

# 上证综合指数的肥尾度量和风险值估计及预测

彭作祥<sup>1,2</sup>, 黎实<sup>1</sup>, 庞皓<sup>1</sup>

(1 西南财经大学统计学院,四川 成都 610074; 2 西南师范大学数学与财经学院,重庆市 北碚 400715)

**摘要:** 基于极值理论和广义 Pareto 分布方法, 本文通过局部拟合金融时序的尾分布, 运用尾指数刻画金融时序的肥尾特征, 系统地给出了尾指数的估计与检验以及风险值的估计与预测方法, 并与常用的 ARCH/GARCH 类模型进行了沪市综指的一步风险值预测实证比较分析。实证结果显示, 使用广义 Pareto 分布方法进行风险预测相对优于 GARCH 类模型。

**关键词:** 在险值; 尾指数; 预测; 极值理论; 实证分析

**中图分类号:** F224.0      **文献标识码:** A

## 1 引言

在险值(Value-at-Risk)法在度量(高频)金融时序的风险值时存在两方面的缺陷:一是高频金融时序常有肥尾现象,若仍然假设收益率时序服从正态分布,通常会导致风险值的低估;另一方面,在实证分析中,借助于 Jarque-Bera 检验,收益率时序遵从正态分布的假设检验通常被拒绝,导致出现关于收益率分布的设定偏误问题。极值理论(Extreme Value Theory)和 ARCH/GARCH 类模型在刻画肥尾度量风险值方面具有不同的统计特性。

文献[1][2]系统地研究极值理论及其在金融、保险业中的应用;Mcneil 在其一系列的文章中研究金融时序收益率的尾指数(Tail Index)和风险值的估计;文献[8][9]分别对亚洲股票市场和牙买加股票市场通过极值理论估计(指数)收益率的尾指数和风险值;文献[10]通过极值理论方法对土耳其 ISE-100 收益率序列尾指数进行了估计,得到风险值的一步预测过程。

应当说,上述文献借助于尾指数关于分布或密度函数尾部性质的研究,仅局限于极限理论框架范围内进行的研究,笔者认为其研究的视角相对而言较为狭窄。若能借助于关于分布或密度函数尾部性质的研究,评价其有限样本的性质和对极限观测值个数的灵敏度,期望分析具有 ARCH/GARCH 类误差项高频金融时序的单位根检验中高阶矩(或高阶条件矩)的存在条件。同时,关于(上、下)尾指数的分析,可以用于反映杠杆效应的强度,也可有利于波动模型的设定。基于这些想法,笔者试图通过极值理论建立尾指数估计量,以刻画分布或密度函数的肥尾程度,进行风险值的估计与预测,藉此分析高阶矩(或高阶条件矩)存在的条件及效应。

## 2 极值理论概述

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为独立同分布序列<sup>1</sup>, 公共分布函数为  $F(x)$ , 若存在常数  $a_n > 0$ ,  $b_n \in R$ ,

对非退化分布函数  $G(x)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max\{X_i, 1 \leq i \leq n\} \leq a_n x + b_n) = G(x)$$

则  $G(x)$  必为

$$G_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{\frac{1}{\xi}}), & 1 + \xi x > 0, \xi \neq 0; \\ \exp(-e^{-x}), & x \in R, \xi = 0 \end{cases}$$

的一种形式。此时称  $\xi$  为尾指数， $F(x)$  属于吸引场  $G_{\xi}(x)$ ， $G_{\xi}(x)$  为极值分布类型。

文献[12]证明了正态分布、指数分布和对数正态分布属于吸引场  $G_0(x)$ ，而  $1 - F(x)$  属于吸引场  $G_{\xi}(x)$ ， $(\xi > 0)$  的充要条件为  $1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x)$ ， $L(x)$  为慢变函数。t-分布、skewed-t 分布属于吸引场  $G_{\xi}(x)$ ， $\xi > 0$ 。因此，尾指数  $\xi$  是度量分布尾部衰减的重要参数。 $\xi > 0$  时，称分布具有肥尾特征。如何估计  $\xi$  是极值理论的重要组成部分，同时亦是研究 ARCH/GARCH 族模型中高阶矩存在以及风险管理中风险值估计与预测的重要方面。

### 3 尾指数估计与检验

参数  $\xi$  的估计主要有 Hill 型估计 ( $\xi > 0$ )、Pickands 型估计 ( $\xi \in R$ ) 和矩估计 ( $\xi \in R$ ) 等。对收益率序列而言，尾部表征为数不多的超额收益或损失。理论上，收益率取值可以是无限的，则一般情况下尾指数  $\xi > 0$ 。

根据  $H(m, n)$  的散点图只能初步估计尾指数  $\xi$  的取值<sup>2</sup>，而要得到尾指数的较可靠的估计值则需要进行系统性的估计和检验。考虑到局部拟合分布函数的尾部、估计尾指数的相对有效性以及投资决策中机构投资者、散户更为关心观察值超过门限  $u$  (threshold) 后金融时序的变化情况，笔者采用 GPD 法 (General Pareto Distribution, GPD) 估计尾指数。考虑

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}, y > 0$$

其中  $u > 0$  为门限。对充分大的  $u$ ，有：

$$F_u(y) \approx G(y; \sigma_u, \xi) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\sigma_u})^{\frac{-1}{\xi}}, & 1 + \xi \frac{y}{\sigma_u} > 0, \xi \neq 0; \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma_u}}, & \xi = 0 \end{cases}$$

$G(y, \sigma, \xi)$  称为 GPD，其尾分布近似为

$$1 - F(x) = \frac{N_u}{n} (1 + \xi \frac{x - u}{\sigma_u})^{\frac{-1}{\xi}}$$

其中  $N_u$  为观察值中超过门限  $u$  的个数,  $\xi, \sigma$  为待估参数。在实证分析中, 门限  $u$  的选择可通过样本均值超过数 (sample mean exceedance) (即  $\{(u, e_n(u)), X_{1,n} < u < X_{n,n}\}$ ) 的散点图得到, 其中,  $e_n(u)$  称为样本平均超过函数(sample mean excess function, SME)。

$e_n(u)$  的定义为

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}, \text{其中: } (X - u)^+ = \begin{cases} X - u & X > u \\ 0 & X \leq u \end{cases}, I_{\{X > u\}} = \begin{cases} 1 & X > u \\ 0 & X \leq u \end{cases}$$

它为总体截断均值  $M(u) = E(X | X > u)$  的估计值。若截断分布  $F_u(x), (x = y + u)$  服从  $GPD(y, \xi, \sigma)$  分布, 则

$$M(u) = (\sigma + \xi u) / (1 - \xi), \quad \sigma + \xi u > 0$$

上述分析结论提示, 可用 Hill 散点图对尾指数进行初步估计, 再由 SME 散点图分析尾分布的特征。若 SME 为门限  $u$  的增函数 (因斜率  $\xi$  为正), 则尾分布初步估计为肥尾, 选择相对最佳的门限  $u$ ; 对此门限  $u$ , 可通过极大似然估计得到尾指数  $\xi$  的估计值。

使用 GPD 方法估计尾指数的检验可通过截断分布拟合、尾分布拟合、残差拟合完成。(a)截断分布拟合: 超过门限  $u$  的观察值对应的截断的经验分布函数值  $\hat{F}_u(x)$  与  $G(x, \hat{\xi}, \hat{\sigma})$  的拟合比较;(b)尾分布拟合: 超过门限  $u$  的观察值对应的经验尾部函数  $1 - F(x) = \frac{N_u}{n} (1 + \hat{\xi} \frac{x-u}{\hat{\sigma}_u})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$  与  $G(x, \hat{\xi}, \hat{\sigma})$  的尾部函数的拟合比较; 同时, 对超过门限  $u$  的观察值与  $G(x, \hat{\xi}, \hat{\sigma})$  的 QQ 图的拟合比较, 检验尾分布设定的合理性。(c) 残差的拟合检验: 残差定义为:  $\{\frac{1}{\hat{\xi}} \log(1 + \frac{\hat{\xi} x_i}{\hat{\sigma}}), x_i > u\}$ 。若总体的截断分布为 GPD 分布, 则残差的 QQ 图 (与指数分布比较) 应近似为斜率为 1 的直线。

#### 4 风险值的估计与预测

对风险的度量可通过风险值加以刻画, 风险值即是在正常市场(normal market)条件下, 给定置信水平的最大潜在损失。假设  $\{r_t\}$  为某金融资产或组合投资的收益率,  $\alpha$  为显著水平<sup>3</sup>,  $r_t$  为  $t$  时刻

的收益率<sup>4</sup>，风险值  $VAR_t(\alpha)$  定义为满足：

$$P(r_t \geq VAR_t(\alpha) | \Psi_{t-1}) = \alpha$$

的  $1-\alpha$  上分位数，反映了金融市场的资金的异常流动和金融资产价格的异常变动、潜在损失的可能性大小。从统计学的角度看，风险值即为大分位数。由于收益率序列普遍存在肥尾现象且不服从正态分布，笔者采用 GPD 方法估计风险值。

由 GPD 尾指数的估计方法知，对充分大的门限  $u$ ，收益率的尾分布

$$1 - F(x) \approx \frac{N_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x-u}{\hat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$$

其中  $F(x)$  为收益率的分布函数， $N_u$  为样本容量为  $n$  的观察值中超过门限  $u$  的样本点的个数。因此，给定显著水平  $\alpha$ ，风险值的估计值为

$$VAR(\alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{n\alpha}{N_u} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right]$$

根据不同的门限，可估计出风险值的变化过程，同时也可以得到风险值的点估计和区间估计。

对风险值预测和估计的另一种方法为 ARCH/GARCH 族模型（例如 J.P. 摩根公司用其估计和预测风险）。从比较的角度，笔者将其与 GPD 方法在预测风险值方面进行了对比分析。在对比分析风险值的一步预测效果中，GARCH 族和 GPD 两类模型均采用滑动窗口和逐步扩大窗宽的具体方式<sup>5</sup>。

风险值预测性能的检验，笔者采用波动比率(volatile-ratio)作为检验指标，其定义为

$$v-ratio = \frac{\sum_{i=n+1}^T I_{\{r_i > VAR_i(\alpha)\}}}{T-n}, \quad I_{\{r_i > VAR_i(\alpha)\}} = \begin{cases} 0, & \text{if } r_i < VAR_i(\alpha) \\ 1, & \text{if } r_i \geq VAR_i(\alpha) \end{cases}$$

若模型设定合理，则已实现的收益率大于同时刻的风险值的波动率将接近给定的显著水平  $\alpha$ 。

GARCH 族预测风险值的模型设定为：

$$r_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

其中  $\varepsilon_t$  为 *i.i.d.* 序列，相应的分布函数分别为标准正态分布、广义误差分布(GED)或标准化  $t$  分布。GARCH 族模型的一步预测风险值为

$$VAR_t(\alpha) = \Psi^{\leftarrow}(1-\alpha) * \sqrt{h_{t-1}}, \quad t = n+1, n+2, \dots, T$$

其中  $\Psi(x)$  为  $\varepsilon_t$  的分布函数。

GPD 模型的风险值一步预测为

$$VAR_{m+1}(\alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{N_u}{m\alpha} \right)^{\hat{\xi}} - 1 \right], m = n, n+1, \dots, T-1$$

其中， $u$  为最优门限， $\frac{N_u}{m}$ ,  $m = n, n+1, \dots, T-1$  为窗口内超过门限的比例，参数估计值  $\hat{\sigma}$ 、 $\hat{\xi}$  为使用整个样本时所得的估计值。

## 5 实证比较分析

### 5.1 数据的选取与平稳性检验

我们选择我国沪市综合价格指数（收盘价，1996年7月1日至2002年5月10日，样本容量为1408）的对数收益率的百分数(percentage of log-return series)时序为研究对象，其定义为  $shr96_t = 100 \times \{\log(P_t) - \log(P_{t-1})\}$ ，其中  $P_t$  为第  $t$  日的收盘价格指数。

考虑到高频金融时序特殊统计特性（例如，波动丛集性、长记忆性、波动的持久性、时序的结构变化等）会影响 ADF/PP 单位根检验的标准水平和势(size and power)<sup>6</sup>，在检验  $shr96$  时序平稳性时，笔者采用固定窗宽滑动窗口的 ADF 单位根检验，产生一系列 ADF 单位根检验的统计值，以此判定时序的平稳性。

模型设定为： $shr96_t = \rho shr96_{t-1} + \alpha \Delta shr96_{t-1} + \varepsilon_t$ ，检验统计量为  $z_t = \frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$ 。为保证检验的有效性，

窗宽设定为 500。结果显示（图 1 所示）， $shr96$  的非平稳假设被拒绝( $\alpha=0.01$ )，接受  $shr96$  为  $I(0)$ 。

### 5.2 尾指数估计与检验

在通过平稳性检验基础上，可以使用极值理论的方法估计与检验  $shr96$  时序的分布函数的尾指数。由 Hill 散点图初步估计知， $shr96$  的下尾指数可能在 0.4 附近取值(图 2 左图)。

使用 GPD 方法考虑  $shr96$  下尾指数的估计与检验。首先是门限值的确定。图 2（右图）显示，根据 GPD 估计方法，可选择门限值分别为 1.4、1.45、1.5 和 2.1，得到  $shr96$  的下尾指数估计值（表 1）。由于下尾指数的变化不大，笔者选择了有更多的极端值的门限 1.45 对应的下尾指数 0.2604。图 3-1、3-2、3-3 分别给出了截断分布、尾分布和残差的拟合检验，其结果是令人满意的。

### 5.3 风险值的估计与预测

图 4 给出了在显著水平  $\alpha = 0.001$  的情况下，使用 GPD 方法所得的风险值的点估计与区间估计，它显示了使用 GPD 方法估计风险值的优越性，即 GPD 方法能实现样本区外的风险值的估计。风险值的一步预测过程的具体比较为：（1）使用 GARCH 族模型进行风险值预测时，采用的三种模型分别为 GARCH-normal、GARCH-t 和 GARCH-GED。一步预测中前两个模型使用放大窗宽的方法，而第三个模型使用移动窗宽的方法。初始窗宽均为 1000。由于 GPD 方法注意收益率尾部的变动情况，而收益率的异常变动相对不多，故在  $shr96$  风险值的预测实证分析中，笔者使用的是固定的参数估计值： $\hat{\xi} = 0.267, \hat{\sigma} = 1.0679$ 。窗口内超过门限的比例  $N_u / m$  ( $m = 1000, 1000 + 1, \dots, 1407$ ) 在显著水平分别为 0.05、0.01、0.001 时，分别取 0.015、0.01、0.005，门限分别由对应的比例确定。两类模型对  $shr96$  风险值的一步预测效果（波动比率）的对比分析如表 2 所示。

从波动比率的对比分析知，关于不同类型模型的风险值一步预测效果，GPD 模型优于 GARCH-normal、GARCH-GED 和 GARCH-t 模型；而就 GARCH 类模型一步预测效果的而言，GARCH-t 模型优于 GARCH-GED 模型，GARCH-normal 模型最差。

另外，图 5-1、5-2 显示，GARCH 类模型下的风险值的一步预测具有较大的波动性，这将导致风险值的过高预测。这种风险值的过高预测，对投资者，特别是短期投资者对市场的过度反应；对金融机构和机构投资者而言，过于波动的风险值，可能会导致过多的操作风险。而使用 GPD 模型下的风险值的预测值是较平稳的，它有利于金融机构、机构投资者、监管部门对金融风险的监控、规避和政府的及时干预。在实际应用中，我们认为把两种模型结合使用，应可以达到更理想的状态。

表 1 shr96 的下尾指数估计：GPD 方法

门限 $u$	极值点数	$\xi_{lower}$	$\sigma_{lower}$	小于门限的概率
1.4	204	0.2812(0.0967)	1.0167(0.1198)	0.8550
1.45	192	0.2604(0.0975)	1.0692(0.1198)	0.8635
1.5	184	0.2670(0.1010)	1.0697(0.1321)	0.8692
2.1	110	0.2714(0.1457)	1.2148(0.2092)	0.9218

注：括号中的数为对应参数估计值的标准差。

表 2 风险值一步预测波动比率对比分析

显著水平 $\alpha$	0.05	0.01	0.001
预测方法			
GARCH-normal	0.0883	0.0762	0.0516
GARCH-t	0.0835	0.0418	0.0147
GARCH-GED	0.0983	0.0713	0.0369
GPD	0.054	0.027	0.0074

注：风险值的预测中，GPD、GARCH-normal 和 GARCH-t 采用逐步扩大窗口法，而 GARCH-GED 采用滑动窗口法。

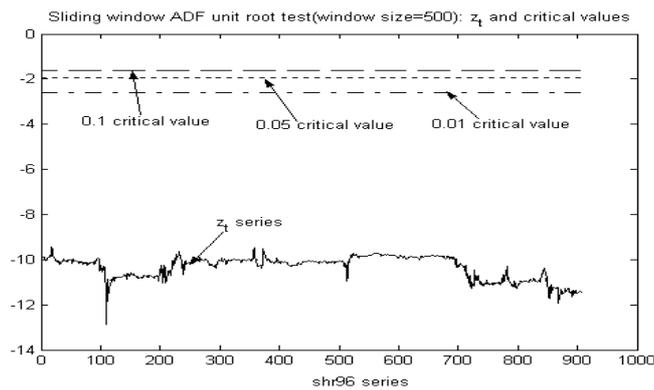


图 1 shr96 时序的滑动窗口 ADF 单位根检验

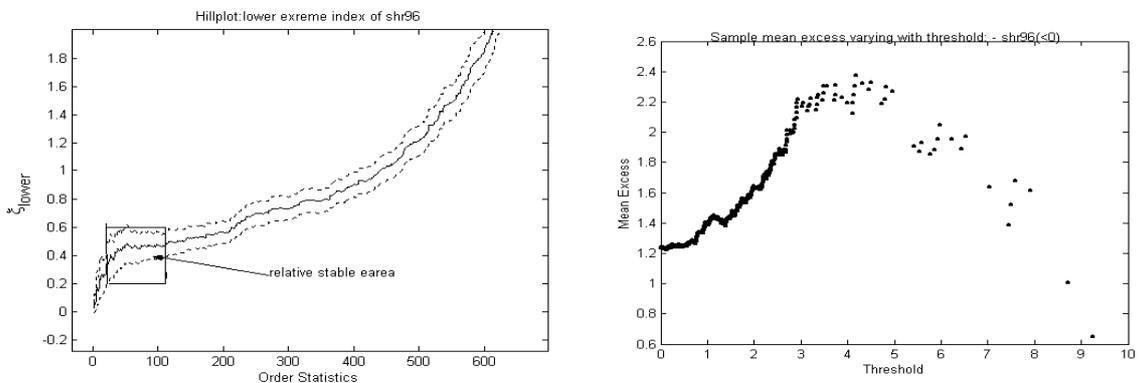


图 2 Hill 图及 SME 散点图

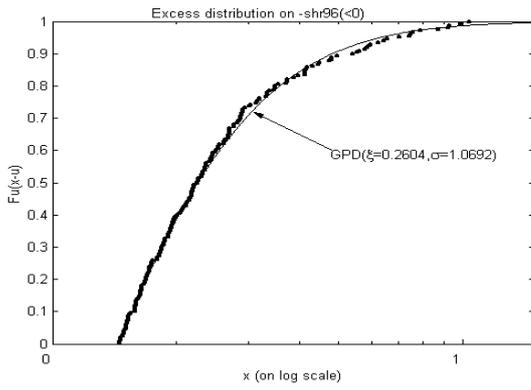


图 3-1

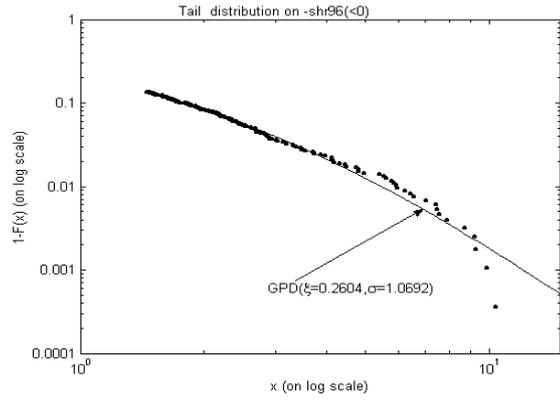


图 3-2

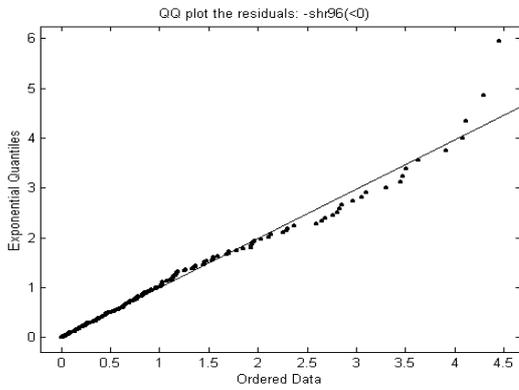


图 3-3

图 3 *shr96* 负收益率的截断分布拟合检验、尾分布拟合检验及残差检验：GPD 方法

注：

- (1) 图 3-1 为截断分布拟合检验,其中门限值  $u = 1.45$ ,  $\hat{\xi} = 0.2642$ ,  $\hat{\sigma} = 1.0692$ ,  $F_u(x-u)$  使用经验分布函数;
- (2) 图 3-2 为尾分布拟合检验,  $1-F(x)$  使用经验分布函数;
- (3) 图 3-3 为残差的 QQ 图 (与指数分布比较)。

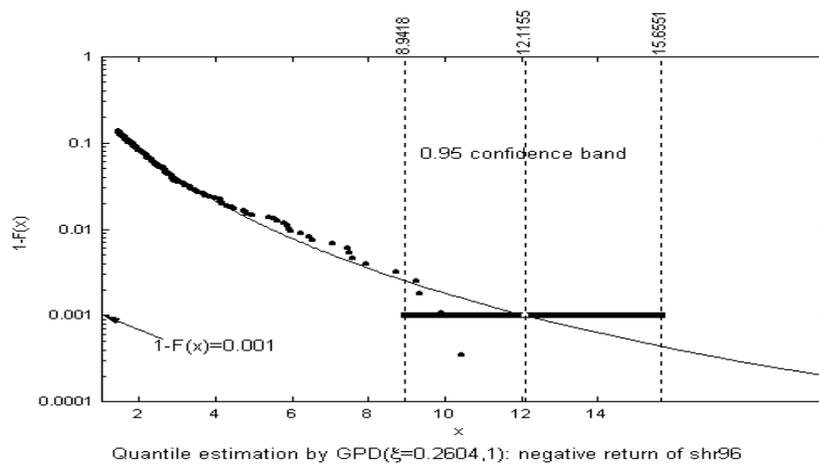


图 4 风险值的点估计与区间估计 ( $\alpha = 0.001$ , 置信带为 0.95,  $\xi = 0.2604$ ,  $\sigma = 1$ ): GPD 方法 (*shr96*)

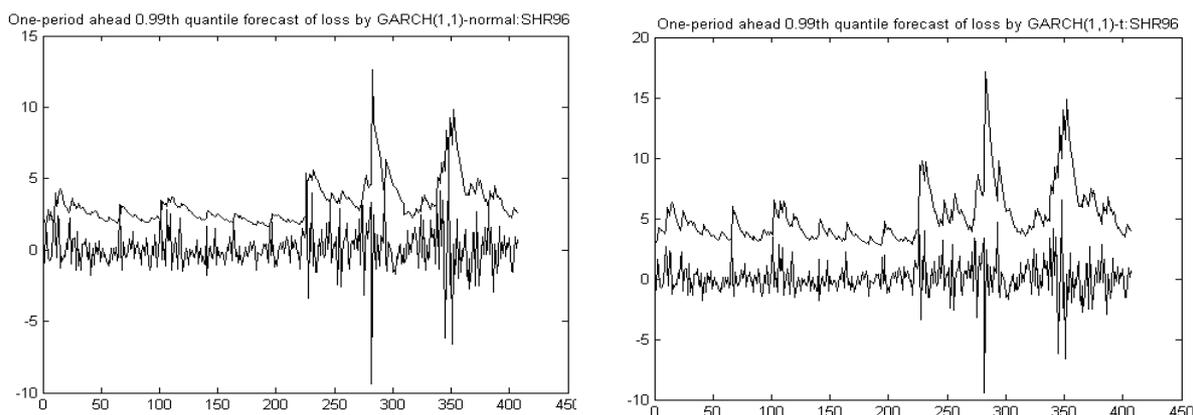


图 5-1 风险值一步预测(shr96) (初始窗宽等于 1000，显著水平等于 0.01，逐步放大窗宽法)

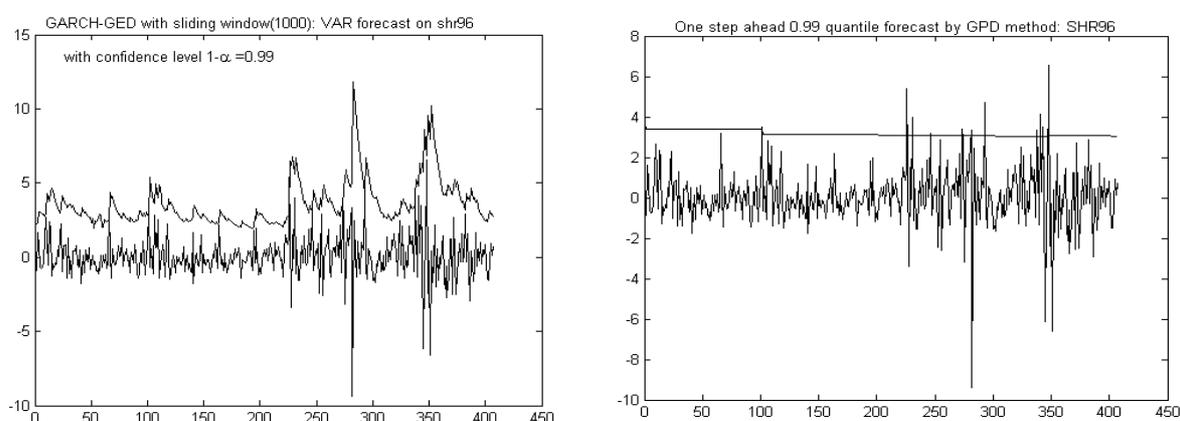


图 5-2 风险值的一步预测(shr96)

注：左图为 GARCH(1,1)-GED 使用滑动窗口法，右图为 GPD 方法采用逐步扩大窗口法。初始窗宽均为 1000，显著水平均为 0.01。

#### 参考文献：

- [1] Embrechts, P., Kluppelberg, C. & Mikosch, T. Modeling Extreme Events for insurance and finance [M]. Springer, New York, 1997.
- [2] Reiss, R.D. & Thomas, M. Statistical analysis of extreme values—from insurance, finance, hydrology and other fields[M]. \ Springer, Berlin,1997.
- [3] McNeil, A.J. Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory [J]. *ASTIN Bulletin*, Vol. 27, 1997: 117-137
- [4] McNeil, A.J. Calculating quantile risk measures for financial time series using extreme value theory[R]. *manuscript*, Department of Mathematics, ETH, Swiss Federal Technical University,1998.
- [5] McNeil, A.J. Extreme value theory for risk managers[C]. in *Internal Modeling and CAD II*, Risk Books, 1999: 93-113.
- [6] McNeil, A.J. & Frey, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an Extreme value approach[J]. *Journal of Empirical Finance*, 2000(Vol. 7): 271-300.

- [7] McNeil, A.J. & Saladin, T. The peak over thresholds method for estimating high quantiles of loss distributions[R] . *discussion paper*, Department of Mathematics, ETH, Swiss Federal Technical University, 1997.
- [8] Silva, A. C. & B. V. Mendes. Value-at-risk and Extreme Returns in Asian Stock Markets[J]. *International Journal of Business*, Vol. 8, No. 1, 2003.
- [9] Terence D. Agbeyegbe and Gene Leon. The tail behavior of stock index return on the Jamaican Stock Exchange[Z] . [http://www.centralbank.org.bb/ Publications/ WP2002pp103\\_110.pdf](http://www.centralbank.org.bb/Publications/WP2002pp103_110.pdf).
- [10] R. Gençay, F. Selçuk & A. Ulug ü lya ˘ gci . High volatility, thick tails and extreme value theory in value-at-risk estimation [J] . *Insurance: Mathematics and Economics* 33 (2003): 337-356
- [11] Leadbetter, M. R., Lindgren, G., & Rootzen, H. *Extremes and related properties of random sequences and processes*[M]. Springer, New York, 1983.
- [12] Resnick, S. I. *Extreme value, regular variation, and point processes* [M]. Springer, New York, 1987.
- [13] Hill, B. M. A sample general approach to inference about the tail of a distribution [J]. *Ann Statist.* Vol. 3, 1975:1163-1174
- [14] J. Pickands. Statistical inference using order statistics [J] . *Ann Statist.*, Vol. 3, 1975:119-131.
- [15] Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. H. J., & Haan, L. de . A moment estimator for the index of an extreme- value distribution[J]. *Ann Statist.*, Vol. 17, 1989:1833-1855
- [16] Mills, T.C. *The econometric modeling of financial time series (2<sup>nd</sup> edition)*[J]. Cambridge University Press, 1999, Cambridge
- [17] Dekkers, A. L. M., Haan, L. On the estimation of the extreme value index and large quantile estimation, *Ann Statist* , 17:1795-1832
- [18] Loretan, M. and Phillips, P. C. B. Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series: An overview of the theory with applications to several financial datasets [J]. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 1, 1994:211-248
- [19] Balkema, A. A., and Haan, L. de . Residual lifetime at great age [J]. *Ann. Prob.*, Vol. 2, 1974:792-804.
- [20] Gencay, R. & Selcuk, F. Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets [J]. *International Journal of Forecasting* Vol. 20, 2004:287-303.
- [21] Gencay, R., Selcuk, F. and Ulugulyagci, A. EVIM: A software package for extreme value analysis in MATLAB[J]. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 5 (3), 2001:213- 239.
- [22] Gencay, R. and Selcuk, F. Software Review: Matlab Neural Networks Toolbox[J]. *International Journal of Forecasting*, Vol. 17, 2001:305-317.
- [23] 彭作祥. 高频金融时序计量建模分析[D]. 博士学位论文,西南财经大学,2003年7月,成都.

## **Fat-tails measurement and Value-at-Risk estimation and prediction of Composite Index of Shanghai Stock Exchange**

Peng Zuo-xiang<sup>1,2</sup>, Li Shi<sup>1</sup>, Pang Hao<sup>1</sup>

(1 School of Statistics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu, 610074; 2 School of Mathematics and Finance, Southwestern Normal University, Chongqing, 400715)

**Abstract:** Based on extreme value theory and General Pareto Distribution (GPD), this paper analyzes and describes the performance of the thick-tail of the high frequency financial time series data with tail index which fitted by local fitness on tail distribution of the data. Both process, one is procedures of estimating and testing of the tail index, another is estimating and forecasting methods of Value-at-Risk, are given systematically. The one-step forward forecasting results of the Composite Index of Shanghai Stock Exchange by extreme value theory and other well-known modeling techniques, such as ARCH/GARCH models, are empirically compared and contrasted. The empirical results argue that GPD method is superior to GARCH models on estimating and forecasting of Value-at-Risk.

**Key Words:** Value-at-Risk; Tail Index; Forecasting; Extreme Value Theory; Empirical Analysis.

**收稿日期:** 2005-2-5

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(批准号:70371061) 教育部博士点基金资助项目(批准号:03JB790011), 西南财经大学“十五”“211 工程”资助项目。

**作者简介:** 彭作祥(1967-), 男, 四川西昌人, 经济学博士, 教授。

---

<sup>1</sup> 金融时序如收益率序列为非独立的, 但在一定的弱相依条件下, 本节的理论是成立的(文献[11]), 但要求时序是平稳的。

<sup>2</sup> 用于估计尾指数  $\xi$  的 Hill 估计量的定义为:  $H(m, n) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \log(X_{n-k+1, n}) - \log(X_{n-m, n})$ , 其中  $X_{1, n} \leq X_{2, n} \leq \dots \leq X_{n, n}$  为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的顺序统计量(文献[17]研究了  $H(m, n)$  的渐近性质)。在实证分析中  $m$  的选择是非常困难的, 通常是通过观察  $H(m, n)$  关于  $m = m(n)$  的时序图, 在  $H(m, n)$  大致不变的范围内选择适当的估计值, 文献[18]建议  $m$  不应该超过  $0.1 \times n$ 。

<sup>3</sup>  $1 - \alpha$  一般取值为 0.95、0.99、0.999。

<sup>4</sup> 当考虑正收益率下的风险值时,  $r_t = 100 * \log(p_t / p_{t-1})$ ; 当研究负收益率下的风险值时, 收益率时序变换为  $\{-r_t\}$ 。

<sup>5</sup> 滑动窗口的基本思想为: 在已有的观察长度  $T$  内(即样本容量), 给定初始窗宽  $n$ (如 500, 1000), 估计 GARCH 模型或 GPD 模型的参数、一步预测下一时刻的风险值; 然后保持窗宽不变逐步滑动窗口(sliding window), 再估计相应模型的参数、预测剩余时刻的风险值。逐步扩大窗宽的基本思路为: 任意给定初始样本容量进行模型参数估计, 并依据参数估计值预测下一时刻的风险值; 逐步放大样本容量进行模型参数的估计、预测剩余时刻的风险值。显然, 这是两种不同的风险管理思想, 前者注重近期信息对收益率波动的影响, 而后者考虑所有的历史数据。若样本容量较小, 后者所得结论较为稳健。

<sup>6</sup> 笔者目前正在从事这一方面的研究。