哲思逻辑

杜国平[1, 2]

（1.南京航空航天大学计算机系 210016；2. 南京大学哲学系 210093）

内容提要：本文以形而上学的基本命题为背景，以现代逻辑的公理化方法为工具，建立了一个具有形而上学内容的公理体系。

关键词：否定；哲思逻辑；弗协调；直觉主义

中图分类号：B81 文献标识码：A

一、形而上学的哲思

金岳霖曾经说过"'形而上学'一词完全是个好词"，它"探讨那些非常基本以致既不能证明也不能反驳的思想或概念"[1]。

形而上学的远见卓识之于修身养性、动心怡情是非常重要的，同样，形而上学的慎密论证之于教化众生、齐家治国也是不可或缺的。本文拟摘取形而上学中比较一般的命题，利用现代逻辑这一论证工具来建立一个具有形而上学内容的公理体系。

为此，首先来考察最基本的形而上学概念"否定"。事物的否定是多方面、多形式的。例如，一事物可以通过自身的辩证产物导致对自身的否定，这种否定可以称之为辩证否定；一事物可以通过转化为与自身相矛盾的事物导致对自身的否定，这种否定可以称之为矛盾否定；一事物可以通过转化为与自身相对立的事物导致对自身的否定，这种否定可以称之为对立否定；一事物还可以通过转化为与自身同时成立的事物从而导致对自身的否定，这种否定可以称之为两可否定。著名的辩者邓析常操两可之说，所以也可以将两可否定称之为邓析否定。由此可见，事物的否定至少可以分为辩证否定、矛盾否定、对立否定和两可否定等。我们可以分别用$*A$、$\neg A$、$\triangledown A$、$\vartriangle A$来表示事物A的辩证否定、矛盾否定、对立否定和两可否定。

事物A与其辩证否定$*A$是可以同时存在，也可以同时不存在的；事物A与其矛盾否定$\neg A$既不能同时存在，也不能同时不存在，即两者必存在其一，且只存在其一；事物A与其对立否定$\triangledown A$不能同时存在，但是可以同时不存在；事物A与其两可否定$\vartriangle A$可以同时存在，但是不能同时不存在。

一事物与这些否定之间存在着错综复杂的联系。如果我们用符号$A \to B$表示事物A与B之间的转化生成关系，则事物与其否定之间最主要的联系包括如下三条：

[1] 事物的对立否定可以转化为事物的矛盾否定，即：$\triangledown A \to \neg A$；

[2] 一事物矛盾否定的辩证产物为该事物的两可否定，即$* \neg A \to \vartriangle A$；

[3] 一事物辩证产物的矛盾否定为该事物的对立否定，即 $\neg * A \to \triangledown A$。

这是因为：如果事物 A 的对立否定 $\bigtriangledown A$ 存在，则事物 A 不存在；既然事物 A 不存在，则其矛盾否定 $\neg A$ 存在。如果事物 A 不存在，则 A 的矛盾否定 $\neg A$ 存在，进而 $\neg A$ 的辩证否定 $*\neg A$ 存在；如果 $\neg A$ 的辩证否定 $*\neg A$ 不存在，则 $\neg A$ 不存在，进而有 A 存在。如果事物 A 存在，则 A 的矛盾否定 $\neg A$ 不存在，但是 $\neg A$ 的辩证否定 $*\neg A$ 可以存在，也可以不存在；如果 $\neg A$ 的辩证否定 $*\neg A$ 存在，则 $\neg A$ 可存在，也可以不存在，进而 A 可以不存在，也可以存在。因此，事物 A 与 $*\neg A$ 是可以同时存在，但是不能同时不存在的关系，即 A 与 $*\neg A$ 是两可否定的关系。如果事物 A 存在，则 A 的辩证否定 $*A$ 存在，进而 $*A$ 的矛盾否定 $\neg * A$ 不存在；如果 $*A$ 的矛盾否定 $\neg * A$ 存在，则 $*A$ 不存在，进而有 A 不存在。如果事物 A 不存在，则 A 的辩证否定 $*A$ 可以存在，也可以不存在，进而 $*A$ 的矛盾否定 $\neg * A$ 可以不存在，也可以存在；如果 $*A$ 的矛盾否定 $\neg * A$ 不存在，则 $*A$ 存在，进而 A 可以存在，也可以不存在。因此，事物 A 与 $\neg * A$ 是不可同时存在，但是可以同时不存在的关系，即 A 与 $\neg * A$ 是对立否定的关系。

下面，我们再选择一些最基本的形而上学命题：

[4] 易之为书也，不可远；为道也，屡迁，变动不居，周流六虚，上下无常，刚柔相易。不可为典要，唯变所适[2]。

这说明：任何事物都变动不居，都将转化为别的事物。我们可以将此规律称之为变动不居律：$A \rightarrow *A$。其中 $*A$ 称为 A 的辩证产物。

[5] 象曰天地不交否。

象曰：否终则倾，何可长也[3]。

物不可以终通，故受之以否。物不可以终否，故受之以同人，与人同者，物必归焉[4]。

否极泰来，物极必反。

这一思想用比较现代的说法，就是否定之否定则为肯定。可表示为：$\neg\neg A \rightarrow A$。

[6] 一阴一阳之谓道[5]。

道生一，一生二，二生三，三生万物[6]。

我们可以将一事物称为“阳”，其矛盾否定称为“阴”。用任一命题 B 表示万物。那么上述思想可表示为：$A \wedge \neg A \rightarrow B$。

下面，我们以上述形而上学思想为基础，适当选择一些基本命题为出发点，将其组织成一个公理体系——哲思逻辑。需要指出的是，我们选择作为公理的形而上学命题并不一定是我们认可的；我们的公理体系应该这样来理解，即一旦我们接受了作为公理的形而上学命题，那么我们就应该接受以定理形式出现的其它形而上学命题。这些定理的形而上学意义我们将不再一一列出。

二、哲思逻辑

哲思逻辑的形式语言是在经典命题逻辑形式语言的基础上增加：

一元联结符：$*$

而得到的。

公式的形成规则中增加下面一条规则：

如果 A 是公式，则 $*A$ 是公式。

增加如下两个定义符号：

$\triangle A =_{def} *\neg A$

$\bigtriangledown A =_{def} \neg *A$

其中，一元联结符△称为弗协调联结符，一元联结符▽称为直觉主义联结符。

哲思逻辑的公理系统是在经典命题逻辑系统中增加一条公理而形成。包括如下公理模式和推理规则：

$(Ax1)$ $A \to (B \to A)$

$(Ax2)$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$(Ax3)$ $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

$(Ax4)$ $A \wedge B \to A$

$(Ax5)$ $A \wedge B \to B$

$(Ax6)$ $A \to (B \to A \wedge B)$

$(Ax7)$ $A \to A \vee B$

$(Ax8)$ $B \to A \vee B$

$(Ax9)$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

$(Ax10)$ $A \to *A$

推理规则（分离规则 MP）：从 A 和 $A \to B$ 可推出 B [7]。

定义 1 公式 A 由公式集 Σ 形式可推演，当且仅当存在公式序列

A_1，A_2，……，A_{n-1}，A_n

使得 $A_n = A$，并且每一个 $A_k (1 \le k \le n)$ 满足下列条件之一：

[1] A_k 是公理；

[2] $A_k \in \Sigma$；

[3] 有 i，$j \prec k$，使得 $A_i = A_j \to A_k$。

如果公式 A 由公式集 Σ 形式可推演，则称 Σ 可推演出 A，符号记为 $\Sigma \vdash A$。

定义 2 如果公式 A 由 $\varnothing$ 形式可推演，则称公式 A 是可证明的。由 $\varnothing$ 到 A 形式可推演的一个公式序列称为公式 A 的一个证明。如果公式 A 是可证明的，则称公式 A 为哲思逻辑系统的定理，符号记为 $\vdash A$。

显然，经典命题逻辑的定理在哲思逻辑中依然成立。所以，在下面定理的证明中将直接使用经典命题逻辑的定理（简记为 PTh）。

在哲思逻辑中有如下定理：

定理 1 $\vdash \neg * A \to \neg A$

定理 2 $\vdash \neg A \to \triangle A$

定理 3 $\vdash \neg \triangle A \to A$

定理 4 $\vdash A \to \neg \triangledown A$

定理 5 $\vdash \triangledown A \to \neg A$

定理 6 $\vdash A \wedge \triangledown A \to B$

证明：

1	$\triangledown A \to \neg A$	**定理** 5
2	$A \wedge \triangledown A \to A \wedge \neg A$	1 PTh
3	$A \wedge \neg A \to B$	PTh
4	$A \wedge \triangledown A \to B$	2、3 PTh

定理 7 $\vdash A \vee \triangle A$

证明：

1	$A \vee \neg A$	PTh
2	$A \to A \vee * \neg A$	$(Ax7)$
3	$\neg A \to * \neg A$	$(Ax10)$
4	$* \neg A \to A \vee * \neg A$	$(Ax8)$
5	$\neg A \to A \vee * \neg A$	3、4 PTh
6	$(A \to A \vee * \neg A)$ $\to ((\neg A \to A \vee * \neg A) \to (A \vee \neg A \to A \vee * \neg A))$	$(Ax9)$
7	$(\neg A \to A \vee * \neg A) \to (A \vee \neg A \to A \vee * \neg A)$	2、6 MP
8	$A \vee \neg A \to A \vee * \neg A$	5、7 MP
9	$A \vee * \neg A$	1、8 MP
10	$A \vee \triangle A$	9 △**定义**

定理 8

[1] $\vdash (A \to B) \to ((A \to \triangledown B) \to (A \to \triangledown A))$

[2] $\vdash (\triangledown A \to B) \to ((\triangledown A \to \triangledown B) \to (\triangledown A \to A))$

证明：

[1]

1	$\triangledown B \to \neg B$	**定理** 5
2	$(A \to \triangledown B) \to (A \to \neg B)$	1 PTh
3	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to B \wedge \neg B))$	PTh

4 $(A \to B) \to ((A \to \triangledown B) \to (A \to B \wedge \neg B))$ 2、3 PTh

5 $B \wedge \neg B \to \triangledown A$ PTh

6 $(A \to B) \to ((A \to \triangledown B) \to (A \to \triangledown A))$ 4、5 PTh

[2] 略。

定义 3 哲思逻辑的一个赋值 v 是以所有公式的集 $Form(L^{PC})$ 为定义域、以 $\{0,1\}$ 为值域的一个函数，并满足下列条件：

[1] $v(\neg A)=1$，当且仅当，$v(A)=0$；

[2] 如果 $v(*A)=0$，那么 $v(A)=0$；

[3] $v(A \wedge B)=1$，当且仅当，$v(A)=v(B)=1$；

[4] $v(A \vee B)=1$，当且仅当，$v(A)=1$ 或者 $v(B)=1$；

[5] $v(A \to B)=1$，当且仅当 $v(A)=0$ 或者 $v(B)=1$。

可以证明：

定理 9 设 A 为任一公式，v 是一哲思逻辑赋值，则

[1] 如果 $v(A)=0$，那么 $v(\triangle A)=1$；

[2] 如果 $v(A)=1$，那么 $v(\triangledown A)=0$。

定义 4 称一哲思逻辑赋值 v 为公式集 Γ 的模型，当且仅当，对 Γ 中任一公式 A 有 $v(A)=1$；称 A 为 Γ 的语义后承，记作 $\Gamma \models A$，当且仅当，Γ 的任一模型都使得 $v(A)=1$；$\varnothing \models A$ 简记为 $\models A$，此时对任一个赋值 v 都有 $v(A)=1$，因而也称 A 为有效的。

定理 10 设 A 为任意的哲思逻辑公式，则

[1] $\models \triangledown \triangle A \to A$；

[2] $\models A \to \triangle \triangledown A$；

[3] $\models (A \to B) \to (\triangledown B \to \triangle A)$

[4] $\models (A \to \triangledown B) \to (B \to \triangle A)$

[5] $\models (\triangle A \to B) \to (\triangledown B \to A)$

[6] $\models (\triangle A \to \triangledown B) \to (B \to A)$

[7] $\models (A \to B) \to ((A \to \triangledown B) \to \triangle A)$

[8] $\models (\triangle A \to B) \to ((\triangle A \to \triangledown B) \to A)$

证明：

[1] 假设 $\models \triangledown \triangle A \to A$ 不成立，则存在哲思逻辑赋值 v 使得

① $v(\triangledown \triangle A \to A)=0$

由①可得：

② $v(\bigtriangledown\triangle A)=1$

③ $v(A)=0$

由②可得：

④ $v(\triangle A)=0$

由④可得：

⑤ $v(A)=1$

③、⑤矛盾。所以假设不成立。因此 $\vdash\bigtriangledown\triangle A\to A$**。**

[2] 、[3]、[4]、[5]、[6]**略。**

定理 11 **设** A**、** B **为任意的哲思逻辑公式，则下列公式都不是哲思逻辑的有效式：**

[1] $*A\to A$

[2] $A\to\neg\triangle A$

[3] $\neg A\to\bigtriangledown A$

[4] $A\wedge\triangle A\to B$

[5] $A\wedge *A\to B$

[6] $A\vee\bigtriangledown A$

[7] $A\vee *A$

[8] $\bigtriangledown(A\wedge\bigtriangledown A)$

[9] $*(A\wedge *A)$

[10] $\triangle(A\wedge\triangle A)$

[11] $(A\to B)\to((A\to *B)\to *A)$

[12] $(*A\to B)\to((*A\to *B)\to A)$

[13] $(A\to B)\to((A\to\triangle B)\to\triangle A)$

[14] $(\triangle A\to B)\to((\triangle A\to\triangle B)\to A)$

[15] $(A\to B)\to((A\to\bigtriangledown B)\to\bigtriangledown A)$

[16] $(\bigtriangledown A\to B)\to((\bigtriangledown A\to\bigtriangledown B)\to A)$

定理 12 **在哲思逻辑中公式** $A\wedge\bigtriangledown A$ **没有模型。**

定理 13 **哲思逻辑的公理都是有效的。**

定理 14 **如果** $\Sigma\vdash A$ **并且** $\Sigma\vdash A\to B$**，那么** $\Sigma\vdash B$**。**

定理 15 **（哲思逻辑可靠性定理） 设** Σ **为任一公式集，** A **为任一公式，则**

[1] **如果** $\Sigma\vdash A$**，那么** $\Sigma\vdash A$**；**

[2] 如果$\vdash A$，那么$\models A$。

定义 5 令Γ为一公式集，

[1] $\bar{\Gamma} =_{def} \{A \in Form(L)：\Gamma \vdash A\}$；

[2] 称Γ为可证伪的，当且仅当，$\bar{\Gamma} \neq Form(L)$，否则，称$\Gamma$为不可证伪的；

[3] 称一可证伪集Γ为极大的，当且仅当，Γ是可证伪的，并且对任一公式A，如果$A \notin \Gamma$，则$\Gamma \cup \{A\}$是不可证伪的；

[4] 称Γ为不协调的，当且仅当，有公式A使得公式集$\{A，☆A\} \in \Gamma$，其中☆$\in \{\neg$，$\triangle$，$\triangledown$，$*\}$；否则，称Γ为协调的。

显然，不可证伪的一定是不协调的，而协调集一定是可证伪的。存在有可证伪的不协调集，例如公式集$\{p_0, * p_0\}$。该公式集是不协调的，但是它是可证伪的。因为在哲思逻辑中$A \wedge *A \rightarrow B$不是定理。

定理 16 如果Γ是极大可证伪的，那么：

[1] $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$；

[2] $A \in \Gamma$，当且仅当，$\neg A \notin \Gamma$；

[3] 如果$A \in \Gamma$，那么$*A \in \Gamma$；

[4] 如果$A \notin \Gamma$，那么$\triangle A \in \Gamma$；

[5] 如果$A \in \Gamma$，那么$\triangledown A \notin \Gamma$；

[6] $A \wedge B \in \Gamma$，当且仅当，$A \in \Gamma$并且$B \in \Gamma$；

[7] $A \vee B \in \Gamma$，当且仅当，$A \in \Gamma$或者$B \in \Gamma$；

[8] $A \rightarrow B \in \Gamma$，当且仅当，$A \notin \Gamma$并且$B \in \Gamma$。

证明：

[1] $\Leftarrow$显然成立。

再证$\Rightarrow$。设$\Gamma \vdash A$，但是$A \notin \Gamma$。因为Γ是极大可证伪的，所以$\Gamma \cup \{A\} \vdash C \wedge \neg C$。因此有：

1 $\Gamma \vdash A \rightarrow C \wedge \neg C$

2 $\Gamma \vdash \neg(C \wedge \neg C) \rightarrow \neg A$

3 $\Gamma \vdash \neg(C \wedge \neg C)$

4 $\Gamma \vdash \neg A$

5 $\Gamma \vdash A$

6 $\Gamma \vdash A \wedge \neg A$

7 $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \rightarrow B$

8 $\Gamma \vdash B$

这样，Γ 就不可证伪。这与 Γ 极大可证伪矛盾。因此假设不成立。

定理 17 **设 Γ 是一极大可证伪集，对任一公式 A，令**

$$v^{\circ}(A)=1 \text{ 当且仅当 } A\in\Gamma \text{。}$$

则 v° 是一哲思逻辑赋值。即 v° 是极大可证伪集 Γ 的模型。

定理 18 **任一可证伪的公式集 Γ 均可扩充为极大可证伪的。**

定理 19 **任一可证伪的公式集 Γ 均有模型。**

定理 20 **（哲思逻辑完全性定理） 设 Σ 为任一公式集，A 为任一公式，则**

[1] **如果 $\Sigma \vDash A$，那么 $\Sigma \vdash A$；**

[2] **如果 $\vDash A$，那么 $\vdash A$。**

证明：

[1]

如果 $\Sigma \vDash A$，则 $\Gamma\cup\{\neg A\}$ 没有模型。所以 $\Gamma\cup\{\neg A\}$ 不可证伪。因此有：

1　$\Gamma\cup\{\neg A\} \vdash C\wedge\neg C$

2　$\Gamma \vdash \neg A\to C\wedge\neg C$

3　$\Gamma \vdash \neg(C\wedge\neg C)\to\neg\neg A$

4　$\Gamma \vdash \neg(C\wedge\neg C)$

5　$\Gamma \vdash \neg\neg A$

6　$\Gamma \vdash \neg\neg A\to A$

7　$\Gamma \vdash A$

[2] **当 Σ 为 $\varnothing$ 时，由**[1]**直接可得。**

三、关于哲思逻辑的哲思

在哲思逻辑系统中，因为 $A\wedge\neg A$ 是没有模型的，$A\vee\neg A$ 是有效式，所以一元联结符 $\neg$ 既符合不矛盾律又符合排中律；因为 $A\wedge\triangledown A$ 是没有模型的，$A\vee\triangledown A$ 不是有效式，所以一元联结符 $\triangledown$ 符合不矛盾律但不符合排中律；因为 $A\wedge\triangle A$ 有模型，$A\vee\triangle A$ 是有效式，所以一元联结符 $\triangle$ 不符合不矛盾律但符合排中律；因为 $A\wedge *A$ 有模型，$A\vee *A$ 不是有效式，所以一元联结符 $*$ 既不符合不矛盾律也不符合排中律。

一般把不矛盾律在其中不普遍有效的逻辑系统称为弗协调逻辑系统，所以我们将一元联结符 $\triangle$ 称为弗协调联结符；一般把排中律在其中不普遍有效的逻辑系统称为直觉主义逻辑系统，所以我们将一元联结符 $\triangledown$ 称为直觉主义联结符；一元联结符 $*$ 既不符合不矛盾律也不符合排中律，所以可以说，$*$ 既是弗协调联结符也是直觉主义联结符。因此，哲思逻辑可以作为不协调理论和直觉主义理论的逻辑工具。

因为 $A\wedge\triangle A\to B$ 和 $A\wedge *A\to B$ 均不是哲思逻辑系统中的有效式，所以著名的司各脱法则对于一元联结符 $\triangle$ 和 $*$ 均不成立。

在哲思逻辑中，对于一元联结符$\neg$来说，A与$\neg A$之间有下列关系成立：

对于任一哲思逻辑的赋值v，如果$v(A)=1$，那么$v(\neg A)=0$；如果$v(\neg A)=0$，那么$v(A)=1$；如果$v(A)=0$，那么$v(\neg A)=1$；如果$v(\neg A)=1$，那么$v(A)=0$。所以，A与$\neg A$之间是矛盾关系。

对于一元联结符$*$来说，A与$*A$之间有下列关系成立：

对于任一哲思逻辑的赋值v，如果$v(A)=1$，那么$v(*A)=1$；如果$v(*A)=0$，那么$v(A)=0$；如果$v(A)=0$，那么$v(*A)=1$或者$v(*A)=0$；如果$v(*A)=1$，那么$v(A)=1$或者$v(A)=0$。所以，A与$*A$之间是差等关系。

对于一元联结符$\triangledown$来说，A与$\triangledown A$之间有下列关系成立：

对于任一哲思逻辑的赋值v，如果$v(A)=1$，那么$v(\triangledown A)=0$；如果$v(\triangledown A)=1$，那么$v(A)=0$；如果$v(A)=0$，那么$v(\triangledown A)=1$或者$v(\triangledown A)=0$；如果$v(\triangledown A)=0$，那么$v(A)=1$或者$v(A)=0$。所以，A与$\triangledown A$之间是上反对关系。

对于一元联结符$\triangle$来说，A与$\triangle A$之间有下列关系成立：

对于任一哲思逻辑的赋值v，如果$v(A)=0$，那么$v(\triangle A)=1$；如果$v(\triangle A)=0$，那么$v(A)=1$；如果$v(A)=1$，那么$v(\triangle A)=1$或者$v(\triangle A)=0$；如果$v(\triangle A)=1$，那么$v(A)=1$或者$v(A)=0$。所以，A与$\triangle A$之间是下反对关系。

在此意义上，哲思逻辑也可称为对当关系逻辑。

金岳霖指出："哲学对我们来说是一种游戏。我们可能天真地做哲学游戏。这立即使专家感到可笑和气愤，但是我们尽可能努力根据哲学规则来做哲学游戏。我们不考虑成功或失败，因为我们并不把结果看作过程的一半。正是在这里，游戏是生活中最严肃的活动之一。其它活动常常有其它打算。……但是一个人在肮脏的小阁楼上做游戏，这十足地表达了一颗被抛入生活之流的心灵。"[8]

注释和参考文献：

[1] 金岳霖. 金岳霖学术论文选[C]. 中国社会科学出版社,1990. P466.

[2] 朱 熹. 周易本义[M]. 天津市古籍书店, 1986. P338.

[3] 朱 熹. 周易本义[M]. 天津市古籍书店, 1986. P101-103.

[4] 朱 熹. 周易本义[M]. 天津市古籍书店, 1986. P359.

[5] 朱 熹. 周易本义[M]. 天津市古籍书店, 1986. P293.

[6] 老 子. 老子・四十二章[M].

[7] 张清宇 郭世铭 李小五. 哲学逻辑研究[M]. 社会科学文献出版社,1997.

[8] 金岳霖. 金岳霖学术论文选[C]. 中国社会科学出版社,1990. P470.

Metaphysical Logic

Du Guo-ping[1,2]

(1.Nanjing University. Nanjing 210093,China; 2.Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016,China)

Abstract: On the background of fundamental propositions of metaphysics, this paper, using the tool of axiomatic method of modern logic, builds an axiomatic system with the content of metaphysics.

Key words: negation；metaphysical logic；paraconsistent；intuitionism