(u))$ 。再据 5.4 (5)，有 $w \in [K\alpha]$ 。

验证公理 KA3：任给 $w \in [K\alpha\beta]$ 。据 5.4 (6)，有

- ① $\forall u \in R_K(w)(R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u))$ 。

任给 $u \in R_K(w)$ ，据①有

- ② $R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u)$ 。

任给公式 ϕ ，据②易证 $u \in [[\beta]\phi \rightarrow [\alpha]\phi]$ ，再据 u 的任意性和 5.4 (3)，有 $w \in [K([\beta]\phi \rightarrow [\alpha]\phi)]$ 。

验证公理 KA4：任给 $w \in [K([\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta)]$ 。据 5.4 (3)，有

- ① $\forall u \in R_K(w)(u \in [[\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta])$ 。

所以据 5.4 (4) 和 (6)，有

- ② $\forall u \in R_K(w)(\forall v \in R_\beta(u)\forall x \in R_K(v)(R_\alpha(x) \subseteq R_\beta(x)) \Rightarrow \forall v \in R_\alpha(u)\forall x \in R_K(v)(R_\alpha(x) \subseteq R_\beta(x)))$ 。

据 5.5 的(ka3)，有 $\forall u \in R_K(w)(R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u))$ 。再据 5.4 (6)，有 $w \in [K\alpha\beta]$ 。 $\vdash$

5.9 定义 定义 **KA3** 的典范模型 $\langle W, R_K, R, [] \rangle$ 如下：

$W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}; \quad R_K = \{\langle w, u \rangle \in W^2: w^{-K} \subseteq u\};$

$R = \{R_\alpha: \alpha \in \text{Act}\}$ 使得 $R_\alpha = \{\langle w, u \rangle \in W^2: w^{-[\alpha]} \subseteq u\}$ ，对每一 $\alpha \in \text{Act}$ ；且

$[p] = |p|$ ，对每一原子公式 $p \in \text{At}$ 。

$\langle W, R_K, R \rangle$ 称为 **KA3** 的典范框架。 $\vdash$

5.10 典范框架主引理 令 $\langle W, R_K, R \rangle$ 是 **KA3** 的典范框架且 $w \in W$ 。则

- | | |
|--|---|
| (1) $K\phi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(wR_K u \Rightarrow \phi \in u)$ 。 | (2) $[\alpha]\phi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(wR_\alpha u \Rightarrow \phi \in u)$ 。 |
| (3) $K\alpha \in w \Leftrightarrow \forall u \in R_K(w)(R_K(u) \subseteq R_\alpha(u))$ 。 | (4) $K\alpha\beta \in w \Leftrightarrow \forall u \in R_K(w)(R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u))$ 。 |

证明：(1) 和 (2) 如通常证明。证明 (3) “ $\Rightarrow$ ”：设 $K\alpha \in w$ 。据公理 KA1，有

- ① $K([\alpha]\phi \rightarrow K\phi) \in w$ ，对所有公式 ϕ 。

要证：② $\forall u \in R_K(w)(R_K(u) \subseteq R_\alpha(u))$ 。任给 $u \in R_K(w)$ ，只须证

- ③ $R_K(u) \subseteq R_\alpha(u)$ 。

任给 $v \in R_K(u)$ ，只须证 $v \in R_\alpha(u)$ ，即要证④ $u^{-[\alpha]} \subseteq v$ 。任给 $\phi \in u^{-[\alpha]}$ ，最后只须证⑤ $\phi \in v$ 。因为 $\phi \in u^{-[\alpha]}$ ，所以⑥ $[\alpha]\phi \in u$ 。因为 $u \in R_K(w)$ ，所以据①和 (1)，有 $[\alpha]\phi \rightarrow K\phi \in u$ 。再据⑥，有 $K\phi \in u$ ，因为 $v \in R_K(u)$ ，所以 $u^{-K} \subseteq v$ ，因此有⑤。

“ $\Leftarrow$ ”：设②成立。据公理 KA2，只须证：

- ⑦ $K([\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha) \in w$ 。

任给 $u \in R_K(w)$, 据②, 有③。为了证明⑦, 据 (1) 和 $\forall u \in R_K(w)$, 只须证

$$\textcircled{8} \quad [\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha \in u.$$

设⑨ $[\alpha]K\alpha \in u$ 。最后只须证⑩ $KK\alpha \in u$ 。任给 $v \in R_K(u)$, 据③, 有 $u^{-[\alpha]} \subseteq v$ 。据⑨, 有 $K\alpha \in v$ 。再据 $\forall v \in R_K(u)$ 和 (1), 易得⑩。

(4) “ $\Rightarrow$ ”: 设 $K\alpha\beta \in w$ 。据公理 KA3, 有

$$\textcircled{1} \quad K([\beta]\varphi \rightarrow [\alpha]\varphi) \in w, \quad \text{对所有公式 } \varphi.$$

要证② $\forall u \in R_K(w)(R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u))$ 。任给 $u \in R_K(w)$, 只须证③ $R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u)$ 。任给 $v \in R_\alpha(u)$, 只须证 $v \in R_\beta(u)$, 即要证④ $u^{-[\beta]} \subseteq v$ 。任给 $\varphi \in u^{-[\beta]}$, 最后只须证⑤ $\varphi \in v$ 。因为 $\varphi \in u^{-[\beta]}$, 所以⑥ $[\beta]\varphi \in u$ 。因为 $u \in R_K(w)$, 故据①和 (1), 有: $[\beta]\varphi \rightarrow [\alpha]\varphi \in u$ 。再据⑥, 有 $[\alpha]\varphi \in u$, 因为 $v \in R_\alpha(u)$, 所以 $u^{-[\alpha]} \subseteq v$, 因此有⑤。

“ $\Leftarrow$ ”: 设②成立。据公理 KA4, 只须证:

$$\textcircled{7} \quad K([\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta) \in w.$$

任给 $u \in R_K(w)$, 据②, 有③。为了证明⑦, 据 (1) 和 $\forall u \in R_K(w)$, 只须证

$$\textcircled{8} \quad [\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta \in u.$$

设⑨ $[\beta]K\alpha\beta \in u$ 。最后只须证⑩ $[\alpha]K\alpha\beta \in u$ 。任给 $v \in R_\alpha(u)$, 据③, 有 $u^{-[\beta]} \subseteq v$ 。据⑨, 有 $K\alpha\beta \in v$ 。再据 $\forall v \in R_\alpha(u)$ 和 (2), 易得⑩。┐

5.11 定理 KA3 相对 Frame(ka3) 是完全的。

证明: 令 $F = \langle W, R_K, R \rangle$ 是 KA3 的典范框架。下面验证 F 满足 5.5 给出的框架条件。

验证(ka1): 任给 $w \in W$ 使得

$$\forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\alpha(u) \forall x \in R_K(v) (R_K(x) \subseteq R_\alpha(x)) \Rightarrow \forall v \in R_K(u) \forall x \in R_K(v) (R_K(x) \subseteq R_\alpha(x))).$$

据主引理 5.10 (3), 有

$$\forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\alpha(u) (K\alpha \in v \Rightarrow \forall v \in R_K(u) (K\alpha \in v))).$$

再据主引理 (1) 和 (2), 有 $\forall u \in R_K(w) ([\alpha]K\alpha \in u \Rightarrow KK\alpha \in u)$, 故

$$\forall u \in R_K(w) ([\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha \in u),$$

再据主引理 (1), 有 $K([\alpha]K\alpha \rightarrow KK\alpha) \in w$, 再据公理 AK1, 有 $K\alpha \in w$ 。再据主引理 (3), 有

$$\forall u \in R_K(w) (R_\alpha(u) \subseteq R_\alpha(u)).$$

验证(ka3): 任给 $w \in W$ 使得

$$\forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\beta(u) \forall x \in R_K(v) (R_\alpha(x) \subseteq R_\beta(x)) \Rightarrow \forall v \in R_\alpha(u) \forall x \in R_K(v) (R_\alpha(x) \subseteq R_\beta(x))).$$

据主引理 (4), 有 $\forall u \in R_K(w) (\forall v \in R_\beta(u) (K\alpha\beta \in v \Rightarrow \forall v \in R_\alpha(u) (K\alpha\beta \in v)))$ 。再据 (2), 有

$$\forall u \in R_K(w) ([\beta]K\alpha\beta \in u \Rightarrow [\alpha]K\alpha\beta \in u),$$

因此 $\forall u \in R_K(w) ([\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta \in u)$, 再据 (1), 有 $K[\beta]K\alpha\beta \rightarrow [\alpha]K\alpha\beta \in w$, 再据公理 AK3, 有 $K\alpha\beta \in w$ 。再据主引理 (4), 有 $\forall u \in R_K(w) (R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u))$ 。完全性的其余的证明如通常。┐

从上面的结果看, KA1 和 KA3 是不要框架条件的, 而 KA2 和 KA4 要 (参见 5.5)。我们看到, 对应 KA2 和 KA4 的框架条件可不那么自然, 为此我们可以去掉 KA2 和 KA4。记这样得到的系统为 **KA3M**。当然, 如果这样做, 我们就没有了 5.7 的内定理 (7) 和 (8) (这是比较可惜的), 而且 5.10 的 (3) 和 (4) 从右到左就不成立, 所以, 为了得到框架完全性定理, 我们要用 [3] 给出的拟赋值方法来处理。事实上, 本文后面第 6—9 节就使用了这种方法, 虽然我们在那里处理的是其他逻辑, 但我们很容易平行地移来处理 **KA3M**。

根据上面的思路, 对每一 $\gamma, \alpha, \beta \in \text{Act}$ 我们还可以引入形如 $\gamma\alpha\beta$ 的公式, 其真值集定义为:

$$(7) \quad w \in [\gamma\alpha\beta] \Leftrightarrow \forall u \in R_\gamma(w) (R_\alpha(u) \subseteq R_\beta(u)).$$

(7) 的直观意义可以如上做相应的分析。有了形如 $\gamma\alpha\beta$ 的公式, 我们还可以有形如 $K\gamma\alpha\beta$ 的公式, 其直观意义也是很自然的, 因此也提高了语言的表达力。令 **KA3B** 是增加下列公理给 **KA3** 得到的系统:

$$(KA5) \quad \gamma\alpha\beta \rightarrow [\gamma]([\beta]\varphi \rightarrow [\alpha]\varphi), \quad (KA6) \quad [\gamma]([\beta]\gamma\alpha\beta \rightarrow [\alpha]\gamma\alpha\beta) \rightarrow \gamma\alpha\beta.$$

因此我们有内定理

- (9) $\gamma\alpha\alpha$, (10) $\alpha\alpha\alpha$,
 (11) $\gamma\alpha\beta\wedge\gamma\beta\gamma_0\rightarrow\gamma\alpha\gamma_0$, (12) $\gamma\alpha\beta\wedge\gamma\beta\gamma\rightarrow\gamma\alpha\gamma$.

如 5.5 那样增加相应的框架条件从而构成框架类 **C**, 我们就能证明 **KA3B** 相对 **C** 的框架可靠性定理和框架完全性定理。

六、知道主体

我们在 [5] 提出一个知道主体的逻辑 **KA**。但我们在那里就指出, **KA** 有两个比较严重的缺点, 一是它有两条不自然的公理 **A6** 和 **A7**, 二是对知道主体这个概念过分理想化:

“我知道你”, 当且仅当, “我知道你做过的所有活动”。

这样的“知道”具有“完全知道”即“完全了解”的含义, 确实太强了。在日常生活中我们很少使用这样强的知道主体概念。

本节我们引入逻辑 **KA0** 来克服 **KA** 的上述两个缺点。

克服第一个缺点就是去掉 **KA** 的两个不自然的公理 **A6** 和 **A7**, 为此我们要根据 [3] 提出的拟赋值方法。克服第二个缺点是引入相对某个领域的知道主体概念, 以求更自然地描述知道主体这个概念:

“在某个领域我知道你”, 当且仅当, “在此领域我知道你做过的所有活动”。

例如, 在学术交流领域我知道你, 这意味我知道你在学术领域的所有作为(例如, 我知道你出版的成果、你开设的课程讲座、等等), 这并不意味我还知道你的私生活和其他方面的活动, 甚至这并不意味我还知道你没有公开的学术活动, 因为认知是一个主观概念。

根据这种思想, 我们可以细化 [5] 中的语义: 首先把全体活动集 **Act** 细化为

$\text{Act} = \cup\{\text{Act}_i: i \in I\}$, 其中每一 Act_i 直观表示领域 i 的全部抽象活动。

这样, 我们可以在对象语言中引入形如 $K_{a,i}b$ 的公式来表示“ a 在领域 i 知道 b ”。

6.1.1 定义 (1) 本节和下节我们用 **Agent** 表示有穷多个主体的集合。

(2) 用 $\text{Act} = \cup\{\text{Act}_i: i \in I\}$ 表示可数无穷多个活动的集合。

(3) 用 ϕ, ψ 和 θ (加或不加下标) 表示公式, 其形成规则如下:

$p \mid a\alpha \mid K_{a,i}b \mid \neg\phi \mid (\phi\wedge\psi) \mid [\alpha_a]\phi \mid K_a\phi$, 其中 $p \in \text{At}$, $\alpha \in \text{Act}$, $a, b \in \text{Agent}$ 且 $i \in I$ 。

句符、形如 $a\alpha$ 和 $K_{a,i}b$ 的公式都称为原子公式, 因为它们不能由更简单的公式构成; 其余的公式称为复合公式。

(4) 所有形如 $K_{a,i}b$ 的集合记为 K_a , 所有公式的集合记为 **Form**。⊢

说明: $a\alpha$ 的直观意义是: “主体 a 做了活动 α ” (*The agent a has executed an action α*)。

$K_{a,i}b$ 的直观意义是: “主体 a 在领域 i 知道主体 b ”。

这样, $K_{a,i}a$ 描述了“ a 在领域 i 有自知之明”。

$[\alpha_a]\phi$ 的直观意义是: “‘ a 做了 α 后 ϕ 真’是必然的” (*It is necessary that a after executing α , ϕ is true*, 见文献 [1] 第 166 页), 或者“ a 无论用什么方式做了 α 后都使 ϕ 成立” (ϕ holds after any a execution of action α)。

$K_a\phi$ 的直观意义是: “主体 a 知道命题 ϕ ”。

6.1.2 规定与缩写 (1) 任给公式集 X , 我们用 $\wedge X$ 和 $\vee X$ 分别表示把 X 中所有元素按某个序合取和析取起来得到的公式。缩写定义: 其中 $G \subseteq \text{Agent}$,

$[\alpha]\phi = \wedge\{[\alpha_a]\phi: a \in \text{Agent}\}$, $G\alpha = \wedge\{a\alpha: a \in G\}$,

$K_ab = \wedge\{K_{a,i}b: i \in I\}$, $K_{a,i}G = \wedge\{K_{a,i}b: b \in G\}$, $K_aG = \wedge\{K_ab: b \in G\}$ 。

(2) 如通常定义用公式 $\psi_1, \dots, \psi_n$ 分别齐一代入 ϕ 中句符 $p_1, \dots, p_n$ 得到的公式:

$\phi(p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n)$ 。⊢

说明: $G\alpha$ 的直观意义是: “群体 G 做了集体活动 α ”。

K_ab 的直观意义是: “主体 a 完全知道主体 b ”, K_aa 描述了“ a 有(完全的)自知之明”。

$K_{a,i}G$ 的直观意义是：“主体 a 在领域 i 知道主体群 G ”。

K_aG 的直观意义是：“主体 a 完全知道主体群 G ”。

6.1.3 定义 知道主体的系统 **KA0** 定义如下：对 $\alpha \in \text{Act}$, $\phi, \psi \in \text{Form}$, $a, b \in \text{Agent}$ 和 $i \in I$,

TA 和 MP 如前定义；

$$(K_{\alpha a}) \quad [\alpha_a](\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha_a]\phi \rightarrow [\alpha_a]\psi; \quad (K_a) \quad K_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow K_a\phi \rightarrow K_a\psi;$$

$$(T_a) \quad K_a\phi \rightarrow \phi; \quad (A2) \quad [\alpha_a]a\alpha;^{10}$$

$$(K_{a,i}) \quad K_{a,i}b \rightarrow K_a(b\alpha \rightarrow K_{a,i}b\alpha), \quad \forall \alpha \in \text{Act}_i;$$

$$(RN_{\alpha a}) \quad \phi / [\alpha_a]\phi; \quad (RN_a) \quad \phi / K_a\phi;$$

$$(R1) \quad \langle \alpha_a \rangle a\alpha \rightarrow [\alpha_a]\phi / a\alpha \rightarrow \phi. \quad \vdash$$

说明：KAi 在 [5] 中对应 (A5) $K_{a,i}b \rightarrow (b\alpha \rightarrow K_{a,i}b\alpha)$ 。A5 可以看作是建模者关于 $K_{a,i}b$ 的规律，而 KAi 还可看作是主体 a 关于 $K_{a,i}b$ 的（反思）规律。

6.1.4 定义 $\vdash \phi$, $\text{Th}(\text{KA0})$ 和 $\vDash \phi$ 如前定义。 $\vdash$

6.1.5 引理 下面是 **KA0** 的导出规则和内定理：

- (1) $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \phi / [\alpha_a]\phi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_a]\phi_n \rightarrow [\alpha_a]\phi$;
- (2) $\phi / [\alpha]\phi$; (3) $[\alpha](\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha]\phi \rightarrow [\alpha]\psi$;
- (4) $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \phi / K_a\phi_1 \wedge \dots \wedge K_a\phi_n \rightarrow K_a\phi$;
- (5) $G\alpha \rightarrow a\alpha$, 对每一 $a \in G$;
- (6) $\text{Agent}\alpha \rightarrow G\alpha$;
- (7) $K_aG \rightarrow K_{a,i}b$, 对每一 $b \in G$;
- (8) $K_a\text{Agent} \rightarrow K_aG$; (9) $K_{a,i}b \rightarrow K_{a,i}b$ 。

证明：据 $K_{\alpha a}$ 和 $RN_{\alpha a}$ 易证 (1) – (3)。据 K_a 和 RN_a 易证 (4)。据 6.1.2 的缩写定义易证 (5) – (9)。 $\vdash$

说明：据 (2) 和 (3)，我们可以把 $[\alpha]\phi$ 看作是经典动态逻辑 **PDL** 的 $[\alpha]\phi$ (参见 [1])。

6.1.6 定义 (1) 定义从 **Form** 到不含模态算子 $[\alpha_a]$ 和 K_a 以及形如 $a\alpha$ 和 $K_{a,i}b$ 的原子公式的子语言 $\text{Form}_0 \subseteq \text{Form}$ 的翻译映射 t 如下：

$$t(p), t(\neg\phi) \text{ 和 } t(\phi \wedge \psi) \text{ 如前定义}; t(a\alpha) = t(K_{a,i}b) = t(\top); \quad t([\alpha_a]\phi) = t(K_a\phi) = t(\phi).$$

(2) 对每一公式 $\phi \in \text{Form}$, 我们称 $t(\phi)$ 是 ϕ 的 t -翻译。 $\vdash$

6.1.7 定理 **KA0** 能 t -退化为 **PC₀** 且是协调的。 $\vdash$

6.2.1 定义 称 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架，当且仅当， W 是非空集， R 是 $(\text{Act} \times \text{Agent}) \cup \text{Agent}$ 上的映射使得对每一 $\langle \alpha, a \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}$, $R_{\alpha a}$ 是 W 上的二元通达关系；对每一 $a \in \text{Agent}$, R_a 是 W 上的二元的自返通达关系。本节把所有框架的类记作 **Frame**。 $\vdash$

6.2.2 定义 令 $\langle W, R \rangle$ 是框架。任给 $w \in W$, $a \in \text{Agent}$ 和 $\alpha \in \text{Act}$,

$$R_{\alpha a}(w) =_{\text{df}} \{u \in W : wR_{\alpha a}u\}, \quad R_a(w) =_{\text{df}} \{u \in W : wR_a u\}. \quad \vdash$$

6.2.3 拟赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架，且令 $[\] : \text{Form} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ 是映射。

称 $[\]$ 为 F 上的拟赋值，当且仅当，对每一形如 $a\alpha$ 的公式或复合公式 ϕ , $[\phi]$ 满足：

- (1) $w \in [a\alpha] \Leftrightarrow \exists u R_{\alpha a} w$,¹¹ (点框架条件)
- (2) $w \in [\neg\phi] \Leftrightarrow w \notin [\phi]$, (3) $w \in [\phi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\psi]$,
- (4) $w \in [[\alpha_a]\phi] \Leftrightarrow R_{\alpha a}(w) \subseteq [\phi]$, (5) $w \in [K_a\phi] \Leftrightarrow R_a(w) \subseteq [\phi]$. $\vdash$

注意：拟赋值对句符和形如 $K_{a,i}b$ 的公式可以任意赋值。实际上，任何拟赋值都可以通过对句符和形如 $K_{a,i}b$ 的公式任意赋值以及遵从上述定义通过归纳构造得到。

从拟赋值的定义易得：

6.2.4 形如 1.2.5。 $\vdash$

¹⁰ A2 是在文献 [1] 提出的。

¹¹ $\exists u R_{\alpha a} w$ 是对 $\exists u (u R_{\alpha a} w)$ 的缩写。下同。

6.2.5 引理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架，且令 $f: At \rightarrow P(W)$ 和 $g: Ka \rightarrow P(W)$ 是两个映射。则 F 上存在唯一的拟赋值 $[]$ ，满足下列条件：

- (1) $[p] = f(p)$ ，对每一 $p \in At$ ；
- (2) $[K_a, i]b] = g(K_a, i]b)$ ，对每一 $K_a, i]b \in Ka$ 。

证明：递归定义

$$\begin{aligned} [p] &= f(p), \quad \text{对每一 } p \in At; \\ [K_a, i]b] &= g(K_a, i]b), \quad \text{对每一 } K_a, i]b \in Ka; \\ [a\alpha] &= \{w: \exists u R_{\alpha a} w\}; \quad [\neg\phi] = W - [\phi]; \quad [\phi \wedge \psi] = [\phi] \cap [\psi]; \\ [[\alpha_a]\phi] &= \{w: R_{\alpha a}(w) \subseteq [\phi]\}; \quad [K_a\phi] = \{w: R_a(w) \subseteq [\phi]\}. \end{aligned}$$

易见 $[]$ 是惟一满足上述条件 (1) – (2) 的拟赋值。 $\dashv$

说明：据上一引理，只要给定了拟赋值在 $At \cup Ka$ 上的值，就唯一确定了这个拟赋值。

6.2.6 引理 令 $[]$ 是框架 F 上拟赋值， $p_1, \dots, p_n$ 是 n 个不同的句符，且令 $\phi, \psi_1, \dots, \psi_n$ 是公式。构造新的拟赋值 $[]_0$ 如下：

$$\begin{aligned} [p_i]_0 &= [\psi_i], \quad \dots, [p_n]_0 = [\psi_n], \\ [\theta]_0 &= [\theta], \quad \text{对其他原子公式 } \theta, \end{aligned}$$

则 $[\phi]_0 = [\phi(p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n)]$ 。

证明：归纳证明，详细证明可参见 [2] 中类似结果的证明。 $\dashv$

对于框架来说，更重要的是赋值而不是拟赋值，所以下面我们来定义赋值。

6.2.7 赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架，且令 $[]$ 是 F 上的拟赋值。

- (1) 称 $[]$ 是 F 上的赋值，当且仅当， $[]$ 还满足下列条件：

$$(\#) [K_a, i]b] \subseteq [K_a(b\alpha \rightarrow K_a b\alpha)], \quad \text{对所有 } \alpha \in Act_i.$$

- (2) 称 $M = \langle F, [] \rangle$ 是模型，当且仅当， $[]$ 是 F 上的赋值。 $\dashv$

说明：上述 $(\#)$ 的另一种表示是： $[K_a, i]b] \subseteq \bigcap \{[K_a(b\alpha \rightarrow K_a b\alpha)]: \alpha \in Act_i\}$ 。

据上述 (1)，对原子公式 $K_a, i]b$ 的赋值(而不是拟赋值!)有一定的要求，它不能通过公式的归纳构造由句符的指派得到，它的存在性需要证明：

6.2.8 赋值存在定理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架，令 $f: At \rightarrow P(W)$ 。则存在 F 上赋值 $[]$ 使得

$$[p] = f(p), \quad \text{对每一 } p \in At.$$

证明：令 $g: Ka \rightarrow P(W)$ 使得

$$g(K_a, i]b) = \{w: \forall \alpha \in Act_i \forall u \in R_a(w) (\exists u_0 R_{\alpha b} u \Rightarrow \forall v \in R_a(u) (\exists v_0 R_{\alpha b} v))\}.$$

据引理 6.2.5， F 上存在唯一的拟赋值 $[]$ ，满足下列条件：

- (1) $[p] = f(p)$ ，对每一 $p \in At$ ；
- (2) $[K_a, i]b] = g(K_a, i]b)$ ，对每一 $K_a, i]b \in Ka$ 。

下证 $[]$ 是赋值，即证上一定义的 $(\#)$ 成立：任给 $w \in [K_a, i]b]$ ，据 (2)， $w \in g(K_a, i]b)$ ，因此

$$\forall u \in R_a(w) (\exists u_0 R_{\alpha b} u \Rightarrow \forall v \in R_a(u) (\exists v_0 R_{\alpha b} v)), \quad \text{对所有 } \alpha \in Act_i.$$

所以据 6.2.3 (1)，有

$$\forall u \in R_a(w) (u \in [b\alpha] \Rightarrow \forall v \in R_a(u) (v \in [b\alpha])), \quad \text{对所有 } \alpha \in Act_i.$$

所以 $\forall u \in R_a(w) (u \in [b\alpha \rightarrow K_a b\alpha])$ ，对所有 $\alpha \in Act_i$ 。

因此 $w \in [K_a(b\alpha \rightarrow K_a b\alpha)]$ ，对所有 $\alpha \in Act_i$ 。 $\dashv$

注意：这里的情况类似 [3] 对 3.6 的证明。在那个证明中，我们可以设 $V(E\alpha) = \emptyset$ （正像这里我们可以设 $[K_a, i]b] = g(K_a, i]b) = \emptyset$ ），从而大大节省证明的长度。那么，我们能否一开始就规定 $V(E\alpha) = \emptyset$ （正像这里我们一开始就规定 $[K_a, i]b] = g(K_a, i]b) = \emptyset$ ）。刘壮虎教授 2005 年 12 月 12 日给李小五的信答复如下：

1、定理 3.6（指 [3] 中的 3.6。——笔者注）并不重要，仅仅证明有赋值存在，和整篇

文章的证明无关。用退化的赋值也可以，极小系统是对所有赋值而言的。

2、认知一个动作，不能假设非空。因为对某些动作可能空的。（例如，对经典动态逻辑 PDL 中的 **fail**，我们有 $R_{\text{fail}} = R_0 = \emptyset$ 。——笔者注¹²。）就是按定理 3.6 的构造，也不能保证它非空。

3、此结果仅仅是说明这极小系统可以扩充为退化（所有认知动作的命题都是空集）的系统。

6.2.9—6.2.10 类似 1.2.4—1.2.5。⊥

6.2.11 框架可靠性定理 **KA0** 相对 Frame 可靠。

证明：任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[]$ 。

公理 $K_{\alpha a}$ ， K_a 和 T_a ，规则 MP， $RN_{\alpha a}$ 和 RN_a 的验证如通常。

验证公理 TA：令 $\varphi = \psi(p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n)$ 使得 ψ 是重言式。据 6.2.6，存在拟赋值 $[]_0$ 使得

$$[\psi(p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n)] = [\psi]_0。$$

因为 ψ 是重言式，所以 $[\psi]_0 = W$ ，从而 $[\psi(p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n)] = W$ 。

验证公理 A2：假设 $[\alpha_a]a\alpha$ 在 M 中不有效，则存在 $w \in W$ 使得 $w \notin [[\alpha_a]a\alpha]$ 。据 6.2.3 (4)， $R_{\alpha a}(w) \not\subseteq [a\alpha]$ ，所以存在 $v \in W$ 使得① $wR_{\alpha a}v$ ，和② $v \notin [a\alpha]$ 。据②和 6.2.3 (1)，我们有 $\sim \exists uR_{\alpha a}v$ ，矛盾于①。

验证公理 KAi：任给 $\alpha \in \text{Act}_i$ ，据 6.2.7 的 (#)，易见 $[K_a \cdot i b \rightarrow K_a(b\alpha \rightarrow K_a b\alpha)] = W$ 。

验证规则 R1：设① $[<\alpha_a>a\alpha] \subseteq [[\alpha_a]\varphi]$ 。只须证： $[a\alpha] \subseteq [\varphi]$ 。任给 $w \in [a\alpha]$ 。据 6.2.3 (1)，有 $\exists uR_{\alpha a}w$ 。故据 $w \in [a\alpha]$ ，有 $u \in [<\alpha_a>a\alpha]$ 。再据①，有 $u \in [[\alpha_a]\varphi]$ 。据 $uR_{\alpha a}w$ ，有 $w \in [\varphi]$ 。⊥

6.3.1—6.3.5 类似 1.3.1—1.3.5。⊥

6.3.6 定义 令 w 是公式集。 $w^{-[\alpha_a]} =_{\text{df}} \{\varphi : [\alpha_a]\varphi \in w\}$ ， $w^{-K_a} =_{\text{df}} \{\varphi : K_a\varphi \in w\}$ 。⊥

6.3.7 引理 令 W 是所有极大一致集的集合，令 $w \in W$ 。则

$$(1) [\alpha_a]\varphi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(w^{-[\alpha_a]} \subseteq u \Rightarrow \varphi \in u)。$$

$$(2) K_a\varphi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(w^{-K_a} \subseteq u \Rightarrow \varphi \in u)。$$

$$(3) a\alpha \in w \Leftrightarrow \exists u \in W(u^{-[\alpha_a]} \subseteq w)。$$

证明：(1) “ $\Rightarrow$ ”：设 $[\alpha_a]\varphi \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $w^{-[\alpha_a]} \subseteq u$ 。因为 $[\alpha_a]\varphi \in w$ ，所以 $\varphi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设① 任给 $u \in W$ ，若 $w^{-[\alpha_a]} \subseteq u$ ，则 $\varphi \in u$ 。

这意味 φ 属于每一以 $w^{-[\alpha_a]}$ 为子集的极大一致集。据 6.3.3，存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-[\alpha_a]}$ 使得

$$\textcircled{2} \vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi。$$

据 6.1.5 (1)，我们有

$$\textcircled{3} \vdash [\alpha_a]\varphi_1 \wedge \dots \wedge [\alpha_a]\varphi_n \rightarrow [\alpha_a]\varphi。$$

因为 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w^{-[\alpha_a]}$ ，所以 $[\alpha_a]\varphi_1, \dots, [\alpha_a]\varphi_n \in w$ ，所以据③和 6.3.3，有 $[\alpha_a]\varphi \in w$ 。

(2) 的证明类似 (1) 的证明，只是用到 6.1.5 (4) 而不是 6.1.5 (1)。

(3) “ $\Rightarrow$ ”：设 $a\alpha \in w$ 。则

¹² 参见 [1] 第 169 页。

$$\textcircled{1} \quad \langle \alpha_a \rangle a \alpha \in w^{+\langle \alpha_a \rangle}.$$

先证：② $w^{+\langle \alpha_a \rangle}$ 是一致的。假设②不成立，则据①，存在 $\langle \alpha_a \rangle \varphi_1, \dots, \langle \alpha_a \rangle \varphi_n \in w^{+\langle \alpha_a \rangle}$ 使得

$$\vdash \langle \alpha_a \rangle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha_a \rangle \varphi_n \rightarrow \neg \langle \alpha_a \rangle a \alpha.$$

再据 6.1.5 (1)，易证 $\vdash \langle \alpha_a \rangle (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \neg \langle \alpha_a \rangle a \alpha$ 。所以 $\vdash \langle \alpha_a \rangle a \alpha \rightarrow [\alpha_a] \neg (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ 。

据 6.1.3 的 R1，有 $\vdash a \alpha \rightarrow \neg (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ ，故 $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg a \alpha$ 。因为 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w$ ，故 $\neg a \alpha \in w$ ，

矛盾于设定。所以②成立。据②和 Lindenbaum-引理， $\exists u \in W(w^{+\langle \alpha_a \rangle} \subseteq u)$ ，再据 3.1.16 (2)，

$$\textcircled{3} \quad \exists u \in W(u^{-[\alpha_a]} \subseteq w).$$

“ $\Leftarrow$ ”：设 $a \alpha \notin w$ 。只须证③不成立。假设③成立。因为 $a \alpha \notin w$ ，所以据③， $a \alpha \notin u^{-[\alpha_a]}$ ，因此 $[\alpha_a] a \alpha \notin u$ 。矛盾于公理 $[\alpha_a] a \alpha$ 属于 u 。 $\perp$

6.3.8 定义 定义 KA0 的典范框架 $F = \langle W, R \rangle$ 如下：

- (1) $W = \{w : w \text{ 是极大一致集}\}$,
- (2) $R = \{R_{\alpha a} : \langle \alpha, a \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}\} \cup \{R_a : a \in \text{Agent}\}$ ，使得

$$R_{\alpha a} = \{\langle w, u \rangle \in W^2 : w^{-[\alpha_a]} \subseteq u\}, \quad \text{对每一 } \langle \alpha, a \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent};$$

$$R_a = \{\langle w, u \rangle \in W^2 : w^{-K_a} \subseteq u\}, \quad \text{对每一 } a \in \text{Agent}。 \perp$$

6.3.9 定理

令 $F = \langle W, R \rangle$ 是典范框架，且令 $[\] : \text{Form} \rightarrow P(W)$ 使得 $[\varphi] = |\varphi|$ 。则 $[\]$ 是 F 上的赋值。

证明：先证 $[\]$ 是拟赋值。首先，我们有

$$\begin{aligned} (1) \quad w \in [a\alpha] &\Leftrightarrow w \in |a\alpha| && \text{据设定} \\ &\Leftrightarrow a\alpha \in w && \text{据 6.3.4} \\ &\Leftrightarrow \exists u \in W(u^{-[\alpha_a]} \subseteq w) && \text{据 6.3.7 (3)} \\ &\Leftrightarrow \exists u R_{\alpha a} w. && \text{据上一定义} \end{aligned}$$

据设定和 6.3.5，易见

$$\begin{aligned} (2) \quad [\neg\varphi] &= |\neg\varphi| = W - |\varphi| = W - [\varphi]. \\ (3) \quad [\varphi \wedge \psi] &= |\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi| = [\varphi] \cap [\psi]. \end{aligned}$$

此外我们还有

$$\begin{aligned} (4) \quad w \in [[\alpha_a]\varphi] &\Leftrightarrow w \in |[\alpha_a]\varphi| && \text{据设定} \\ &\Leftrightarrow [\alpha_a]\varphi \in w && \text{据 6.3.4} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W(w^{-[\alpha_a]} \subseteq u \Rightarrow \varphi \in u) && \text{据 6.3.7 (1)} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W(w R_{\alpha a} u \Rightarrow u \in |\varphi|) && \text{据上一定义和 6.3.4} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W(w R_{\alpha a} u \Rightarrow u \in [\varphi]) && \text{据设定} \\ &\Leftrightarrow R_{\alpha a}(w) \subseteq [\varphi]. && \text{据 6.2.3 (4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad w \in [K_a\varphi] &\Leftrightarrow w \in |K_a\varphi| && \text{据设定} \\ &\Leftrightarrow K_a\varphi \in w && \text{据 6.3.4} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W(w^{-K_a} \subseteq u \Rightarrow \varphi \in u) && \text{据 6.3.7 (2)} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W(w R_a u \Rightarrow u \in |\varphi|) && \text{据上一定义和 6.3.4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall u \in W (wR_a u \Rightarrow u \in [\varphi]) && \text{据设定} \\ &\Leftrightarrow R_a(w) \subseteq [\varphi]. && \text{据 6.2.3 (5)} \end{aligned}$$

最后我们来证 $[\]$ 是赋值。据公理 $\mathbf{KA}_i$ ，我们有

$$\vdash K_{a_i} b \rightarrow K_a (b \alpha \rightarrow K_a b \alpha), \quad \text{对所有 } \alpha \in \text{Act}_i.$$

所以据 6.3.5，对所有 $\alpha \in \text{Act}_i$ ，有 $|K_{a_i} b| \subseteq |K_a b \alpha|$ 。

再据设定，对所有 $\alpha \in \text{Act}_i$ ，有 $[K_{a_i} b] \subseteq [K_a b \alpha]$ 。 $\vdash$

典范框架和以上赋值（这个赋值可以称为典范赋值）构成典范模型。

6.3.10 定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是典范框架。称 $M = \langle F, [\] \rangle$ 是典范模型，当且仅当，

$$[\]: \text{Form} \rightarrow P(W) \text{ 使得 } [\varphi] = |\varphi|. \vdash$$

6.3.11 完全性定理 $\mathbf{KA}_0$ 相对 Frame 完全。

证明：我们只须证：(%) 若 $\not\models \varphi$ ，则存在框架 F 使得 $F \not\models \varphi$ 。设 $\not\models \varphi$ 。据 6.3.3，存在极大一致集 u 使得 $\varphi \notin u$ ，所以 $u \notin |\varphi|$ ，因此 $|\varphi| \neq \{w: w \text{ 是极大一致集}\}$ 。令 $M = \langle W, R, [\] \rangle$ 是 $\mathbf{KA}_0$ 的典范模型，则 $[\varphi] = |\varphi| \neq W$ ，所以 $M \not\models \varphi$ ，因此 $\langle W, R \rangle \not\models \varphi$ 。 $\vdash$

在结束本节时我们补充几句题外话。

(1) 我们还可以直接引入公式 $K_{a_i_1 \dots i_m} b$ 来直观表示“ a 在若干个领域 $i_1, \dots, i_m$ 知道 b ”，从而把 6.2.7 (#) 概括为：

$$(\#*) [K_{a_i_1 \dots i_m} b] \subseteq [K_a (b \alpha \rightarrow K_a b \alpha)], \quad \forall \alpha \in \text{Act}_{i_1} \cup \dots \cup \text{Act}_{i_m}, \text{ 其中 } i_1, \dots, i_m \in I.$$

但 $\mathbf{AK}_0$ 也有这样的表达力： $K_{a_i_1 \dots i_m} b \leftrightarrow K_{a_i_1} b \wedge \dots \wedge K_{a_i_m} b$

(2) 我们还可以弱化相对领域的知道主体概念：

“在某个领域我知道你”，当且仅当，“在此领域我知道你做过某个活动”。

这样 6.2.7 (#) 就改成

$$(\#**) [K_{a_i} b] \subseteq [K_a (b \alpha \rightarrow K_a b \alpha)], \quad \text{存在 } \alpha \in \text{Act}_i.$$

弱化的知道主体概念也许更接近日常生活中我们使用的概念。

用上面的方法，我们不难建立刻画弱化知道主体概念的逻辑。

(3) 若像 [1] 那样考虑复合活动 $\alpha; \beta$ 和 $\alpha \cup \beta$ ，那么我们有列有效式：

$$a \alpha \wedge a \beta \rightarrow a(\alpha; \beta), \quad a(\alpha \cup \beta) \leftrightarrow a \alpha \vee a \beta.$$

因此把这些公式作为公理加入 $\mathbf{KA}_0$ 并相应地定义框架上的关系代数运算，我们能得到表达力更丰富的逻辑。

七、相信主体

我们通常说：“我相信你”。自然语言表述这句话有许多意思。我们取下面一种：

“我相信你”，当且仅当，“我相信你说的每一句话”。

本节我们引入逻辑 $\mathbf{BA}_0$ 来描述这种意思下的相信主体概念的逻辑特征。

7.1.1 公式的形成规则： $p \mid B_a b \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K S_{ab} \varphi \mid B_a \varphi$ ，其中 $p \in \text{At}$ ， $a, b \in \text{Agent}$ 。

句符和形如 $B_a b$ 的公式都称为原子公式。所有形如 $B_a b$ 的集合记为 B_a 。 $\vdash$

说明： $B_a b$ 的直观意义是：“主体 a 相信 b ”。 $K S_{ab} \varphi$ 的直观意义是：“主体 a 知道 b 说了 φ ”。 $B_a \varphi$ 的直观意义是：“主体 a 相信 φ ”。

7.1.2 规定 联结符的结合力从左到右依次减弱： $\neg$ ， $K S_{ab}$ ， B_a ， $\wedge$ ， $\vee$ ， $\rightarrow$ ， $\leftrightarrow$ 。 $\vdash$

7.1.3 定义

系统 $\mathbf{BA}_0$ 定义如下：对 $\varphi, \psi \in \text{Form}$ ， $a, b \in \text{Agent}$ ， $O \in \{K S_{ab}: a, b \in \text{Agent}\} \cup \{B_a: a \in \text{Agent}\}$ ，

TA 和 MP 如前定义，

$$(C_O) \quad O \varphi \wedge O \psi \rightarrow O(\varphi \wedge \psi), \quad (N_{B_a}) \quad B_a T, \quad (D_{B_a}) \quad \neg B_a \perp,$$

$$(B_{ab}) \quad B_a b \rightarrow K S_{ab} \varphi \rightarrow B_a \varphi, \quad (RM_O) \quad \varphi \rightarrow \psi / O \varphi \rightarrow O \psi. \vdash$$

说明： B_{ab} 的直观意义是：若 a 相信 b ，则 a 相信 b 说的每一句话。

7.1.4 定义 形如 1.1.4。 $\perp$

7.1.5 引理 下面的系统与 **BA0** 等价： TA 和 MP 如前定义，

$$\begin{aligned} (R_O) \quad & O\phi \wedge O\psi \leftrightarrow O(\phi \wedge \psi), \quad (N_{Ba}) \quad B_a \top, \quad (D_{Ba}) \quad \neg B_a \perp, \\ (B_{ab}) \quad & B_a b \rightarrow KS_{ab} \phi \rightarrow B_a \phi, \quad (RE_O) \quad \phi \leftrightarrow \psi / O\phi \leftrightarrow O\psi. \quad \perp \end{aligned}$$

证明：据 RM_O 易证 RE_O 和 $O(\phi \wedge \psi) \rightarrow O\phi \wedge O\psi$ ，所以从 **BA0** 易得上述系统。

另一方面，设 $\phi \rightarrow \psi$ 。据 TA 和 MP，有 $\phi \leftrightarrow \psi \wedge \phi$ 。再据 RE_O 得 $O\phi \leftrightarrow O(\phi \wedge \psi)$ 。再据 R_O 有 $O\phi \leftrightarrow O\phi \wedge O\psi$ ，从而据 TA 和 MP 有 $O\phi \rightarrow O\psi$ 。所以从上述系统得 **BA0**。 $\perp$

说明：从直观意义上说，这里表述的系统要比 **BA0** 自然。

7.1.6 定义 定义从 Form 到经典语言 $Form_0 \subseteq Form$ 的翻译映射 t 如下：

$$\begin{aligned} t(p), \quad t(\neg\phi) \text{ 和 } t(\phi \wedge \psi) \text{ 如前定义}; \quad t(B_a b) &= t(\top); \\ t(O\phi) &= t(\phi), \quad \text{其中 } O \in \{KS_{ab}: a, b \in Agent\} \cup \{B_a: a \in Agent\}. \quad \perp \end{aligned}$$

7.1.7 定理 **BA0** 能 t -退化为 PC_0 且是协调的。 $\perp$

7.2.1 定义 称 N 是 W 上的邻域映射，当且仅当， $N: W \rightarrow P(P(W))$ 。 $\perp$

7.2.2 定义 称 $F = \langle W, Q \rangle$ 是框架，记作 $F \in Frame$ ，当且仅当， W 是非空集， $Q = \{KS_{ab}: a, b \in Agent\} \cup \{B_a: a \in Agent\}$ 使得其中每一 KS_{ab} 和 B_a 是 W 上的邻域映射且满足下列条件：

- ① $X, Y \in O(w) \Rightarrow X \cap Y \in O(w)$ ， 其中 $O \in Q$;
- ② $W \in B_a(w)$; ③ $\emptyset \notin B_a(w)$; ④ $X \in O(w)$ 且 $X \subseteq Y \Rightarrow Y \in O(w)$ 。 $\perp$

说明： $KS_{ab}(w)$ 的直观意义是： $KS_{ab}(w)$ 包含 a 在 w 中知道 b 说过的话。

$B_a(w)$ 的直观意义是： $B_a(w)$ 包含 a 在 w 中相信的命题。

7.2.3 拟赋值定义 令 $F = \langle W, Q \rangle$ 是框架，且令 $[\]: Form \rightarrow P(W)$ 是映射。

称 $[\]$ 为 F 上的拟赋值，当且仅当，对每一复合公式 ϕ ， $[\phi]$ 满足下列条件：

- (1) $w \in [\neg\phi] \Leftrightarrow w \notin [\phi]$, (2) $w \in [\phi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\psi]$,
- (3) $w \in [KS_{ab}\phi] \Leftrightarrow [\phi] \in KS_{ab}(w)$, (4) $w \in [B_a\phi] \Leftrightarrow [\phi] \in B_a(w)$ 。 $\perp$

7.2.4 引理 形如 1.2.4。 $\perp$

7.2.5 引理 令 $F = \langle W, Q \rangle$ 是框架，且令 $f: At \rightarrow P(W)$ 和 $g: Ba \rightarrow P(W)$ 。则 F 上存在唯一的拟赋值 $[\]$ ，满足下列条件：

- (1) $[p] = f(p)$ ， 对每一 $p \in At$;
- (2) $[B_a b] = g(B_a b)$ ， 对每一 $B_a b \in Ba$ 。

证明：递归定义

$$\begin{aligned} [p] &= f(p), \quad \text{对每一 } p \in At; \\ [B_a b] &= g(B_a b), \quad \text{对每一 } B_a b \in Ba; \\ [\neg\phi] &= W - [\phi]; & [\phi \wedge \psi] &= [\phi] \cap [\psi]; \\ [KS_{ab}\phi] &= \{w: [\phi] \in KS_{ab}(w)\}; & [B_a\phi] &= \{w: [\phi] \in B_a(w)\}. \end{aligned}$$

易见 $[\]$ 是惟一满足上述条件 (1) - (2) 的拟赋值。 $\perp$

7.2.6 引理 形如 1.2.6。 $\perp$

7.2.7 赋值定义 令 $F = \langle W, Q \rangle$ 是框架，且令 $[\]$ 是 F 上的拟赋值。

(1) 称 $[\]$ 是 F 上的赋值，当且仅当， $[\]$ 还满足下列条件：

$$(\#) [B_a b] \subseteq [KS_{ab}\phi \rightarrow B_a\phi], \quad \text{对所有 } \phi \in Form.$$

(2) 称 $M = \langle F, [\] \rangle$ 是模型，当且仅当， $[\]$ 是 F 上的赋值。 $\perp$

7.2.8 赋值存在定理 令 $F = \langle W, Q \rangle$ 是框架，且令 $f: At \rightarrow P(W)$ 。则存在 F 上赋值 $[\]$ 使得

$$[p] = f(p), \quad \text{对每一 } p \in At.$$

证明：令 $g: Ba \rightarrow P(W)$ 使得 $g(B_a b) = \{w: KS_{ab}(w) \subseteq B_a(w)\}$ 。

据引理 7.2.5， F 上存在唯一的拟赋值 $[\]$ ，满足下列条件：

- (1) $[p] = f(p)$ ， 对每一 $p \in At$;

(2) $[B_a b] = g(B_a b)$, 对每一 $B_a b \in B_a$ 。

下证 $[\]$ 是赋值, 即证明上一定义的 (#) 成立: 任给 $w \in [B_a b]$, 据 (2), $w \in g(B_a b)$, 故

$$KS_{ab}(w) \subseteq B_a(w)。$$

所以有对所有 $\varphi \in \text{Form}$, 有 $[\varphi] \in KS_{ab}(w) \Rightarrow [\varphi] \in B_a(w)$ 。因此据 7.2.3(3) 和 (4), 对所有 $\varphi \in \text{Form}$, 易见 $w \in [KS_{ab}\varphi \rightarrow B_a\varphi]$ 。 $\dashv$

7.2.9–7.2.10 定义 形如 1.2.9–1.2.10。 $\dashv$

7.2.11 框架可靠性定理 BA0 相对框架类 Frame 是可靠的。

证明: 任给框架 $F = \langle W, \underline{Q} \rangle$ 和 F 上赋值 $[\]$ 。验证公理 C_0 : 任给 $w \in [O\varphi \wedge O\psi]$, 其中

$$O \in \{KS_{ab}: a, b \in \text{Agent}\} \cup \{B_a: a \in \text{Agent}\}。$$

据 7.2.3 (2) 和 (4), 有 $[\varphi] \in O(w)$ 和 $[\psi] \in O(w)$, 再据 7.2.2 的 ① 和 7.2.4 (1), 有 $[\varphi \wedge \psi] \in O(w)$, 再据 7.2.3 (3) 和 (4), 有 $w \in [O(\varphi \wedge \psi)]$ 。

验证公理 N_{Ba} : 任给 $w \in W$, 据 7.2.2 的 ②, 有 $W \in B_a(w)$, 再据 7.2.4, 有 $[T] = W$, 所以 $[T] \in B_a(w)$ 。再据 7.2.3 (4), 有 $w \in [B_a T]$ 。

验证公理 D_{Ba} : 任给 $w \in W$, 据 7.2.2 的 ③, 有 $\emptyset \notin B_a(w)$, 再据 7.2.4, 有 $[\perp] = \emptyset$, 所以 $[T] \notin B_a(w)$ 。再据 7.2.3 (1) 和 (4), 有 $w \in [\neg B_a \perp]$ 。

验证公理 B_{ab} : 据赋值定义 7.2.7 的 (#) 和 7.2.4, 有 $[B_a b \rightarrow KS_{ab}\varphi \rightarrow B_a\varphi] = W$ 。

验证规则 RM_O : 设 $[\varphi \rightarrow \psi] = W$ 。据 7.2.4 (3), 有 $[\varphi] \subseteq [\psi]$ 。只须证: $[O\varphi] \subseteq [O\psi]$ 。任给 $w \in [O\varphi]$, 有 $[\varphi] \in O(w)$, 据 $[\varphi] \subseteq [\psi]$ 和 7.2.2 的 ④, 有 $[\psi] \in O(w)$, 所以 $w \in [O\psi]$ 。 $\dashv$

7.3.1–7.3.5 形如 1.3.1–1.3.5。 $\dashv$

7.3.6 引理 令 W 如上规定, 令 $O: W \rightarrow P(P(W))$ 使得

$$O(w) = \{X: \text{存在 } O\varphi \in w \text{ 使得 } |\varphi| \subseteq X\}, \quad \text{其中 } O \in \{KS_{ab}: a, b \in \text{Agent}\} \cup \{B_a: a \in \text{Agent}\}。$$

任给 $w \in W$, 有

- ① $X, Y \in O(w) \Rightarrow X \cap Y \in O(w)$, ② $W \in B_a(w)$,
- ③ $\emptyset \notin B_a(w)$, ④ $X \in O(w) \text{ 且 } X \subseteq Y \Rightarrow Y \in O(w)$ 。

证明: 验证①: 设 $X, Y \in O(w)$ 。则存在 $O\varphi, O\psi \in w$ 使得 $|\varphi| \subseteq X$ 且 $|\psi| \subseteq Y$ 。据公理 C_0 , 有 $\vdash O\varphi \wedge O\psi \rightarrow O(\varphi \wedge \psi)$, 所以据 7.3.3, 有 $O(\varphi \wedge \psi) \in w$ 。另一方面, 据 7.3.5, 我们有 $|\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi| \subseteq X \cap Y$, 因此 $X \cap Y \in N(w)$ 。

验证②: 据公理 N_{Ba} , 有 $B_a T \in w$ 。另一方面, 据 7.3.5, 有 $[T] \subseteq W$, 因此 $W \in B_a(w)$ 。

验证③: 反证。假设 $\emptyset \in B_a(w)$ 。则存在 $B_a\varphi \in w$ 使得 $|\varphi| \subseteq \emptyset$ 。据 7.3.5, 有 $[\perp] = \emptyset$, 所以 $|\varphi| \subseteq [\perp]$, 再据 7.3.5, 有 $\vdash \varphi \rightarrow \perp$ 。再据规则 RM_O , 有 $\vdash B_a\varphi \rightarrow B_a\perp$ 。因为 $B_a\varphi \in w$, 故 $B_a\perp \in w$ 。但另一方面, 据公理 D_{Ba} , 有 $\neg B_a\perp \in w$, 矛盾于 w 的极大一致性。

验证④: 设 $X \in O(w)$ 且 $X \subseteq Y$ 。据前者, 存在 $O\varphi \in w$ 使得 $|\varphi| \subseteq X$ 。再据后者, 存在 $O\psi \in w$ 使得 $|\psi| \subseteq Y$, 因此 $Y \in O(w)$ 。 $\dashv$

7.3.7 引理 令 W 和 O 如上规定。则对任意 $w \in W$ 和公式 φ , 有 $O\varphi \in w \Leftrightarrow |\varphi| \in O(w)$ 。

证明: “ $\Leftarrow$ ”: 设 $O\varphi \in w$ 。因为 $|\varphi| \subseteq |\varphi|$, 所以据 $O(w)$ 的构造, 有 $|\varphi| \in O(w)$ 。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $|\varphi| \in O(w)$ 。因为等价类的代表元不是惟一的, 所以存在 $O\varphi_0 \in w$ 使得 $|\varphi_0| \subseteq |\varphi|$ 。据 $|\varphi_0| \subseteq |\varphi|$ 和 7.3.5, 有 $\vdash \varphi_0 \rightarrow \varphi$ 。再据 RM_O , 有 $\vdash O\varphi_0 \rightarrow O\varphi$ 。再据 $O\varphi_0 \in w$, 有 $O\varphi \in w$ 。 $\dashv$

由上一引理, 我们可以定义典范框架如下:

7.3.8 定义 定义 **BA0** 的典范框架 $F = \langle W, \underline{Q} \rangle$ 如下: $W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}$, 对每一 $a, b \in \text{Agent}$, 定义 $KS_{ab}: W \rightarrow P(P(W))$ 使得 $KS_{ab}(w) = \{X: \text{存在 } KS_{ab}\varphi \in w \text{ 使得 } |\varphi| \subseteq X\}$ 。对每一 $a \in \text{Agent}$, 定义 $B_a: W \rightarrow P(P(W))$ 使得 $B_a(w) = \{X: \text{存在 } B_a\varphi \in w \text{ 使得 } |\varphi| \subseteq X\}$ 。

最后定义 $\underline{Q} = \{KS_{ab}: a, b \in \text{Agent}\} \cup \{B_a: a \in \text{Agent}\}$ 。 $\dashv$

7.3.9 定理

令 $F = \langle W, \underline{Q} \rangle$ 是典范框架, 且令 $[\]: \text{Form} \rightarrow P(W)$ 使得 $[\varphi] = |\varphi|$ 。则 $[\]$ 是 F 上赋值。

证明：先证 $[\]$ 是拟赋值。据设定和 7.3.5，易见

$$(1) [\neg\varphi] = |\neg\varphi| = W - |\varphi| = W - [\varphi].$$

$$(2) [\varphi \wedge \psi] = |\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi| = [\varphi] \cap [\psi].$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned} (3) w \in [KS_{ab}\varphi] &\Leftrightarrow w \in |KS_{ab}\varphi| && \text{据设定} \\ &\Leftrightarrow KS_{ab}\varphi \in w && \text{据 7.3.4} \\ &\Leftrightarrow |\varphi| \in KS_{ab}(w) && \text{据 7.3.7} \\ &\Leftrightarrow [\varphi] \in KS_{ab}(w). && \text{据设定} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) w \in [B_a\varphi] &\Leftrightarrow w \in |B_a\varphi| && \text{据设定} \\ &\Leftrightarrow B_a\varphi \in w && \text{据 7.3.4} \\ &\Leftrightarrow |\varphi| \in B_a(w) && \text{据 7.3.7} \\ &\Leftrightarrow [\varphi] \in B_a(w). && \text{据设定} \end{aligned}$$

最后我们来证 $[\]$ 是赋值。据公理 B_{ab} ，对所有 $\varphi \in \text{Form}$ ，有 $\vdash B_ab \rightarrow KS_{ab}\varphi \rightarrow B_a\varphi$ 。所以据 7.3.5，对所有 $\varphi \in \text{Form}$ ，有 $|B_ab| \subseteq |KS_{ab}\varphi \rightarrow B_a\varphi|$ 。再据设定，有

$$[B_ab] \subseteq [KS_{ab}\varphi \rightarrow B_a\varphi], \quad \text{对所有 } \varphi \in \text{Form}. \vdash$$

7.3.10 定义 令 $F = \langle W, \underline{Q} \rangle$ 是典范框架。称 $M = \langle F, [\] \rangle$ 是典范模型，当且仅当，

$$[\]: \text{Form} \rightarrow P(W) \text{ 使得 } [\varphi] = |\varphi|. \vdash$$

7.3.11 完全性定理 **BA0** 相对框架类 **Frame** 是完全的。

证明：类似 6.3.11 的证明，只是把其中的 R 换成 $\underline{Q}$ 且把 **KA0** 换成 **BA0**。 $\vdash$

在结束本节时我们再说几句题外话。

(1) 我们可以把算子 KS_{ab} 拆成两个算子 K_a 和 S_b ，使得 $K_a\varphi$ 和 $S_b\varphi$ 的直观意义分别是“ a 知道 φ ”和“ b 说了 φ ”。因此 7.2.7 的 (＃) 可以改成

$$[B_ab] \subseteq [K_a S_b\varphi \rightarrow B_a\varphi], \quad \text{对所有 } \varphi \in \text{Form}, \quad \text{或}$$

$$[B_ab] \subseteq [K_a (S_b\varphi \rightarrow B_a\varphi)], \quad \text{对所有 } \varphi \in \text{Form}.$$

相应地我们可以引入邻域语义或关系语义来匹配。

(2) 我们还可以像第 6 节那样引入相对某个领域的相信主体概念，或者弱化相对领域的相信主体概念：

“在某个领域我相信你”，当且仅当，“在此领域我相信你说的每一句话”。

“在某个领域我相信你”，当且仅当，“在此领域我相信你说的某一句话”。

(3) 我们看到，与 **KA0** 不同的是，**BA0** 并没有涉及活动。实际上，我们在日常生活中也取下面的意思：

“在某个领域我相信你”，当且仅当，“在此领域我相信你做过的事是对的”。

从形式上的，这种表达式与第 6 节开头的表达式有类似之处，但我们认为也有区别。下一步，我们要研究这种区别。

八、知道个体

我们已经有了知道句子（知道命题）的逻辑——经典认知逻辑，进而可以把它自然地推广到知道公式（例如一阶公式或一阶模态公式）的逻辑。我们也初步建立了认知活动的逻辑（参见上面第 5 节和文献 [3] 和 [6]）和认知主体的逻辑（参见上面两节和文献 [5]）。

这里我们要建立认知个体的逻辑。因为活动和主体都可以看作是某类个体，所以如果建立了认知个体的逻辑，我们就有更加一般的认知逻辑，从而扩大了对认知对象的逻辑刻画。

我们经常说：“我知道珠穆朗玛峰 (Everest)”。这句话是什么意思？首先，珠穆朗玛峰应该是我们说话时约定的个体域中的一个个体。我知道珠穆朗玛峰，通常的含义是：我知道它有什么性质（例如，它是世界最高的山峰）或者知道它与其他个体有什么联系（例如，它与喜马拉雅山其他山峰的关系，从而确定它的地理位置）。在理想状态下，我知道一个个体

意味我知道它的所有性质以及它与当前个体域中其他个体的所有联系。所以，这样的“我知道珠穆朗玛峰”有“我（相对当前论域）完全了解珠穆朗玛峰”的含义，因此，这样的知道概念应该在全知意义上理解。

为了简洁，这里我们考虑单主体逻辑，但所得结果很容易概括到多主体逻辑。

1. 句子逻辑 KI1

这里我们在句子逻辑中做工作。这样处理会大大简化工作，但同时也减少不少逻辑韵味。

8.1.1 定义 令 $\text{Con} =_{\text{df}} \{c_n: 1 \leq n < \omega\}$ 是个体常元的集合；令 $\text{Pre} =_{\text{df}} \{P^j_k: 1 \leq k, j < \omega\}$ 是谓词符号的集合，其中 ω 表示全体自然数的集合，且 P^j_k 表示第 k 个 j 元谓词符号。

公式的形成规则如下：

$$Pc_1 \dots c_n \mid Kc \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K\varphi, \quad \text{对所有 } n \text{ 元 } P \in \text{Pre}, c, c_1, \dots, c_n \in \text{Con}.$$

所有形如 $Pc_1 \dots c_n$ 的公式的集合记为 PF ，所有形如 Kc 的公式的集合记为 KIF ，所有公式的集合记为 Form 。

形如 $Pc_1 \dots c_n$ 和 Kc 的公式都称为原子公式，其余的公式称为复合公式。 $\dashv$

说明： Pc_1 的直观意义是： c_1 有性质 P 。当 $n > 1$ 时， $Pc_1 \dots c_n$ 的直观意义是： $c_1, \dots, c_n$ 有联系（关系） P 。 Kc 的直观意义是：“（某主体）知道个体 c ”。

8.1.2 规定与缩写 (1) T 定义为 $P^1_1 c_1 \vee \neg P^1_1 c_1$ ， $\perp$ 定义为 $\neg T$ 。

(2) 任给 $c \in \text{Con}$ ，任给 $n+1$ 元谓词符号 P 使得 $n \geq 0$ ，如下定义句子：

$$\theta(c, P) =_{\text{df}} Pcc_1 \dots c_n \rightarrow K Pcc_1 \dots c_n, \quad \text{使得, 若 } n=0 \text{ (即 } P \text{ 是一元谓词符号), 则}$$

$$\theta(c, P) =_{\text{df}} Pc \rightarrow K Pc. \quad \dashv$$

说明：根据我们上面的直观想法，我们应该更一般地把 $\theta(c, P)$ 定义为

$$(*) Pc_1 \dots c_{k-1} Cc_{k+1} \dots c_n \rightarrow K Pc_1 \dots c_{k-1} Cc_{k+1} \dots c_n.$$

但为了简单，我们还是用上述定义中的记法，读者也可以用记法 $(*)$ 。需要指出的是，下面的结果对任何一种记法都成立。

8.1.3 定义 知道个体的系统 **KI1** 定义如下：对所有 $\varphi, \psi \in \text{Form}$ 和 $c \in \text{Con}$ ，

TA 和 MP 如前定义；

$$(K) \quad K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow K\varphi \rightarrow K\psi; \quad (T) \quad K\varphi \rightarrow \varphi; \quad (RN) \quad \varphi / K\varphi;$$

$$(KC) \quad Kc \rightarrow K\theta(c, P), \quad \text{对所有 } P \in \text{Pre}. \quad \dashv$$

说明：公理 KC 的直观意义是：若（主体）知道 c ，则它知道 c 的每一性质以及 c 与其他个体的每一联系。易见，这是在最强意义上刻画知道个体这个概念。当然，这太理想化了，所以我们可以如第 6 节那样对 Pre 进行细化，分领域或学科进行考虑。

另一个方法是语用方法：我们可以规定 8.1.1 给出的 Con 和 Pre 是相对某个实际问题的。例如，我说我知道珠穆朗玛峰可以是相对地质学领域的 Con 和 Pre 而言的。

8.1.4 形如 1.1.4。 $\dashv$

8.1.5 引理 下面是 **KI1** 的导出规则和内定理：

$$(1) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi / K\varphi_1 \wedge \dots \wedge K\varphi_n \rightarrow K\varphi. \quad (2) Kc \rightarrow \theta(c, P).$$

证明：据 K 和 RN 易证 (1)，据 KC 和 T 易证 (2)。 $\dashv$

8.1.6 定义 定义从 Form 到经典句子语言 Form_0 的翻译映射 t 如下：

$$t(Pc_1 \dots c_n) = p, \quad \text{对所有 } n \text{ 元 } P \in \text{Pre} \text{ 和 } c_1 \dots c_n \in \text{Con}, \text{ 其中 } p \in \text{At};^{13}$$

$$t(Kc) = t(T), \quad \text{对所有 } c \in \text{Con};$$

$$t(\neg \varphi) = \neg t(\varphi); \quad t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge t(\psi); \quad t(K\varphi) = t(\varphi). \quad \dashv$$

8.1.7 定理 **KI1** 能 t -退化为 PC_0 且是协调的。 $\dashv$

8.2.1 定义 称 $\langle W, R \rangle$ 是框架，当且仅当， W 是非空集且 R 是 W 上的二元自返通达关系。

¹³ 请见 [10] 的第 6 章第 3 节的有关内容。

本节把所有框架的类记作 $\text{Frame}(\mathbf{ki1})$ 。┐

8.2.2 定义 令 $\langle W, R \rangle$ 是框架。任给 $w \in W$, $R(w) =_{\text{df}} \{u \in W : wRu\}$ 。┐

8.2.3 拟赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $[\] : \text{Form} \rightarrow P(W)$ 是映射。

称 $[\]$ 为 F 上的拟赋值, 当且仅当, 对每一复合公式 ϕ , $[\phi]$ 满足下列条件: 对每一 $w \in W$,
(1) $w \in [\neg\phi] \Leftrightarrow w \notin [\phi]$, (2) $w \in [\phi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\psi]$, (3) $w \in [K\phi] \Leftrightarrow R(w) \subseteq [\phi]$ 。┐

8.2.4 形如 1.2.5。┐

8.2.5 引理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $f: PF \rightarrow P(W)$ 和 $g: KIF \rightarrow P(W)$ 。则 F 上存在唯一的拟赋值 $[\]$, 满足下列条件:

(1) $[Pc_1 \dots c_n] = f(Pc_1 \dots c_n)$, 对每一 $Pc_1 \dots c_n \in PF$;

(2) $[Kc] = g(Kc)$, 对每一 $Kc \in KIF$ 。

证明: 递归定义

$[Pc_1 \dots c_n] = f(Pc_1 \dots c_n)$, 对每一 $Pc_1 \dots c_n \in PF$;

$[Kc] = g(Kc)$, 对每一 $Kc \in KIF$;

$[\neg\phi] = W - [\phi]$; $[\phi \wedge \psi] = [\phi] \cap [\psi]$; $[K\phi] = \{w : R(w) \subseteq [\phi]\}$ 。

易见 $[\]$ 是惟一满足上述条件 (1) – (2) 的拟赋值。┐

8.2.6 引理 令 $[\]$ 是框架 F 上拟赋值, $P_1c_1 \dots c_{m_1}, \dots, P_m c_1 \dots c_{m_n}$ 是 n 个不同的谓词公式, 且令 $\phi, \psi_1, \dots, \psi_n$ 是公式。构造新的拟赋值 $[\]_0$ 如下:

$[P_1c_1 \dots c_{m_1}]_0 = [\psi_1], \dots, [P_m c_1 \dots c_{m_n}]_0 = [\psi_n]$,

$[\theta]_0 = [\theta]$, 对其他原子公式 θ ,

则 $[\phi]_0 = [\phi(P_1c_1 \dots c_{m_1}/\psi_1, \dots, P_m c_1 \dots c_{m_n}/\psi_n)]$ 。

证明: 归纳证明, 详细证明可参见 [2] 中类似结果的证明。┐

8.2.7 赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $[\]$ 是 F 上的拟赋值。

(1) 称 $[\]$ 是 F 上的赋值, 当且仅当, $[\]$ 还满足下列条件:

(#) $[Kc] \subseteq [K\theta(c, P)]$, 对所有 $P \in \text{Pre}$ 。

(2) 称 $M = \langle F, [\] \rangle$ 是模型, 当且仅当, $[\]$ 是 F 上的赋值。┐

8.2.8 赋值存在定理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架且令 $f: PF \rightarrow P(W)$ 。则存在 F 上赋值 $[\]$ 使得

$[Pc_1 \dots c_n] = f(Pc_1 \dots c_n)$, 对每一 $Pc_1 \dots c_n \in PF$ 。

证明: 不妨令 $Pcc_1 \dots c_n \rightarrow KPcc_1 \dots c_n$, 且令 $g: KIF \rightarrow P(W)$ 使得

$g(Kc) = \{w : \forall P \in \text{Pre} \forall u \in R(w)(u \in f(Pcc_1 \dots c_n) \Rightarrow R(u) \subseteq f(Pcc_1 \dots c_n))\}$ 。

据引理 8.2.5, F 上存在唯一的拟赋值 $[\]$, 满足下列条件:

(1) $[Pc_1 \dots c_n] = f(Pc_1 \dots c_n)$, 对每一 $Pc_1 \dots c_n \in PF$;

(2) $[Kc] = g(Kc)$, 对每一 $Kc \in KIF$ 。

下证 $[\]$ 是赋值, 即证上一定义的 (#) 成立: 任给 $w \in [Kc]$, 据 (2), $w \in g(Kc)$, 因此

$\forall u \in R(w)(u \in f(Pcc_1 \dots c_n) \Rightarrow R(u) \subseteq f(Pcc_1 \dots c_n))$, 对所有 $P \in \text{Pre}$ 。

所以据 (1) 和 8.2.3, 对所有 $P \in \text{Pre}$, 有 $R(w) \subseteq [\theta(c, P)]$, 因此 $w \in [K\theta(c, P)]$ 。┐

8.2.9–8.2.10 类似 1.2.4–1.2.5。┐

8.2.11 框架可靠性定理 **KI1** 相对 $\text{Frame}(\mathbf{ki1})$ 可靠。

证明: 任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[\]$ 。公理 K 和 T , 规则 MP 和 RN 的验证如通常。

验证公理 TA : 令 $\phi = \psi(P_1c_1 \dots c_{m_1}/\psi_1, \dots, P_m c_1 \dots c_{m_n}/\psi_n)$ 使得 ψ 是重言式。据 8.2.6, 存在拟赋值 $[\]_0$ 使得 $[\psi(P_1c_1 \dots c_{m_1}/\psi_1, \dots, P_m c_1 \dots c_{m_n}/\psi_n)] = [\psi]_0$ 。因为 ψ 是重言式, 所以 $[\psi]_0 = W$, 从而 $[\psi(P_1c_1 \dots c_{m_1}/\psi_1, \dots, P_m c_1 \dots c_{m_n}/\psi_n)] = W$ 。

验证公理 KC : 任给 $P \in \text{Pre}$, 据赋值定义 8.2.7 的 (#), 易见 $[Kc \rightarrow K\theta(c, P)] = W$ 。┐

8.3.1–8.3.5 类似 1.3.1–1.3.5。┐

8.3.6 定义 令 w 是公式集。 $w^{-K} =_{\text{df}} \{\phi : K\phi \in w\}$ 。┐

8.3.7 引理 令 W 是所有极大一致集的集合, 令 $w \in W$ 。则

$$K\phi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W (w^{-K} \subseteq u \Rightarrow \phi \in u)。 \perp$$

8.3.8 定义 定义 **KI1** 的典范框架 $F = \langle W, R \rangle$ 如下:

$$W = \{w: w \text{ 是极大一致集}\}, \quad R = \{\langle w, u \rangle \in W^2: w^{-K} \subseteq u\}。 \perp$$

8.3.9 定理

令 $F = \langle W, R \rangle$ 是典范框架, 且令 $[\]: \text{Form} \rightarrow P(W)$ 使得 $[\phi] = |\phi|$ 。则 $[\]$ 是 F 上的赋值。

证明: 先证 $[\]$ 是拟赋值。据设定 $[\phi] = |\phi|$ 和 8.3.5, 易见

$$(1) [\neg\phi] = |\neg\phi| = W - |\phi| = W - [\phi]。 \quad (2) [\phi \wedge \psi] = |\phi \wedge \psi| = |\phi| \cap |\psi| = [\phi] \cap [\psi]。$$

我们还有

$$\begin{aligned} (3) \quad w \in [K\phi] &\Leftrightarrow w \in [K\phi] && \text{据设定 } [\phi] = |\phi| \\ &\Leftrightarrow K\phi \in w && \text{据 8.3.4} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W (w^{-K} \subseteq u \Rightarrow \phi \in u) && \text{据 8.3.7} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W (wRu \Rightarrow u \in |\phi|) && \text{据上一定义和 8.3.4} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in W (wRu \Rightarrow u \in [\phi]) && \text{据设定 } [\phi] = |\phi| \\ &\Leftrightarrow R(w) \subseteq [\phi]。 && \text{据 8.2.3 (3)} \end{aligned}$$

最后我们来证 $[\]$ 是赋值。据公理 **KC**, 对所有 $P \in \text{Pre}$, 有 $\vdash Kc \rightarrow \theta(c, P)$ 。所以据 8.3.5, 对所有 $P \in \text{Pre}$, 有 $[Kc] \subseteq [\theta(c, P)]$ 。再据设定, 对所有 $P \in \text{Pre}$, 有 $[Kc] \subseteq [K\theta(c, P)]$ 。 $\perp$

8.3.10 定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是典范框架。称 $M = \langle F, [\] \rangle$ 是典范模型, 当且仅当,

$$[\]: \text{Form} \rightarrow P(W) \text{ 使得 } [\phi] = |\phi|。 \perp$$

8.3.11 框架完全性定理 **KI1** 相对 $\text{Frame}(\mathbf{KI1})$ 完全。(证明类似 6.3.11 的证明)。 $\perp$

我们还可以概括公理 **KC** 为

$$(GKC) Kc \rightarrow K(\phi(c) \rightarrow K\phi(c)), \quad \text{其中 } \phi(c) \text{ 是任意含 } c \text{ 的公式。}$$

若 $\phi(c)$ 是 Kc , 则 **GKC** 退化为 $Kc \rightarrow K(Kc \rightarrow KKc)$, 再据公理 **T**, 有 $Kc \rightarrow KKc$ 。

2. 量化逻辑 **KI2**

9.1.1 定义 令 $\text{Var} =_{\text{df}} \{v_n: 1 \leq n < \omega\}$ 是个体变元的集合, 令 **Con** 和 **Pre** 如 8.1.1 定义。

令 $\text{Term} = \text{Var} \cup \text{Con}$ 表示所有项的集合(因为我们不考虑函数符号, 所以 **Term** 比较简单)。

公式的形成规则如下:

$$Pt_1 \dots t_n \mid Kc \mid \neg\phi \mid (\phi \wedge \psi) \mid \forall x\phi \mid K\phi,$$

对所有 n 元 $P \in \text{Pre}$, $t_1, \dots, t_n \in \text{Term}$, $c \in \text{Con}$, $x \in \text{Var}$ 。

所有形如 $Pt_1 \dots t_n$ 的公式的集合记为 **PF**, 所有形如 Kc 的公式的集合记为 **KIF**, 所有公式的集合记为 **Form**。

形如 $Pt_1 \dots t_n$ 和 Kc 的公式都称为原子公式, 其余的公式称为复合公式。 $\perp$

说明: Pt_1 的直观意义是: t_1 有性质 P 。当 $n > 1$ 时, $Pt_1 \dots t_n$ 的直观意义是: $t_1, \dots, t_n$ 有联系(关系) P 。

9.1.2 规定与缩写 (1) 联结符 $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 和 $\exists$ 的缩写定义如通常。

(2) 为了叙述方便, 我们规定联结符的结合力从左到右依次减弱:

$$\neg, K, \forall x, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow。$$

(3) **T** 和 **L** 定义如前。

(4) 我们用 $\phi(x/t)$ 表示用项 t 代入 ϕ 中 x 的所有自由出现得到的公式。

(5) 任给 $x_1 \dots x_n \in \text{Var}$, 任给 $n+1$ 元谓词符号 P 使得 $n \geq 0$, 如下定义公式:

$$\theta(c, P) =_{\text{df}} Pcx_1 \dots x_n \rightarrow KPCx_1 \dots x_n, \quad \text{使得, 若 } n=0 \text{ (即 } P \text{ 是一元谓词符号), 则}$$

$$\theta(c, P) =_{\text{df}} Pc \rightarrow KPC。 \perp$$

说明: 如前我们可以更一般在把 $\theta(c, P)$ 定义为 $Px_1 \dots x_{k-1} Cx_{k+1} \dots x_n \rightarrow KP x_1 \dots x_{k-1} Cx_{k+1} \dots x_n$ 。

9.1.3 定义

知道个体的系统 **KI2** 定义如下: 对所有 $\phi, \psi \in \text{Form}$, $x \in \text{Var}$, $t \in \text{Term}$ 和 $c \in \text{Con}$,

TA 和 MP 如前定义；

- (K) $K(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow K\phi \rightarrow K\psi$; (T) $K\phi \rightarrow \phi$; (5) $\neg K\phi \rightarrow K\neg K\phi$;
 (UI) $\forall x\phi \rightarrow \phi(x/t)$, 其中 t 对 ϕ 中 x 自由;
 (UCG) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi \rightarrow \forall x\psi$, 其中 x 在 ϕ 中不自由;
 (KQC) $Kc \rightarrow K\theta(c, P)$, 对所有 $P \in \text{Pre}$;
 (RN) $\phi / K\phi$; (UG) $\phi / \forall x\phi$. $\vdash$

9.1.4 形如 1.1.4. $\vdash$

9.1.5 引理 下面是 **KI2** 的导出规则和内定理:

- (1) $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi / K\phi_1 \wedge \dots \wedge K\phi_n \rightarrow K\psi$, $\phi \rightarrow \psi / \neg K\neg\phi \rightarrow \neg K\neg\psi$,
 (2) $\neg K\neg K\phi \rightarrow \phi$, (3) $\neg K\neg\phi \rightarrow \psi / \phi \rightarrow K\psi$,
 (4) $\forall xK\phi \rightarrow K\forall x\phi$, (Barcan-公式)
 (5) $K\forall x\phi \rightarrow \forall xK\phi$, (Barcan-公式的逆)
 (6) $Kc \rightarrow \forall x_1 \dots x_n K(PCx_1 \dots x_n \rightarrow KPCx_1 \dots x_n)$,
 (7) $Kc \rightarrow K\forall x_1 \dots x_n (PCx_1 \dots x_n \rightarrow KPCx_1 \dots x_n)$,
 (8) $Kc \rightarrow K(Pct_1 \dots t_n \rightarrow KPct_1 \dots t_n)$,
 (9) $Kc \rightarrow K(Pcc_1 \dots c_n \rightarrow KPcc_1 \dots c_n)$. (**KI1** 的 KC)

证明: (1) 据 RN 和 K 如通常所证. (2) 据 5 和 T 如通常所证.

- (3) ① $\neg K\neg\phi \rightarrow \psi$ 假设
 ② $K\neg K\neg\phi \rightarrow K\psi$ ①, (1)
 ③ $\phi \rightarrow K\neg K\neg\phi$ (2)
 ④ $\phi \rightarrow K\psi$. ②, ③
 (4) ① $\forall xK\phi \rightarrow K\phi$ UI
 ② $\neg K\neg\forall xK\phi \rightarrow \neg K\neg K\phi$ ①, (1)
 ③ $\neg K\neg\forall xK\phi \rightarrow \phi$ ②, (2)
 ④ $\neg K\neg\forall xK\phi \rightarrow \forall x\phi$ ③, UG, UCG
 ⑤ $\forall xK\phi \rightarrow K\forall x\phi$. ④, (3)
 (5) ① $\forall x\phi \rightarrow \phi$ UI
 ② $K\forall xK\phi \rightarrow K\phi$ ①, (1)
 ③ $K\forall x\phi \rightarrow \forall xK\phi$. ②, UG, UCG

据 KQC, UG 和 UCG, 易得 (6)。据 (6) 和 (4) 易得 (7)。据 (7) 和 UI 易得 (8)。

据 (8) 易得 (9)。 $\vdash$

说明: **KI1** 是 **KI2** 的子系统。

9.1.6 定义 定义从 Form 到经典句子语言 Form_0 的翻译映射 t 如下:

- $t(Pt_1 \dots t_n) = p$, 对所有 n 元 $P \in \text{Pre}$ 和 $t_1 \dots t_n \in \text{Term}$, 其中 $p \in \text{At}$;
 $t(Kc) = t(T)$, 对所有 $c \in \text{Con}$;
 $t(\neg\phi) = \neg t(\phi)$; $t(\phi \wedge \psi) = t(\phi) \wedge t(\psi)$; $t(\forall x\phi) = t(K\phi) = t(\phi)$. $\vdash$

9.1.7 定理 **KI2** 能 t -退化为 PC_0 且是协调的。 $\vdash$

9.2.1 定义 称 $\langle W, R \rangle$ 是框架, 记作 $F \in \text{Frame}(\mathbf{ki2})$, 当且仅当, W 是非空集, 且 R 是 W 上的二元通达关系, 使得对任意 $w, u, v \in W$,

- (r) wRw (自返), (e) wRu 且 $wRv \Rightarrow uRv$ (欧性)。 $\vdash$

9.2.2 类似 8.2.2. $\vdash$

下面的语义 (由 9.2.3 和 9.2.7 构成) 由北京大学刘壮虎教授给出, 他称之为代入语义:

9.2.3 拟赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $[\]: \text{Form} \rightarrow P(W)$ 。

称 $[\]$ 是 F 上的拟赋值, 当且仅当, 对每一复合公式 ϕ , $[\phi]$ 满足下列条件:

- (1) $[\neg\varphi] = W - [\varphi]$, (2) $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$, (3) $[K\varphi] = \{w: R(w) \subseteq [\varphi]\}$,
 (4) $[\forall x\varphi] = \cap \{[\varphi(x/t)]: t \in \text{Term 使得 } t \text{ 对 } \varphi \text{ 中 } x \text{ 自由}\}.$ $\perp$

9.2.4 形如 1.2.5. $\perp$

9.2.5 引理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $f: PF \rightarrow P(W)$ 和 $g: KIF \rightarrow P(W)$. 则 F 上存在唯一的拟赋值 $[\]$, 满足下列条件:

- (1) $[Pt_1 \dots t_n] = f(Pt_1 \dots t_n)$, 对每一 $Pt_1 \dots t_n \in PF$;
 (2) $[Kc] = g(Kc)$, 对每一 $Kc \in KIF$.

证明: 递归定义

$$\begin{aligned} [Pt_1 \dots t_n] &= f(Pt_1 \dots t_n), \quad \text{对每一 } Pt_1 \dots t_n \in PF; \\ [Kc] &= g(Kc), \quad \text{对每一 } Kc \in KIF; \\ [\neg\varphi] &= W - [\varphi]; \quad [\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]; \quad [K\varphi] = \{w: R(w) \subseteq [\varphi]\}; \\ [\forall x\varphi] &= \cap \{[\varphi(x/t)]: t \in \text{Term 使得 } t \text{ 对 } \varphi \text{ 中 } x \text{ 自由}\}. \end{aligned}$$

易见 $[\]$ 是惟一满足上述条件 (1) – (2) 的拟赋值. $\perp$

9.2.6 引理 令 $[\]$ 是框架 F 上拟赋值, $P_{t_1} \dots t_{m_1}, \dots, P_{m_1} \dots t_{m_n}$ 是 n 个不同的谓词公式, 且令 $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ 是公式. 构造新的拟赋值 $[\]_0$ 如下:

$$\begin{aligned} [P_{t_1} \dots t_{m_1}]_0 &= [\psi_1], \dots, [P_{m_1} \dots t_{m_n}]_0 = [\psi_n], \\ [\theta]_0 &= [\theta], \text{ 对其他原子公式 } \theta, \end{aligned}$$

则 $[\varphi]_0 = [\varphi(P_{t_1} \dots t_{m_1}/\psi_1, \dots, P_{m_1} \dots t_{m_n}/\psi_n)]$.

证明: 归纳证明, 详细证明可参见 [2] 中类似结果的证明. $\perp$

9.2.7 赋值定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架, 且令 $[\]$ 是 F 上的拟赋值.

- (1) 称 $[\]$ 是 F 上的赋值, 当且仅当, $[\]$ 还满足下列条件:

$$(\#) [Kc] \subseteq [K\theta(c, P)], \quad \text{对所有 } P \in \text{Pre}.$$

- (2) 称 $M = \langle F, [\] \rangle$ 是模型, 当且仅当, $[\]$ 是 F 上的赋值. $\perp$

9.2.8 赋值存在定理 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是框架且令 $f: PF \rightarrow P(W)$. 则存在 F 上赋值 $[\]$ 使得

$$[Pt_1 \dots t_n] = f(Pt_1 \dots t_n), \quad \text{对每一 } Pt_1 \dots t_n \in PF.$$

证明: 不妨令 $\theta(c, P) = Pcx_1 \dots x_n \rightarrow KPCx_1 \dots x_n$, 且令 $g: KIF \rightarrow P(W)$ 使得

$$g(Kc) = \{w: \forall P \in \text{Pre} \forall u \in R(w) (u \in f(Pcx_1 \dots x_n) \Rightarrow R(u) \subseteq f(cx_1 \dots x_n))\}.$$

据引理 9.2.5, F 上存在唯一的拟赋值 $[\]$, 满足下列条件:

- (1) $[Pt_1 \dots t_n] = f(Pt_1 \dots t_n)$, 对每一 $Pt_1 \dots t_n \in PF$;
 (2) $[Kc] = g(Kc)$, 对每一 $Kc \in KIF$.

下证 $[\]$ 是赋值, 即证上一定义的 $(\#)$ 成立: 任给 $w \in [Kc]$, 据 (2), $w \in g(Kc)$, 因此

$$\forall u \in R(w) (u \in f(Pcx_1 \dots x_n) \Rightarrow R(u) \subseteq f(Pcx_1 \dots x_n)), \quad \text{对所有 } P \in \text{Pre}.$$

所以据 (1) 和 8.2.3, 对所有 $P \in \text{Pre}$, 有 $R(w) \subseteq [\theta(c, P)]$, 因此 $w \in [K\theta(c, P)]$. $\perp$

9.2.9–9.2.10 类似 1.2.4–1.2.5. $\perp$

9.2.11 框架可靠性定理 **KI2** 相对 $\text{Frame}(\mathbf{ki2})$ 可靠。

证明: 任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[\]$. 公理 K, T 和 5, 规则 MP 和 RN 的验证如常。

验证公理 TA: 令 $\varphi = \psi(P_{t_1} \dots t_{m_1}/\psi_1, \dots, P_{m_1} \dots t_{m_n}/\psi_n)$ 使得 ψ 是重言式. 据 9.2.6, 存在拟赋值 $[\]_0$ 使得 $[\psi(P_{t_1} \dots t_{m_1}/\psi_1, \dots, P_{m_1} \dots t_{m_n}/\psi_n)] = [\psi]_0$. 因为 ψ 是重言式, 所以 $[\psi]_0 = W$, 从而

$$[\psi(P_{t_1} \dots t_{m_1}/\psi_1, \dots, P_{m_1} \dots t_{m_n}/\psi_n)] = W.$$

验证公理 UI, UCG 和规则 UG: 据 9.2.3 (4) 显然。

验证公理 KQC: 任给 $P \in \text{Pre}$, 据赋值定义 9.2.7 的 $(\#)$, 易见 $[Kc \rightarrow K\theta(c, P)] = W$. $\perp$

9.3.1–9.3.2 类似 1.3.1–1.3.2. $\perp$

9.3.3 引理 (1) 令 w 是极大一致集. 则

$$\neg\varphi \in w \Leftrightarrow \varphi \notin w, \quad \varphi \wedge \psi \in w \Leftrightarrow \varphi \in w \text{ 且 } \psi \in w, \quad \varphi \vee \psi \in w \Leftrightarrow \varphi \in w \text{ 或 } \psi \in w,$$

$$\begin{aligned} \varphi \in w \text{ 且 } \vdash \varphi \rightarrow \psi &\Rightarrow \psi \in w, & \varphi \in w \text{ 且 } \varphi \rightarrow \psi \in w &\Rightarrow \psi \in w, \\ (\varphi \in w \Rightarrow \psi \in w) &\Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in w, & (\varphi \in w \Leftrightarrow \psi \in w) &\Leftrightarrow \varphi \leftrightarrow \psi \in w, \\ w &\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in w. \end{aligned}$$

(2) 令 w 是极大一致集。则 $\text{Th}(\mathbf{KI2}) \subseteq w$ 。

(3) φ 属于每一以 w 为子集的极大一致集，当且仅当，存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in w$ 使得 $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$ 。

(4) 若 $\not\models \varphi$ ，则存在极大一致集 w 使得 $\varphi \notin w$ 。

(5) $w \vdash \neg \varphi \Leftrightarrow w \cup \{\varphi\}$ 不一致。

(6) (紧致性定理) w 一致 $\Leftrightarrow w$ 的每一有穷子集一致。

(7) 若 w 一致且 $w \vdash \varphi$ ，则 $w \cup \{\varphi\}$ 一致。

(8) (Lindhdenbaum-引理) 令 w 是一致的。则存在极大一致集 u 使得 $w \subseteq u$ 。

(9) 令 $\neg K\varphi \in w$ 。若 w 一致，则 $w^{-K} \cup \{\neg \varphi\}$ 一致。 $\perp$

9.3.4 定义 令 w 是公式集。

称 w 有 $\forall$ -性质，当且仅当，对每一公式 φ 和 $x \in \text{Var}$ ，若对每一 $t \in \text{Termt}$ 使得 t 对 φ 中 x 自由，有 $w \vdash \varphi(x/t)$ ，则 $w \vdash \forall x \varphi$ 。 $\perp$

9.3.5 引理 令 w 是公式集。

(1) 令 w 有 $\forall$ -性质且 $w \cup \{\varphi\}$ 一致。则存在有 $\forall$ -性质的极大一致集 u 使得 $w \cup \{\varphi\} \subseteq u$ 。

(2) 令 φ 一致 (即 $\{\varphi\}$ 一致)。则存在有 $\forall$ -性质的极大一致集 u 使得 $\varphi \in u$ 。

(3) 令 w 是有 $\forall$ -性质的极大一致集。则 w^{-K} 有 $\forall$ -性质。

证明：本引理和下一引理的证明请参见 [11] 第 173—175 页和 [12] 第 14 章。 $\perp$

9.3.6 引理 令 w 是有 $\forall$ -性质且包含 $\neg K\varphi$ 的极大一致集。则存在有 $\forall$ -性质的极大一致集 u 使得 $w^{-K} \cup \{\neg \varphi\} \subseteq u$ 。 $\perp$

9.3.7 定义 $\mathbf{KI1}$ 的典范框架 $F = \langle W, R \rangle$ 如下：

$$W = \{w: w \text{ 是有 } \forall\text{-性质的极大一致集}\}, \quad R = \{\langle w, u \rangle \in W^2: w^{-K} \subseteq u\}。 \perp$$

9.3.8 典范框架主引理 令 $\langle W, R \rangle$ 是 $\mathbf{KI2}$ 的典范框架，且令 $w \in W$ 。则

(1) $K\varphi \in w \Leftrightarrow$ 对所有 $u \in W$ ($wRu \Rightarrow \varphi \in u$)。

(2) $\forall x \varphi \in w \Leftrightarrow$ 对所有 $t \in \text{Term}$ 使得 t 对 φ 中 x 自由，有 $\varphi(x/t) \in w$ 。

证明：(1) “ $\Rightarrow$ ”：设 $K\varphi \in w$ 。任给 $u \in W$ 使得 $w^{-K} \subseteq u$ 。因为 $K\varphi \in w$ ，所以 $\varphi \in u$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $K\varphi \notin w$ 。则 $\neg K\varphi \in w$ 。因此据 9.3.6，存在 $u \in W$ 使得 wRu 且 $\neg \varphi \in u$ 。

(2) “ $\Rightarrow$ ”：据公理 UI 显然。

“ $\Leftarrow$ ”：设 $\forall x \varphi \notin w$ 。据 9.3.3 (1)，有 $w \not\models \forall x \varphi$ 。因为 w 有 $\forall$ -性质，所以

$$w \not\models \varphi(x/t), \quad \text{存在 } t \in \text{Term} \text{ 使得 } t \text{ 对 } \varphi \text{ 中 } x \text{ 自由。}$$

再据 9.3.3 (1)，有

$$\varphi(x/t) \notin w, \quad \text{存在 } t \in \text{Term} \text{ 使得 } t \text{ 对 } \varphi \text{ 中 } x \text{ 自由。} \perp$$

9.3.9 定理 令

(*) $|\varphi| =_{\text{df}} \{w: w \text{ 是有 } \forall\text{-性质的极大一致集使得 } \varphi \in w\}$,

令 $F = \langle W, R \rangle$ 是典范框架，且令 $[\]: \text{Form} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ 使得 $[\varphi] = |\varphi|$ 。则 $[\]$ 是 F 上的赋值。

证明：先证 $[\]$ 是拟赋值。据设定 $[\varphi] = |\varphi|$ 和 9.3.3，易见

$$(1) [\neg \varphi] = |\neg \varphi| = W - |\varphi| = W - [\varphi]。$$

$$(2) [\varphi \wedge \psi] = |\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi| = [\varphi] \cap [\psi]。$$

我们还有

(3)

$$\begin{aligned} w \in [K\varphi] &\Leftrightarrow w \in |K\varphi| \\ &\Leftrightarrow K\varphi \in w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{据设定 } [\varphi] = |\varphi| \\ &\text{据 (*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall u \in W(w^{-K} \subseteq u \Rightarrow \varphi \in u) && \text{据 9.3.8} \\
&\Leftrightarrow \forall u \in W(wRu \Rightarrow u \in |\varphi|) && \text{据 9.3.7 和 (*)} \\
&\Leftrightarrow \forall u \in W(wRu \Rightarrow u \in [\varphi]) && \text{据设定}[\varphi]=|\varphi| \\
&\Leftrightarrow R(w) \subseteq [\varphi]. && \text{据 9.2.3 (3)}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
w \in [\forall x \varphi] &\Leftrightarrow w \in |\forall x \varphi| && \text{据设定}[\varphi]=|\varphi| \\
&\Leftrightarrow \forall x \varphi \in w && \text{据 (*)} \\
&\Leftrightarrow \text{对所有 } t \in \text{Term 使得 } t \text{ 对 } \varphi \text{ 中 } x \text{ 自由, 有 } \varphi(x/t) \in w && \text{据 9.3.8 (2)} \\
&\Leftrightarrow \text{对所有 } t \in \text{Term 使得 } t \text{ 对 } \varphi \text{ 中 } x \text{ 自由, 有 } w \in [\varphi(x/t)] && \text{据设定}[\varphi]=|\varphi| \\
&\Leftrightarrow w \in \cap \{[\varphi(x/t)]: t \in \text{Term}\}.
\end{aligned}$$

最后我们来证[]是赋值。据公理 KQC, 对所有 $P \in \text{Pre}$, 有 $\vdash Kc \rightarrow \theta(c, P)$, 所以据 9.3.3 (1), 易证 $[Kc] \subseteq [\theta(c, P)]$, 再据设定 $[\varphi]=|\varphi|$, 有 $[Kc] \subseteq [K\theta(c, P)]$ 。┐

典范结构和以上(典范)赋值构成典范模型。

9.3.11 定义 令 $F = \langle W, R \rangle$ 是典范框架。称 $M = \langle F, [] \rangle$ 是典范模型, 当且仅当,
 $[]: \text{Form} \rightarrow P(W)$ 使得 $[\varphi]=|\varphi|$ 。┐

9.3.12 框架完全性定理 **KI2** 相对 $\text{Frame}(\mathbf{ki2})$ 完全。

证明: 我们只须证: (%) 若 $\not\models \varphi$, 则存在 $F \in \text{Frame}(\mathbf{ki2})$ 使得 $F \not\models \varphi$ 。设 $\not\models \varphi$ 。则 $\neg \varphi$ 一致。据 9.3.5 (2), 存在有 $\forall$ -性质的极大一致集 u 使得 $\varphi \notin u$, 所以 $u \notin |\varphi|$, 因此
 $|\varphi| \neq \{w: w \text{ 是有 } \forall\text{-性质的极大一致集}\}$ 。

令 $M = \langle W, R, [] \rangle$ 是 **KI2** 的典范模型, 则 $[\varphi]=|\varphi| \neq W$, 所以 $M \not\models \varphi$, 因此 $\langle W, R \rangle \not\models \varphi$ 。

据公理 T 和 5, 易证 R 满足 9.2.1 定义的自返性和欧性, 所以 $\langle W, R \rangle \in \text{Frame}(\mathbf{ki2})$ 。┐

我们还可以概括公理 KQC 为:

(GKQC) $Kc \rightarrow K(\varphi(c) \rightarrow K\varphi(c))$, 其中 $\varphi(c)$ 是任意含 c 的一阶公式。

若 $\varphi(c)$ 是 Kc , 则 GKQC 退化为 $Kc \rightarrow K(Kc \rightarrow KKc)$, 再据公理 T, 有 $Kc \rightarrow KKc$ 。

中山大学鞠实儿教授有一次知道我正在思考知道个体这个问题时对我指出: 知道一个东西就是从其他东西中把它挑出来。根据他的这种思路, 我给出下面几种解释:

- (1) $w \models Kc \Leftrightarrow w \models \forall x(K(x=c) \vee K(x \neq c))$ 。
- (2) $w \models Kc \Leftrightarrow w \models \exists! x K(x=c)$, ($\exists! x$ 直观表示存在惟一的 x)
- (3) $w \models Kc \Leftrightarrow w \models K\exists! x K(x=c)$ 。

因此我们可以在一阶带等词的认知逻辑中加入下面某条公式作为公理:

$$Kc \leftrightarrow \forall x(K(x=c) \vee K(x \neq c)), \quad Kc \leftrightarrow \exists! x K(x=c), \quad Kc \leftrightarrow K\exists! x K(x=c)。$$

注意: $K\exists! x(x=c)$ 在通常的一阶带等词的认知逻辑是内定理。

根据实际问题的需要, 我们也可以把上面公式中的 $\leftrightarrow$ 改成 $\rightarrow$ 甚至于 $\leftarrow$, 然后用拟赋值方法证明相应系统的框架可靠性定理和框架完全性定理。

“挑出”也可以看作是一种活动, 所以我们还可以在上述表达式中引入动态逻辑的东西。

我们的工作初步的。至少还有下面的工作可以进一步做下去:

1、弱化知道个体的概念。有时, 甚至更多的情况下, 我说: “我知道珠穆朗玛峰”是指我知道珠穆朗玛峰的某些(甚至一个)性质或某些(甚至一种)与它物的联系。

2、把知道一个个体概括到知道一集个体: 令 C 是一集个体(通常 C 是有穷集), 则我们可以用 KC 表示主体知道 C 中所有个体或某些个体。若是前者, 我们可以有这样的公理或内定理: $K\{c, d\} \rightarrow Kc \wedge Kd$; 若是后者, 我们可以有这样的公理或内定理: $K\{c, d\} \rightarrow Kc \vee Kd$ 。

九、知道主体的另一种刻画

北京大学刘壮虎教授有一次知道我正在思考知道主体这个问题时对我指出: 知道一个主体就是把它视为同类(identify with)。根据他的这种思路, 我给出下面的逻辑 **KA4**。

为了简单，我们在下面只给出关键部分，想毕读者能根据上面的内容补充缺省部分。

10.1 定义 令 Agent 表示有穷多个主体的集合。公式的形成规则如下：

$$p \mid K_a b \mid K_a G \mid \neg \phi \mid (\phi \wedge \psi) \mid K_a \phi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, a, b \in \text{Agent}, G \subseteq \text{Agent}. \vdash$$

说明： $K_a b$ 的直观意义是：“a 知道 b”， $K_a G$ 的直观意义是：“a 知道 G”。

10.2 定义 知道主体的系统 **KA4** 定义如下：对 $\phi, \psi \in \text{Form}$, $a \in \text{Agent}$,

TA 和 MP 如前定义，

$$\begin{aligned} (K_a) \quad K_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow K_a \phi \rightarrow K_a \psi, \quad (T_a) \quad K_a \phi \rightarrow \phi, \quad (RN_a) \quad \phi / K_a \phi, \\ (KAA) \quad K_a a, \quad (KG) \quad K_a G \leftrightarrow \bigwedge \{K_a b : b \in G\}. \vdash \end{aligned}$$

10.3 引理 下面是 **KA4** 有内定理： $K_a G \rightarrow K_a b$, 对每一 $b \in G$ 。 $\vdash$

10.4 定理 **KA4** 能 t-退化为 PC_0 且是协调的。 $\vdash$

10.5 定义 称 $F = \langle W, R, I \rangle$ 是框架，记作 $F \in \text{Frame}$ ，当且仅当，(1) W 是非空集，

(2) R 是 Agent 上的映射使得对每一 $a \in \text{Agent}$, R_a 是 W 上的二元自返关系，且

(3) I 是 Agent 上的映射使得对每一 $a \in \text{Agent}$, I_a 是从 W 到 $P(\text{Agent})$ 中的映射，满足

$$(\%) \quad a \in I_a(w), \quad \text{对每一 } w \in W.$$

称 $\langle W, R, I, [\] \rangle$ 是模型，当且仅当， $\langle W, R, I \rangle$ 是框架且 $[\]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。 $\vdash$

说明： I 是 identify with 的缩写， $I_a(w)$ 表示 a 在 w 中认为与它同类的主体的集合，因此 a 应该在此集合中，从而 $I_a(w)$ 非空。

10.6 真值集定义 令 $\langle W, R, I, [\] \rangle$ 是模型。定义 $[\phi]$ 如下：

$$\begin{aligned} (01) \quad w \in [K_a b] &\Leftrightarrow b \in I_a(w), & (02) \quad w \in [K_a G] &\Leftrightarrow \forall b \in G (w \in [K_a b]), \\ (1) \quad w \in [\neg \phi] &\Leftrightarrow w \notin [\phi], & (2) \quad w \in [\phi \wedge \psi] &\Leftrightarrow w \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\psi], \\ (3) \quad w \in [K_a \phi] &\Leftrightarrow R_a(w) \subseteq [\phi]. \vdash \end{aligned}$$

10.7 框架可靠性定理 **KA4** 相对 Frame 可靠。

证明：公理 KAA 的可靠性据 10.5 (3) 的 (%) 显然。 $\vdash$

10.8 定义 定义典范模型 $M = \langle W, R, I, [\] \rangle$ 如下：(其中 $F = \langle W, R \rangle$ 称为典范框架)

- (1) $W = \{w : w \text{ 是极大一致集}\}$,
- (2) $R = \{R_a : a \in \text{Agent}\}$, 使得对每一 $a \in \text{Agent}$, $R_a = \{\langle w, u \rangle \in W^2 : w^{-K_a} \subseteq u\}$,
- (3) $I = \{I_a : a \in \text{Agent}\}$, 使得对每一 $a \in \text{Agent}$ 和 $w \in W$, $I_a(w) = \{b \in \text{Agent} : K_a b \in w\}$,
- (4) $[p] = \{p\}$, 对每一原子公式 $p \in \text{At}$ 。 $\vdash$

10.9 典范框架主引理 令 $\langle W, R_K, R \rangle$ 是 **KA3** 的典范框架且 $w \in W$ 。则

$$(1) \quad K_a b \in w \Leftrightarrow b \in I_a(w). \quad (2) \quad K_a G \in w \Leftrightarrow \forall b \in G (K_a b \in w).$$

证明：据 10.8 的 (3) 易证 (1)。据公理 KG 易证 (2)。 $\vdash$

10.10 完全性定理 **KA4** 相对 Frame 完全。

证明：这里我们只验证 10.5 (3) 的 (%)：对每一极大一致集 w ，据公理 KAA，有 $K_a a \in w$ ，所以据 10.8 的 (3)，有 $a \in I_a(w)$ 。 $\vdash$

从上面的结果看，我们对 $I_a(w)$ 的规定太少（只规定了 $a \in I_a(w)$ ）。本质上（据典范模型的构造看）， $I_a(w) = \{a\}$ 。如何丰富 $I_a(w)$ 的规定？我们可以根据实际情况加上具体的规定。

例如，考虑下列框架条件：对所有 $w \in W$ ，

$$\begin{aligned} (1) \quad I_a(w) &\subseteq I_b(w), & (2) \quad b \in I_a(w) \text{ 且 } a \in I_b(w) &\Rightarrow I_a(w) = I_b(w), \\ (3) \quad b \in I_a(w) \text{ 且 } c \in I_b(w) &\Rightarrow c \in I_a(w). \end{aligned}$$

(1) 直观表示： b 在 w 中知道的主体不少于 a 在 w 中知道的主体。(2) 直观表示：若 a 和 b 在 w 中知道对方，则 a 和 b 在 w 中知道的主体一样多。(3) 直观表示：若 a 在 w 中知道 b 且 b 在 w 中知道 c ，则 a 在 w 中知道 c 。易见除非在一些特殊情况下否则 (3) 是不自然的。

显然，(1) 和 (2) 分别完全解释下面的公式：¹⁴ 对所有 $a, b, c \in \text{Agent}$,

¹⁴ 称一个框架条件完全解释一个公式，当且仅当，该公式相对此条件在当前语义下可靠且完全。类似地，

$$(1^*) K_a c \rightarrow K_b c, \quad (2^*) K_a b \wedge K_b a \rightarrow (K_a c \leftrightarrow K_b c), \quad (3^*) K_a b \wedge K_b c \rightarrow K_a c.$$

感兴趣的读者可以验证把上述公理（分别）加入 **KA4** 后构成的系统相对对应的框架条件的可靠性定理和完全性定理。

我们可以进一步对 $I_a(w)$ 进行比较精细地刻画，揭示它的内部结构。一种方法是把 I_a 看作从 W 到 $P(P(\text{Agent}))$ 中的映射使得对每一 $a \in \text{Agent}$, $I_a(w)$ 中的所有元素可用 $\subseteq$ 排成线序： $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_m$ 。这里直观意义是：越小的子集表示 a 越熟知的主体的集合。因此 A_1 表示 a 最熟知的主体的集合。这样，10.1 的公式的形成规则要把 $K_a b$ 改成 $K_{a,i} b$ ，后者的直观意义是： a 以程度 i 知道 b 。因此真值集定义 10.6 的 (01) 改成

$$w \in [K_{a,i} b] \Leftrightarrow \text{存在非空集 } A_i \in I_a(w) \text{ 使得 } b \in A_i. \quad (10.6 \text{ 的 } (02) \text{ 也相应改})$$

易见，下列公式是有效式，从而可以作为公理来替换 **KA4** 的 **KAA** 并相应修改公理 **KG**：

$$K_{a,i} b \rightarrow K_{a,j} b, \quad \text{其中 } 1 \leq i \leq j \leq m.$$

我们也可以如前根据实际情况增加一些框架条件和它们能完全解释的公理或规则。

上两节的认知个体这个概念还可以用本节的方法来刻画。一个主体至少知道自己是一个个体，所以自然我们可以把主体集 **Agent** 放入个体常元集作为其中的一个部分。（这样放入的主体严格说是主体的名字。如本节我们可以构造相应的模型，用个体域中的个体解释主体的名字：给主体的名字指派一个个体。）因此我们在语言中有形如 $K_a c$ 的公式，在系统也可以加入公理 $K_a a$ 。

根据上述思路，我们还可以相应地考虑认知活动这个概念。我们用 $K_a \alpha$ 直观表示主体 a 知道活动 α ，并在语言中加上测试活动 $\varphi?$ （请见 [8] 的相关内容）。令 $k_a(w)$ 表示 a 在 w 中知道的活动的集合，刻画 $K_a \alpha$ 的真值集定义为 $w \in [K_a \alpha] \Leftrightarrow \alpha \in k_a(w)$ 。易见公式 $K_a(T?)$ 为框架条件 $T? \in k_a(w)$ 完全解释，公式 $K_a(K_a \alpha?)$ 为框架条件 $(K_a \alpha?) \in k_a(w)$ 完全解释。所以我们可以根据实际情况增加 $K_a(T?)$ 或 $K_a(K_a \alpha?)$ 作为系统的公理，也可以另找其他关于 $K_a \alpha$ 的公理和规则。

十、通过活动知道命题

在单主体的情况下，我们通常用 $K\varphi$ 表示当下主体知道命题 φ （参见第 5 节）。现在我们推广这个概念：考虑通过活动 α 知道 φ 这个概念。我们用 $K_\alpha \varphi$ 直观表示：（主体）通过 α 知道 φ 。我们认为研究这样的概念是有意义的。若 α 是认知活动，则 $K_\alpha \varphi$ 表示 φ 是通过认知活动 α 得到的知识；若 α 是实践活动，则 $K_\alpha \varphi$ 表示 φ 是通过实践活动 α 得到的知识；……。因此 $K_\alpha \varphi$ 比传统的 $K\varphi$ 更精细地刻画了作为知识的 φ ，因为它指出 φ 是通过什么方式得到的知识。

下面我们提出几个方案，分别建立一些逻辑。

第一个方案比较简单：直接用缩写定义 $K_\alpha \varphi =_{\text{df}} K[\alpha]\varphi$ 。框架和模型如 5.2 给出，真值集定义只用 5.4 的 (1) — (4)，系统 **KA30** 定义为从 **KA3** 去掉 **KA1**—**KA4** 得到的系统（参见 5.6）。¹⁵ 易见 **KA30** 有下列导出规则和内定理：

$$(1) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi / K_\alpha \varphi_1 \wedge \dots \wedge K_\alpha \varphi_n \rightarrow K_\alpha \varphi, \\ (2) K_\alpha(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow K_\alpha \varphi \rightarrow K_\alpha \psi, \quad (3) \varphi / K_\alpha \varphi, \quad (4) K_\alpha T.$$

所以 **KA30** 包含一个关于 K_α 的 **K**-系统。

若我们要增加知识公理 $K\varphi \rightarrow \varphi$ 给上述系统（该公理对应 R_K 是自返的），则我们在扩充系统中还能有内定理 $K_\alpha \varphi \rightarrow [\alpha]\varphi$ 。另外， $K_\alpha \varphi \rightarrow K\varphi$ 和 $K_\alpha \varphi \rightarrow \varphi$ 都是比较自然的公式，可以考虑构造吸收它们作为公理或内定理的系统。特别是 $K_\alpha \varphi \rightarrow K\varphi$ ，它揭示了“通过 α 知道 φ ”与传统的“知道 φ ”这两个概念在一个方向的联系。

第二个方案是独立给出 $K_\alpha \varphi$ 的语义，而不是直接用 $K\varphi$ 和 $[\alpha]\varphi$ 的语义来定义。然后，根据需要用一组框架条件分别揭示 $K_\alpha \varphi$ 与 $K\varphi$ 或 $[\alpha]\varphi$ 之间的联系。为此引入公式的形成规则：

我们可以定义一个框架条件完全解释一个规则。

¹⁵ 直接考虑 **KA3** 或其他相应的系统也可以。

$$p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K\varphi \mid [\alpha]\varphi \mid K_\alpha\varphi, \quad \text{其中 } p \in \text{At}, \alpha \in \text{Act}.$$

称 $F = \langle W, R_K, R, S \rangle$ 是框架，当且仅当， W 是非空集， R_K 是 W 上的二元通达关系，且

$R = \{R_\alpha : \alpha \in \text{Act}\}$ 使得对每一 $\alpha \in \text{Act}$ ， R_α 是 W 上的二元通达关系，

$S = \{S_{K\alpha} : \alpha \in \text{Act}\}$ 使得对每一 $\alpha \in \text{Act}$ ， $S_{K\alpha}$ 是 W 上的二元通达关系。¹⁶

所有上述框架的类记作 Frame 。

称 $\langle F, [\] \rangle$ 是模型，当且仅当， F 是框架且 $[]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。

真值集定义除了 5.4 的 (1) – (4)，还增加

$$(5) w \in [K_\alpha\varphi] \Leftrightarrow S_{K\alpha}(w) \subseteq [\varphi].$$

如下定义系统 **KA5**：TA 和 MP 如前定义，对所有 $O \in \{K, [\alpha], K_\alpha\}$ ，

$$(K_O) \quad O(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow O\varphi \rightarrow O\psi, \quad (RN_O) \quad \varphi / O\varphi. \vdash$$

易见 **KA5** 也包含一个关于 K_α 的 K -系统，且相对上述语义是极小系统，即 **KA5** 相对 Frame 是可靠和完全的。

若我们要在上述系统中分别加入下列我们认为比较自然的公式作为公理：

$$(1) K\varphi \rightarrow \varphi, \quad (2) K_\alpha\varphi \rightarrow \varphi, \quad (3) K_\alpha\varphi \rightarrow K\varphi, \quad (4) K_\alpha\varphi \rightarrow [\alpha]\varphi,$$

$$(5) K_\alpha\varphi \leftrightarrow K[\alpha]\varphi,$$

则我们要分别加对应的框架条件：

$$(1d) w \in R_K(w), \quad (2d) w \in S_{K\alpha}(w),$$

$$(3d) R_K(w) \subseteq S_{K\alpha}(w), \quad (4d) R_\alpha(w) \subseteq S_{K\alpha}(w),$$

$$(5d) S_{K\alpha}(w) = \{u \in W : \exists v \in W (wR_K v \text{ 且 } vR_\alpha u)\}.$$

我们可以证明这样的扩充系统相对对应的框架条件是框架可靠和框架完全的。

下面作为说明，我们验证 (5) 和 (5d) 对应：

可靠性：只须证 (5) 有效：

$$\begin{aligned} w \in [K_\alpha\varphi] &\Leftrightarrow \forall u (u \in S_{K\alpha}(w) \Rightarrow u \in [\varphi]) \\ &\Leftrightarrow \forall u (\exists v (wR_K v \text{ 且 } vR_\alpha u) \Rightarrow u \in [\varphi]) \quad \text{据 (5d)} \\ &\Leftrightarrow \forall u v (wR_K v \text{ 且 } vR_\alpha u \Rightarrow u \in [\varphi]) \quad \text{据 [10] 第 162 页} \\ &\Leftrightarrow \forall v (wR_K v \Rightarrow \forall u (vR_\alpha u \Rightarrow u \in [\varphi])) \\ &\Leftrightarrow w \in [K[\alpha]\varphi] \end{aligned}$$

完全性：如前定义相应的典范框架。令 W 是所有极大一致集的集合，令 $w, u \in W$ 。我们要验证 (5d) 成立：首先，我们有

$$\begin{aligned} u \in S_{K\alpha}(w) &\Leftrightarrow w^{-K\alpha} \subseteq u \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi (K_\alpha\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in u) \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi (K[\alpha]\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in u) \quad \text{据 (5)} \end{aligned}$$

所以下面我们只须证：

$$\forall \varphi (K[\alpha]\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in u) \Leftrightarrow \exists v \in W (w^{-K} \subseteq v \text{ 且 } v^{-\alpha} \subseteq u).$$

“ $\Rightarrow$ ”：设

$$\textcircled{1} \quad \forall \varphi (K[\alpha]\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in u).$$

要证： $\textcircled{2} \quad \exists v \in W (w^{-K} \subseteq v \text{ 且 } v^{-\alpha} \subseteq u)$ 。据 Lindenbaum-引理，只须证：

$$\textcircled{3} \quad w^{-K} \cup u^{+\alpha} \text{ 一致}.$$

假设 $\textcircled{3}$ 不成立，则存在 $\psi_1, \dots, \psi_m \in w^{-K}$ 和 $\langle \alpha \rangle \varphi_1, \dots, \langle \alpha \rangle \varphi_n \in u^{+\alpha}$ 使得

$$\vdash \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m \rightarrow \neg (\langle \alpha \rangle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \langle \alpha \rangle \varphi_n).$$

所以有 $\vdash \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m \rightarrow \neg \langle \alpha \rangle (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ 。所以有 $\vdash \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m \rightarrow [\alpha] \neg (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ 。因此

$$\textcircled{4} \quad \vdash K\psi_1 \wedge \dots \wedge K\psi_m \rightarrow K[\alpha] \neg (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n).$$

¹⁶ $S_{K\alpha}$ 的下标 K 不是本质的，写在此只为对应算子 K_α 。 $S_{K\alpha}$ 的直观意义是： $S_{K\alpha}$ 是知行统一的通达关系。

因为 $\psi_1, \dots, \psi_m \in w^{-K}$, 所以 $K\psi_1, \dots, K\psi_m \in w$, 故据④, 有 $K[\alpha] \neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \in w$, 据①, 有
 ⑤ $\neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \in u$ 。

另一方面, 因为 $\langle \alpha \rangle \phi_1, \dots, \langle \alpha \rangle \phi_n \in u^{+\langle \alpha \rangle}$, 所以 $\phi_1, \dots, \phi_n \in u$, 所以 $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \in u$, 矛盾于⑤。

“ $\Leftarrow$ ”: 设②。我们要证①。任给公式 ϕ 使得 $K[\alpha]\phi \in w$ 。只须证 $\phi \in u$ 。根据②, 存在 v 使得 $w^{-K} \subseteq v$ 且 $v^{-\alpha} \subseteq u$ 。再据 $K[\alpha]\phi \in w$, 易见 $\phi \in u$ 。证毕。

注意: 上述公理有的并不独立, 例如, 从 (3) 和 (1) 能推出 (2)。

我们还可以根据实际情况增加公理和能完全解释它们的框架条件。

十一、动态认知过程

主体的一个动态认知全过程至少有 4 个要素: 认知目的、背景知识、认知活动和认知结果。主体根据它的认知目的和背景知识, 通过认知活动, 最后达到认知结果。

本文我们用 $[\alpha_A]_{\phi, \psi} \theta$ 形式表示这个过程。在这样公式中, ϕ 表示主体 A 的认知目的, ψ 表示它的背景知识, α_A 表示 A 做的认知活动, θ 表示由此产生的认知结果。因此 $[\alpha_A]_{\phi, \psi} \theta$ 的直观意义是“主体 A 根据它的认知目的 ϕ 和背景知识 ψ 通过认知活动 α_A 能得到认知结果 θ (能认知 θ)”。所以 $[\alpha_A]_{\phi, \psi} \theta$ 应该是一种三元模态公式。根据这样的解释, $[\alpha_A]_{\phi, \psi} \theta$ 也可以写作

$$[\alpha_A](\phi, \psi, \theta) \text{ 或 } K_{\alpha_A}(\phi, \psi, \theta) \quad (\text{后者突出 } \theta \text{ 是一种知识})。$$

我们在 [13] 和 [14]¹⁷ 提出类似的动态认知条件句逻辑 **DEC1** 和 **DEC2** 来刻画上述过程。但那里, 我们用的语义是有序邻域语义, 而这里我们要用关系语义, 因为关系语义更自然。还有, 在那里我们研究的是单主体逻辑表示, 而这里我们研究的是多主体逻辑。另外, 我们在那里, 在单主体的情况下, 用 $\phi \psi \geq \alpha \theta$ 表示这里的 $[\alpha]_{\phi, \psi} \theta$ (省略下标 A), 因为此类公式也是一种双条件句。

我们引入公式的形成规则如下: $p \mid \neg \phi \mid (\phi \wedge \psi) \mid [\alpha_A]_{\phi, \psi} \theta$, 其中 $p \in \text{At}$, $A \in \text{Agent}$, $\alpha \in \text{Act}$ 。

为了简洁, 下面我们用 $\phi \psi \alpha_A \theta$ 缩写 $[\alpha_A]_{\phi, \psi} \theta$ 。

称 $\langle W, R \rangle$ 是框架, 当且仅当, W 是非空集, 且 R 是定义域为 $\text{Act} \times \text{Agent}$ 上的映射, 使得
 对每一 $\langle \alpha, A \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}$, $R_{\alpha A}$ 是 W 上的四元通达关系。

称 $\langle W, R, [] \rangle$ 是模型, 当且仅当 $\langle W, R \rangle$ 是框架且 $[]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。

所有上述框架的类记作 **Frame**。以后我们用 $R_{\alpha A} wxyz$ 表示 $\langle w, x, y, z \rangle \in R_{\alpha A}$ 。

归纳定义 ϕ 相对 M 的真值集 $[\phi]$ 如下:

- (1) $w \in [-\phi] \Leftrightarrow w \notin [\phi]$, (2) $w \in [\phi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\phi] \text{ 且 } w \in [\psi]$,
- (3) $w \in [\phi \psi \alpha_A \theta] \Leftrightarrow \forall xyz \in W (R_{\alpha A} wxyz \text{ 且 } x \in [\phi] \text{ 且 } y \in [\psi] \Rightarrow z \in [\theta])$ 。

$R_{\alpha A} wxyz$ 的直观意义是: A 在当下状态 w 相对目的状态 x 和知识库状态 y 通过做活动 α 达到结果状态 z 。这里目的状态的意思是 A 在 w 假定可以通过做 α 实现的状态, 而知识库状态是 A 相对 w 积累的知识的状态。

动态认知过程系统 **DEPL** 定义如下: TA 和 MP 如前定义,

- (RK1) $\phi \rightarrow \phi_1 \vee \dots \vee \phi_n / \phi_1 \psi \alpha_A \theta \wedge \dots \wedge \phi_n \psi \alpha_A \theta \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta$,
- (RK2) $\psi \rightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n / \phi \psi_1 \alpha_A \theta \wedge \dots \wedge \phi \psi_n \alpha_A \theta \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta$,
- (RK3) $\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \rightarrow \theta / \phi \psi \alpha_A \theta_1 \wedge \dots \wedge \phi \psi \alpha_A \theta_n \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta$ 。 $\vdash$

当 $n=0$ 时, RK1–RK3 分别规定为 $\neg \phi / \phi \psi \alpha_A \theta$, $\neg \psi / \phi \psi \alpha_A \theta$, 和 $\theta / \phi \psi \alpha_A \theta$ 。

DEPL 有下列导出规则和内定理:

- (1) $\phi \rightarrow \phi_1 / \phi_1 \psi \alpha_A \theta \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta$, (认知目的反单调规则)
- (2) $\psi \rightarrow \psi_1 / \phi \psi_1 \alpha_A \theta \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta$, (背景知识反单调规则)
- (3) $\theta_1 \rightarrow \theta / \phi \psi \alpha_A \theta_1 \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta$, (认知结果单调规则)

¹⁷ 参见最后列出的文献。下同。

(4) $\perp \psi \alpha_A \theta$, $\phi \perp \alpha_A \theta$, $\phi \psi \alpha_A \top$,

(5) $\phi_1 \psi \alpha_A \theta \rightarrow \phi_1 \wedge \phi_2 \psi \alpha_A \theta$, $\phi \psi_1 \alpha_A \theta \rightarrow \phi \psi_1 \wedge \psi_2 \alpha_A \theta$, $\phi \psi \alpha_A \theta_1 \wedge \theta_2 \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta_1$. $\vdash$

读者可以把这里的结果与 [13] 和 [14] 的内定理和导出规则进行比较。

定义从 Form 到不含模态公式的子语言 $\text{Form}_0 \subseteq \text{Form}$ 的翻译映射 t 如下:

$$t(p) = p, \quad t(\neg \phi) = \neg t(\phi), \quad t(\phi \wedge \psi) = t(\phi) \wedge t(\psi), \quad t(\phi \psi \alpha_A \theta) = t(\phi \wedge \psi \rightarrow \theta).$$

易证 **DEPL** 能 t -退化为 **PC**₀ 且是协调的。

定理 **DEPL** 相对 Frame 可靠。

证明: 任给框架 $F = \langle W, R \rangle$ 和 F 上赋值 $[]$ 。验证规则 RK1: 设 $[\phi] \subseteq [\phi_1 \vee \dots \vee \phi_n]$, 即

$$\textcircled{1} \quad [\neg \phi_1 \wedge \dots \wedge \neg \phi_n] \subseteq [\neg \phi].$$

任给 $w \in W$ 使得

$$\textcircled{2} \quad w \in [\phi_1 \psi \alpha_A \theta \wedge \dots \wedge \phi_n \psi \alpha_A \theta].$$

要证 $w \in [\phi \psi \alpha_A \theta]$ 。据真值集定义 (3), 只须证

$$\textcircled{3} \quad \forall xyz \in W (R_{\alpha_A} wxyz \Rightarrow x \in [\neg \phi] \text{ 或 } y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta]).$$

任给 $\forall xyz \in W$ 使得 $R_{\alpha_A} wxyz$, 要证

$$\textcircled{4} \quad x \in [\neg \phi] \text{ 或 } y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta].$$

据②, 易见

$$\forall xyz \in W (R_{\alpha_A} wxyz \Rightarrow x \in [\neg \phi_1] \text{ 或 } y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta]), \text{ 且 } \dots, \text{ 且}$$

$$\forall xyz \in W (R_{\alpha_A} wxyz \Rightarrow x \in [\neg \phi_n] \text{ 或 } y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta]).$$

再据 $R_{\alpha_A} wxyz$, 易见

$$(x \in [\neg \phi_1] \text{ 或 } y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta]) \text{ 且 } \dots \text{ 且 } (x \in [\neg \phi_n] \text{ 或 } y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta]).$$

所以 $(x \in [\neg \phi_1] \text{ 且 } \dots \text{ 且 } x \in [\neg \phi_n]) \text{ 或 } (y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta])$ 。

因此 $x \in [\neg \phi_1 \wedge \dots \wedge \neg \phi_n] \text{ 或 } y \in [\neg \psi] \text{ 或 } z \in [\theta]$ 。再据①, 有④。

验证规则 RK2: 类似上面对 RK1 的验证。

验证规则 RK3: 证明类似 3.4.7 对 RK1 的验证。 $\vdash$

定义 **DEPL** 的典范框架 $\langle W, R \rangle$ 如下:

$$\textcircled{1} \quad W = \{w: w \text{ 是 DEPL 的极大一致集}\},$$

$$\textcircled{2} \quad R = \{R_{\alpha_A}: \langle \alpha, A \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}\}, \text{ 使得对每一 } \langle \alpha, A \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent},$$

$$R_{\alpha_A} = \{\langle w, x, y, z \rangle \in W^4: \forall \phi \psi \theta (\phi \psi \alpha_A \theta \in w \Rightarrow \neg \phi \in x \text{ 或 } \neg \psi \in y \text{ 或 } \theta \in z)\}.$$

定义 **DEPL** 的典范模型 $\langle W, R, [] \rangle$ 如下: $\langle W, R \rangle$ 是 **DEPL** 的典范框架, 且

$$\textcircled{3} \quad [p] = \{p\}, \text{ 对每一原子公式 } p.$$

典范框架主引理 令 $\langle W, R \rangle$ 是 **DEPL** 的典范框架, 且令 $w \in W$ 。则

$$(\#) \quad \phi \psi \alpha_A \theta \in w \Leftrightarrow \forall xyz \in W (R_{\alpha_A} wxyz \Rightarrow \neg \phi \in x \text{ 或 } \neg \psi \in y \text{ 或 } \theta \in z), \text{ 对所有 } \phi, \psi \text{ 和 } \theta.$$

证明: “ $\Rightarrow$ ”: 显然。

“ $\Leftarrow$ ”: 任给公式 ϕ, ψ 和 θ 使得 $\phi \psi \alpha_A \theta \notin w$ 。只须证

$$\textcircled{1} \quad \exists xyz \in W (R_{\alpha_A} wxyz \text{ 且 } \neg \phi \in x \text{ 且 } \neg \psi \in y \text{ 且 } \neg \theta \in z).$$

$$\text{令 } X = \{\neg \phi': \phi' \psi' \alpha_A \theta' \in w\}, \quad Y = \{\neg \psi': \phi' \psi' \alpha_A \theta' \in w\}, \quad Z = \{\neg \theta': \phi' \psi' \alpha_A \theta' \in w\}.$$

先证

$$\textcircled{2} \quad X \cup \{\phi\} \text{ 一致。 } \textcircled{3} \quad Y \cup \{\psi\} \text{ 一致。 } \textcircled{4} \quad Z \cup \{\neg \theta\} \text{ 一致。}$$

假设②不成立, 则存在 $\neg \phi_1, \dots, \neg \phi_n \in X$ 使得 $\vdash \phi \rightarrow \phi_1 \vee \dots \vee \phi_n$ 。据规则 RK1, 我们有

$$\textcircled{5} \quad \vdash \phi_1 \psi \alpha_A \theta \wedge \dots \wedge \phi_n \psi \alpha_A \theta \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta.$$

因为 $\neg \phi_1, \dots, \neg \phi_n \in X$, 所以 $\phi_1 \psi \alpha_A \theta, \dots, \phi_n \psi \alpha_A \theta \in w$, 因此据⑤, 有 $\phi \psi \alpha_A \theta \in w$ 。矛盾于设定。

假设③不成立, 则存在 $\neg \psi_1, \dots, \neg \psi_n \in Y$ 使得 $\vdash \psi \rightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$ 。据规则 RK2, 我们有

$$\textcircled{6} \quad \vdash \phi \psi_1 \alpha_A \theta \wedge \dots \wedge \phi \psi_n \alpha_A \theta \rightarrow \phi \psi \alpha_A \theta.$$

因为 $\neg \psi_1, \dots, \neg \psi_n \in Y$, 所以 $\phi \psi_1 \alpha_A \theta, \dots, \phi \psi_n \alpha_A \theta \in w$, 因此据⑥, 有 $\phi \psi \alpha_A \theta \in w$ 。矛盾于设定。

假设④不成立, 则存在 $\theta_1, \dots, \theta_n \in Z$ 使得 $\vdash \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \rightarrow \theta$ 。据规则 RK3, 我们有

$$\textcircled{7} \quad \vdash \varphi \psi \alpha_A \theta_1 \wedge \dots \wedge \varphi \psi \alpha_A \theta_n \rightarrow \varphi \psi \alpha_A \theta。$$

因为 $\theta_1, \dots, \theta_n \in Z$, 所以 $\varphi \psi \alpha_A \theta_1, \dots, \varphi \psi \alpha_A \theta_n \in w$, 因此据⑦, 有 $[\alpha_\varphi] \psi \in w$ 。矛盾于设定。

据②-④和 Lindenbaum-引理, 存在 $xyz \in W$ 使得

$$\{\neg \varphi': \varphi' \psi' \alpha_A \theta' \in w\} \cup \{\varphi\} \subseteq x, \quad \{\neg \psi': \varphi' \psi' \alpha_A \theta' \in w\} \cup \{\psi\} \subseteq y, \quad \{\theta': \varphi' \psi' \alpha_A \theta' \in w\} \cup \{\neg \theta\} \subseteq z。$$

由此易见 $R_{\alpha_A} wxyz$ 成立, 从而①成立。 $\dashv$

定理 **DEPL** 相对 Frame 完全。 $\dashv$

易见系统 **DEPL** 相对上述语义是极小系统。我们还可以增加公理。例如

$$(KMP) \quad \varphi \psi \alpha_A \theta \wedge \varphi \wedge \psi \rightarrow \theta。$$

这个公理说明, 若在当下状态目的和背景知识为真且 $\varphi \psi \alpha_A \theta$ 成立, 则 θ 也为真。

下面我们来验证 **KMP** 加入上述系统相对下列框架条件可靠和完全:

$$(kmp) \quad R_{\alpha_A} wwww, \quad \text{对每一 } w \in W。 \quad (\text{易见}(kmp)\text{表述一种自返关系。})$$

可靠性: 设① $w \in [\varphi \psi \alpha_A \theta]$, 且② $w \in [\varphi]$ 且 $w \in [\psi]$ 。据①, 有

$$\textcircled{3} \quad \forall xyz \in W (R_{\alpha_A} wxyz \text{ 且 } x \in [\varphi] \text{ 且 } y \in [\psi] \Rightarrow z \in [\theta])。$$

据(kmp), 有 $R_{\alpha_A} wwww$, 再据③, 有 $w \in [\varphi]$ 且 $w \in [\psi] \Rightarrow w \in [\theta]$ 。再据②, 有 $w \in [\theta]$ 。

完全性: 只须验证(kmp)成立。令 W 是所有极大一致集的集合, 且令 $w \in W$ 。据公理 **KMP**, 我们有

$$\varphi \psi \alpha_A \theta \in w \Rightarrow \neg \varphi \in w \text{ 或 } \neg \psi \in w \text{ 或 } \theta \in w, \quad \text{对所有公式 } \varphi, \psi \text{ 和 } \theta。$$

再据典范框架的典范关系的构造, 我们有 $R_{\alpha_A} wwww$ 。

我们还可以考虑复合活动的情况。这里我们举例考虑复合活动 $(\alpha \cup \beta)_A$:

$$(\%) \quad R_{(\alpha \cup \beta)_A} = R_{\alpha_A} \cup R_{\beta_A}。$$

易证上述框架条件能完全解释下列公式:

$$(Ax_{\cup}) \quad \varphi \psi (\alpha \cup \beta)_A \theta \leftrightarrow \varphi \psi \alpha_A \theta \wedge \varphi \psi \beta_A \theta。$$

读者可以考虑框架条件

$$R_{(\alpha; \beta)_A} = R_{\alpha_A} \circ R_{\beta_A} = \{ \langle w, x, y, z \rangle \in W^4 : \exists z_0 \in W (R_{\alpha_A} wxyz_0 \text{ 且 } R_{\beta_A} z_0xyz) \}$$

能否完全解释下列公式:

$$(Ax_{;}) \quad \varphi \psi (\alpha; \beta)_A \theta \leftrightarrow \varphi \psi \alpha_A (\varphi \psi \beta_A \theta)。 \quad ([(\alpha; \beta)_A]_{\varphi, \psi} \theta \leftrightarrow [\alpha_A]_{\varphi, \psi} [\beta_A]_{\varphi, \psi} \theta^{18})$$

十二、活动后果

本节我们建立一个逻辑 **AA**, 用于刻画主体 A 做了活动 α 后产生后果 φ 的逻辑特征。

读者可以将我们这里的工作与文献 [8] 第 2 节关于实践的逻辑对照起来阅读。

公式的形成规则: $p \mid \neg \varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid [\alpha_A] \varphi \mid A \alpha \varphi$, 其中 $p \in At$, $A \in Agent$, $\alpha \in Act$ 。

$[\alpha_A] \varphi$ 的直观意义是: “‘ A 做完 α 后 φ 真’是必然的”, 而 $A \alpha \varphi$ 的直观意义是: 主体 A 做完 α 后产生后果 φ 。前者指的是一种必然性的趋势, 而后者只描述了一种实然性, 所以 $[\alpha_A] \varphi$ 和 $A \alpha \varphi$ 是不同的。从下面它们的真值集定义就能看出。

称 $\langle W, R \rangle$ 是框架, 当且仅当, W 是非空集, 且 R 是定义域为 $Act \times Agent$ 上的映射, 使得对每一 $\langle \alpha, A \rangle \in Act \times Agent$, R_{α_A} 是 W 上的二元通达关系。

称 $\langle W, R, [] \rangle$ 是模型, 当且仅当 $\langle W, R \rangle$ 是框架且 $[]$ 是从 At 到 $P(W)$ 中的映射。

所有上述框架的类记作 **Frame**。

归纳定义 φ 相对 M 的真值集 $[\varphi]$ 如下:

- (1) $w \in [\neg \varphi] \Leftrightarrow w \notin [\varphi]$, (2) $w \in [\varphi \wedge \psi] \Leftrightarrow w \in [\varphi] \text{ 且 } w \in [\psi]$,
- (3) $w \in [[\alpha_A] \varphi] \Leftrightarrow R_{\alpha_A}(w) \subseteq [\varphi]$, (4) $w \in [A \alpha \varphi] \Leftrightarrow \forall u (u R_{\alpha_A} w \Rightarrow u \in [[\alpha_A] \varphi])$ 。

活动后果系统 **AA** 定义如下: **TA** 和 **MP** 如前定义,

$$(K_{\alpha_A}) \quad [\alpha_A] (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [\alpha_A] \varphi \rightarrow [\alpha_A] \psi, \quad (RN_{\alpha_A}) \quad \varphi / [\alpha_A] \varphi,$$

¹⁸ 参见 [7] 的 240 页。

(A_{αA}) $[\alpha_A]\varphi \vee [\alpha_A]\neg A\alpha\varphi$, (RA_{αA}) $\langle \alpha_A \rangle \psi \rightarrow [\alpha_A]\varphi / \psi \rightarrow A\alpha\varphi$. $\perp$

说明：公理 A_{αA} 的直观意义应该是自然的。

易见 AA 有下列导出规则 $[\alpha_A]\varphi / \varphi \vee A\alpha\varphi$ 和内定理 AαT。

定义从 Form 到不含模态公式的子语言 Form₀ ⊆ Form 的翻译映射 t 如下：

$$t(p) = p, \quad t(\neg\varphi) = \neg t(\varphi), \quad t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge t(\psi), \quad t([\alpha_A]\varphi) = t(A\alpha\varphi) = t(\varphi).$$

易证 AA 能 t-退化为 PC₀ 且是协调的。

定理 AA 相对 Frame 可靠。

证明：任给框架 F = ⟨W, R⟩ 和 F 上赋值 []。任给 w ∈ W。

验证公理 A_{αA}：只须证 w ∈ ⟨α_A⟩Aαφ → [α_A]φ。设 w ∈ ⟨α_A⟩Aαφ。则存在 v ∈ W 使得

① wR_{αA}v, 且 ② v ∈ [Aαφ]。据②，我们有

③ $\forall u(uR_{\alpha A}v \Rightarrow u \in [[\alpha_A]\varphi])$ 。

据①和③，有 w ∈ [[α_A]φ]。

验证规则 RA_{αA}：设① $\langle \alpha_A \rangle \psi \subseteq [[\alpha_A]\varphi]$ 。只须证：[ψ] ⊆ [Aαφ]。任给 w ∈ [ψ]。假设要证结果不成立，则 w ∉ [Aαφ]，据真值集定义，存在 u 使得② uR_{αA}w, 且 ③ u ∉ [[α_A]φ]。因为 w ∈ [ψ]，所以据②，有 u ∈ ⟨α_A⟩ψ。再据①，有 u ∈ [[α_A]φ]，矛盾于③。 $\perp$

令 W 是公式集。定义 $W^{-[\alpha_A]} =_{df} \{\varphi : [\alpha_A]\varphi \in W\}$, $W^{+\langle \alpha_A \rangle} =_{df} \{\langle \alpha_A \rangle \varphi : \varphi \in W\}$ 。 $\perp$

定义 AA 的典范框架 ⟨W, R⟩ 如下：

① W = {w : w 是 AA 的极大一致集}，

② R = {R_{αA} : ⟨α, A⟩ ∈ Act × Agent}, 使得对每一 ⟨α, A⟩ ∈ Act × Agent,

$$R_{\alpha A} = \{\langle w, u \rangle \in W^2 : w^{-[\alpha_A]} \subseteq u\}, \quad \text{对每一 } \langle \alpha, A \rangle \in \text{Act} \times \text{Agent}.$$

定义 AA 的典范模型 ⟨W, R, []⟩ 如下：⟨W, R⟩ 是 AA 的典范框架，且

③ [p] = |p|, 对每一原子公式 p。

典范框架主引理 令 ⟨W, R⟩ 是 AA 的典范框架，且令 w ∈ W。则

(#) $A\alpha\varphi \in w \Leftrightarrow \forall u \in W(uR_{\alpha A}w \Rightarrow [\alpha_A]\varphi \in u)$ 。

证明：“⇒”：设 Aαφ ∈ w。任给 u ∈ W 使得 uR_{αA}w。要证 [α_A]φ ∈ u。为此任给 v ∈ W 使得

uR_{αA}v。最后只须证 φ ∈ v。据 uR_{αA}v 和 uR_{αA}w，有① $u^{-[\alpha_A]} \subseteq v$, 且 ② $w^{+\langle \alpha_A \rangle} \subseteq u$ 。

因为 Aαφ ∈ w，所以 ⟨α_A⟩Aαφ ∈ w^{+⟨α_A⟩}，再据②，有 ⟨α_A⟩Aαφ ∈ u。再据公理 A_{αA}，有 [α_A]φ ∈ u。

再据①，有 φ ∈ v。

“⇐”：设 Aαφ ∉ w。证：∃ u ∈ W (uR_{αA}w 且 ¬[α_A]φ ∈ u)。据 Lindenbaum-引理，只须证

③ $w^{+\langle \alpha_A \rangle} \cup \{\neg[\alpha_A]\varphi\}$ 是一致的。

假设③不成立，则存在 ⟨α_A⟩φ₁, ..., ⟨α_A⟩φ_n ∈ w^{+⟨α_A⟩} 使得 ⊢ ⟨α_A⟩φ₁ ∧ ... ∧ ⟨α_A⟩φ_n → [α_A]φ。我们

可以证明类似 3.1.5 (6) 的结果，从而有 ⊢ ⟨α_A⟩(φ₁ ∧ ... ∧ φ_n) → [α_A]φ。据规则 RA_{αA}，有

④ ⊢ φ₁ ∧ ... ∧ φ_n → Aαφ。

因为 ⟨α_A⟩φ₁, ..., ⟨α_A⟩φ_n ∈ w^{+⟨α_A⟩}，所以 φ₁, ..., φ_n ∈ w，再据④，有 Aαφ ∈ w，矛盾于设定。 $\perp$

定理 AA 相对 Frame 完全。 $\perp$

系统 AA 相对上述语义是极小系统。我们还可以增加公理。例如，¬Aα⊥。易证完全解释它的框架条件是：∀w ∃u (uR_{αA}w)。

鸣 谢

中山大学逻辑与认知研究所博士生高东平和硕士生王景周审阅了本文前半部分初稿，分别指出几处笔误。在此向他们表示笔者的衷心感谢！

参考文献

- [1] D. Harel, D. Kozen, J. Turyn. Dynamc Logc[M]. The MIT Press, 2000.
- [2] 李小五. 模态逻辑讲义 [M]. 中山大学出版社, 2005.9.
- [3] 刘壮虎, 李小五. 对动作的认知 [J]. 湖南科技大学学报, 社会科学版, 2005, (6): 33-38.
- [4] 李小五. 条件句逻辑 [M]. 人民出版社, 2003.8.
- [5] 李小五. 我知道你——知道主体的逻辑[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(2): 66-79.
- [6] 李小五. 三类知道活动的逻辑[J/OL]. 逻辑与认知. 2005,(3): 35-59.
- [7] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. Modal Logic [M], Cambridge University Press, 2001.
- [8] 李小五. 加标动态逻辑及其若干应用[J]. 哲学动态, 2005 年逻辑学增刊.
- [9] J. P. Delgrande. A First-Order Conditional Logic for Prototypical Properties [J]. Artificial Intelligence, vol. 33, 105-130, 1987.
- [10] 李小五. 数理逻辑讲义[M]. 中山大学出版社, 2005.9.
- [11] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. A Companion to Modal Logic[M]. Methuen & Co. Ltd, 1984.
- [12] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. A New Introduction to Modal Logic[M]. Routledge, 1996.
- [13] 李小五. 动态认知条件句逻辑 DEC1[J/OL]. 逻辑与认知. 2004, (4): 15-26.
- [14] 李小五. 动态认知条件句逻辑 DEC2[J/OL]. 逻辑与认知. 2005, (1): 43-53.

Report 2005

LI Xiao-wu

(Institute of Logic and Cognition of Sun Yat-sen University 510275, Guangdong, China)

Abstract: We establish some logics by which characterize respectively the concepts as follows: the conditional of back tracking cause, the negation by action, the universal action possibility, the weak preponderance relation of knowing actions, the knowing agent, the believing agent, the knowing individual, the knowing proposition by action, the knowing proposition by action, the dynamic epistemic process, the action aftereffect.

Key words: conditional of back tracking cause; negation by action; universal action possibility; weak preponderance relation of knowing actions; knowing agent; believing agent; knowing individual; knowing proposition by action, dynamic epistemic process; action aftereffect