三类知道活动的逻辑*

李小五

(中山大学逻辑与认知研究所，哲学系，广东 广州 510275)

摘要：我们提出三类知道活动的系统，分别证明它们相对匹配的语义有框架可靠性和框架完全性。

关键词：知道活动的系统；框架可靠性；框架完全性

中国分类号：B81　文献标识码：A

刘壮虎和李小五在其［1］提出一个对动作（活动）进行认知的逻辑。这个逻辑刻画了主体对一般动作的广义认知。

本文我们提出 3 类逻辑：**KA1**，**KA2** 和 **ACK**。

KA1 本质上是单主体逻辑，用于刻画主体知道自己的思维活动的逻辑性质。

KA2 本质上是多主体逻辑，用于刻画主体相对一群主体知道一般活动的逻辑性质。

ACK 引入活动条件句并引入二元认知算子来认知具有某种关联的两个活动。

本文提到但未定义的概念和记号，请参见后面的参考文献［1］和［5］－［7］。

任给集合 X，本文我们用 P(X)表示 X 的幂集。

1　知道活动的逻辑 KA1

本节我们关注一类特殊的活动－－思维活动。在此我们只关心单个主体的思维活动。单个主体也可以有许多不同的思维活动。例如，思索、凝思、沉思、深思、反思、三思、构思、相思、寻思、哀思、愁思、神思、遐思、幽思、追思、单相思、略加思索、长考（围棋术语）、等等。

我们推广上述说法，规定单个主体可以有可数无穷多个思维活动$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots$，其中每一个$\alpha_n$表示该主体的一种具体的思维活动。

1、形式系统及其证明论

1.1.1 定义

（1）本节用 Act 表示某个固定主体的可数无穷多个活动的集合，用 At＝$\{p_1, p_2,\ldots\}$表示可数无穷多个原子公式的集合，用φ, ψ和θ（加或不加下标）表示公式，其形成规则如下：

$$p\mid\neg\varphi\mid(\varphi\wedge\psi)\mid K\varphi\mid[\alpha]\varphi\mid K\alpha,\quad 其中\ p\in At，\alpha\in Act。$$

（2）所有公式的集合记为 Form。┤

说明：$K\varphi$的直观意义是：（主体）知道命题φ。

$[\alpha]\varphi$通常的直观意义是："'做了α后φ真' 是必然的"（It is necessary that after executing α, φ is true，参见文献［2］的第 166 页），或者"在当前状态，无论怎样做活动α都导致一个使φ成立的状态"（any execution of action α from the present state leads to a state bearing the

收稿日期：2005-7-5；

基金项目：本文得到教育部人文社会科学重点研究基地项目（02JAZJD720017）的资助；

作者简介：李小五(1955-)，男，河北人，中山大学教授，博士生导师，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员。

information φ，参见［4］的第 12 页）。因为本文涉及的活动都是思维活动，所以$[\alpha]\varphi$在这里的直观意义是：用α-思考后必有φ。因此比较自然的解释是：$[\alpha]\varphi$中的φ描述的是主体通过α-思考后的思维后果。

$K\alpha$的直观意义是：（主体）知道活动α。

注意：$K\alpha$也是一种原子公式，因为除了它自身，它不由其他子公式构成。

1.1.2 规定与缩写

（1）联结符$\vee$，$\rightarrow$和$\leftrightarrow$的缩写定义如通常。

（2）为了叙述方便，我们规定**联结符的结合力**。

此外，我们规定同形联结符满足右向结合原则。例如，$\varphi\rightarrow\psi\rightarrow\theta$ 表示 $\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\theta)$。

（3）$\top$ 定义为 $p_1\vee\neg p_1$，$\bot$ 定义为$\neg\top$。

（4）我们常用$\Leftrightarrow$表示“当且仅当”，用$\Rightarrow$表示“若…，则…”，用～表示“并非”。┤

为了简洁和突出主题，下面我们引入一个较小的系统，保留进一步扩充的可能。

1.1.3 定义

知道活动系统 **KA1** 定义如下：对所有$\alpha\in Act$ 和$\varphi, \psi\in Form$，

公理（模式）：

（TA）　所有重言式的代入特例，

（K_K）　$K(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow K\varphi\rightarrow K\psi$，

（T_K）　$K\varphi\rightarrow\varphi$，

（K_α）　$[\alpha](\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow[\alpha]\varphi\rightarrow[\alpha]\psi$，

（KA）　$K\alpha\rightarrow[\alpha]\varphi\rightarrow K\varphi$，

（AKA）　$[\alpha]K\alpha$，

（**4**A）　$K\alpha\rightarrow KK\alpha$。

推理规则：

（MP）　$\varphi, \varphi\rightarrow\psi／\psi$，

（RN_K）　$\varphi／K\varphi$，

（RN_α）　$\varphi／[\alpha]\varphi$。┤

说明：

KA 的直观意义是：**知思故知思之果**。

AKA 的直观意义是：**思而知思是必然的**。

4A 称为正反思公理，还可以引入负反思公理。

T_K，AKA 和 **4**A 称为 **KA1** 的**特征公理**。这样称谓是因为我们在后面将看到，需要一定的语义条件（框架条件）才能保证它们有效。

令 $\mathbf{PC}_0$ 是用不含模态算子$[\alpha]$和 K 的公式表述的、由 TA 和 MP 构成的系统。

1.1.4 定义

（1）我们用 $\vdash\varphi$ 表示φ是 **KA1** 的**内定理**：φ在 **KA1** 中有一个形式证明。

（2）**KA1** 的全体内定理的集合记为 Th(**KA1**)。

（3）我们也用 $\nvdash\varphi$ 表示$\varphi\notin$ Th(**KA1**)。┤

1.1.5 引理

下面是 **KA1** 的导出规则和内定理：

（1）$\varphi\rightarrow\psi／K\varphi\rightarrow K\psi$， （2）$\varphi\to\psi / [\alpha]\varphi\to[\alpha]\psi$，

（3）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi / K\varphi_1\wedge\ldots\wedge K\varphi_n\to K\varphi$

（4）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi / [\alpha]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha]\varphi_n\to[\alpha]\varphi$，

（5）$K\alpha\leftrightarrow KK\alpha$，

（6）$K\alpha\to K([\alpha]\varphi\to K\varphi)$。

证明：

我们只给出证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。

（1）－（4）如通常所证。

（5）据 **4**A 和 T_K。

（6）据 KA 和（1），有 $KK\alpha\to K([\alpha]\varphi\to K\varphi)$，再据 **4**A。┤

说明：

据（5），K 相对活动的叠加没有意义。

据（6）和 T_K 立得 KA，所以 KA 和（6）相对其他公理和规则可以等价置换。

1.1.6 定义

（1）定义从 Form 到不含模态算子$[\alpha]$和 K 的子语言 $Form_0\subseteq Form$ 的**翻译映射** t 如下：

$t(K\alpha)=t(\top)$；

$t(p)=p$，$\forall p\in At$；

$t(\neg\varphi)=\neg t(\varphi)$；

$t(\varphi\wedge\psi)=t(\varphi)\wedge t(\psi)$；

$t(K\varphi)=t([\alpha]\varphi)=t(\varphi)$。

（2）任给$\varphi\in Form$，称 $t(\varphi)$是φ的 **t-翻译**。┤

1.1.7 定义 令 **S** 和 **T** 是任意两个公理化系统。

我们称 **S** 能 **t-退化**为 **T**，当且仅当，**S** 的所有内定理的 t-翻译是 **T** 的内定理。┤

1.1.8 翻译定理　KA1 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$。

证明：据上面的定义，证明显然。┤

1.1.9 定义

称公理化系统 **S** 是**协调系统**，当且仅当，不存在φ使得φ和$\neg\varphi$都是 **S** 的内定理。┤

1.1.10 定理　KA1 是协调的。

证明：假设 **KA1** 不协调，则存在φ使得φ和$\neg\varphi$都是 **KA1** 的内定理。据上面的定理，$t(\varphi)$和$\neg t(\varphi)$都是 $\mathbf{PC}_0$ 的内定理，矛盾于 $\mathbf{PC}_0$ 的协调性。┤

2、关系语义和可靠性定理

1.2.1 定义

（1）称 $F=\langle W, R_K, \underline{R}\rangle$是**框架**，当且仅当，

① W 是非空集，

② R_K 是 W 上的二元通达关系，

③ $\underline{R}=\{R_\alpha: \alpha\in Act\}$，使得对每一$\alpha\in Act$，$R_\alpha$是 W 上的二元通达关系。

（2）称 $M=\langle W, R_K, \underline{R}, [\ ]\rangle$是**模型**，当且仅当，$\langle W, R_K, \underline{R}\rangle$是框架且

④ $[\ ]$是从 At 到 P(W)中的映射。

（3）[ ]也称为框架 F 上的指派映射。┤

1.2.2 定义 令$\langle W, R_K, \underline{R}\rangle$是框架。任给 $w\in W$。

（1）$R_K(w) ::= \{u\in W: wR_Ku\}$，

（2）$R_\alpha(w) ::= \{u\in W: wR_\alpha u\}$， $\forall\alpha\in Act$。┤

任给集合 X，我们定义有界量词表达式如下：

$\forall x\in X\varphi ::= \forall x(x\in X\rightarrow\varphi)$，

$\exists x\in X\varphi ::= \exists x(x\in X\wedge\varphi)$。

1.2.3 真值集定义 令$\langle W, R_K, \underline{R}, [\ ]\rangle$是模型。

对每一复合公式或形如 $K\alpha$的公式φ，定义φ相对$\langle W, R_K, \underline{R}, [\ ]\rangle$的**真值集**$[\varphi]$如下：任给 $w\in W$ 和$\alpha\in Act$，

（1）$w\in[\neg\varphi] \Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，

（2）$w\in[\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[K\varphi] \Leftrightarrow R_K(w)\subseteq[\varphi]$，

（4）$w\in[[\alpha]\varphi] \Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq[\varphi]$，

（5）$w\in[K\alpha] \Leftrightarrow \forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))$。┤

说明：（5）的直观意义是：

在 w 中认知α，当且仅当，在从 w 认知通达的任何世界 u 中认知α的所有后果。

（5）实际上是一个**点框架条件**：相对点 w 定义的框架条件。作为一种特殊的原子公式，Kα在 w 中的真值只依赖它的点框架条件。这是指：Kα在 w 中的真值在任何指派映射下都相同。因此点框架条件定义的是**点框架有效性**。从另一个角度，我们也可以把上面的模型看做是一种**一般框架**（general frame）上的模型：这样的一般框架除了满足［4］第 29 页 1.32 的条件(i)－(iii)以外，还满足：

(iv) $\{w: \forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))\}\in A$。

1.2.4 定义

（1）称框架$\langle W, R_K, \underline{R}\rangle$是 **de1-框架**，当且仅当，下列**框架条件**成立：对任意 $w\in W$ 和$\alpha\in Act$，

(tk) $w\in R_K(w)$，

(aka) $\forall u\in R_\alpha(w)\forall v\in R_K(u)(R_K(v)\subseteq R_\alpha(v))$，

(**4**a) $\forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u)) \Rightarrow \forall u\in R_K(w)\forall v\in R_K(u)(R_K(v)\subseteq R_\alpha(v))$。

（2）所有的 **de1**-框架的类记作 Frame(**de1**)。┤

1.2.5 有效性定义 令 $F=\langle W, R_K, \underline{R}\rangle$是框架，$M=\langle W, R_K, \underline{R}, [\ ]\rangle$是模型。

（1）称φ在 M 中**有效**，记为 $M\vDash\varphi$，当且仅当，$[\varphi]=W$；否则称φ在 M 中**不有效**，记为 $M\nvDash\varphi$。

（2）称φ在 F 中**有效**，记为 $F\vDash\varphi$，当且仅当，对 F 上的任意指派映射[ ]，有$[\varphi]=W$；否则称φ在 F 中**不有效**，记为 $F\nvDash\varphi$。

（3）称规则$\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\psi$相对 M **保持有效性**，当且仅当，若$[\varphi_1]=\ldots=[\varphi_n]=W$，则$[\psi]=W$。┤

如通常易证：

1.2.6 引理　令 $M=\langle W, R_K, \underline{R}, [\ ]\rangle$是模型。则

（1）$[\neg\varphi]=W-[\varphi]$，

$[\varphi\wedge\psi]=[\varphi]\cap[\psi]$，

$[\varphi\vee\psi]=[\varphi]\cup[\psi]$，

$[\bot]=\varnothing$，$[\top]=W$。

（2）$[\varphi]\cap[\varphi\to\psi]\subseteq[\psi]$。

（3）$[\varphi\to\psi]=W \Leftrightarrow [\varphi]\subseteq[\psi]$。

（4）$[\varphi\leftrightarrow\psi]=W \Leftrightarrow [\varphi]=[\psi]$。┤

1.2.7 定义

（1）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架可靠系统**，当且仅当，**S** 的内定理在 ***C*** 的所有框架中有效。

（2）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架完全系统**，当且仅当，在 ***C*** 的所有框架中有效的公式是 **S** 的内定理。┤

1.2.8 框架可靠性定理

KA1 相对框架类 Frame(**de1**)是可靠的。

证明：任给 **de1**-框架 $F=\langle W, R_K, \underline{R}\rangle$和 F 上赋值[ ]。

下面验证 **KA1** 的公理相对 M＝<F, [ ]>有效且 **KA1** 的推理规则相对 M 保持有效性。

公理 TA，K_K 和 K_α，规则 MP，RN_K 和 RN_α的验证如通常。

验证公理 T_K：任给 $w\in[K\varphi]$。据定义 1.2.3（3），$R_K(w)\subseteq[\varphi]$，据(tk)，我们有 $w\in[\varphi]$。

验证公理 KA：任给 $w\in[K\alpha]$。据 1.2.3（5），有

$$\forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))。$$

据(tk)，有

（%）$R_K(w)\subseteq R_\alpha(w)$。

任给公式φ使得 $w\in[[\alpha]\varphi]$，据 1.2.3（4），有

$$R_\alpha(w)\subseteq[\varphi]。$$

再据（%），有 $R_K(w)\subseteq[\varphi]$，因此 $w\in[K\varphi]$。

验证公理 AKA：假设$[\alpha]K\alpha$在 M 中不有效，则存在 $w\in W$ 使得 $w\notin[[\alpha]K\alpha]$。据 1.2.3（4），

$$R_\alpha(w) \nsubseteq [K\alpha],$$

所以存在 $u\in W$ 使得

① $u\in R_\alpha(w)$，　且

② $u\notin[K\alpha]$。

据①和 1.2.4 的(aka)，我们有

$$\forall v\in R_K(u)(R_K(v)\subseteq R_\alpha(v))。$$

再据 1.2.3（5），有 $u\in[K\alpha]$，矛盾于②。

验证公理 **4**A：任给 $w\in[K\alpha]$。据 1.2.3（5），有

$$\forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))。$$

据 1.2.4 的(**4**a)，有

$$\forall u\in R_K(w)\forall v\in R_K(u)(R_K(v)\subseteq R_\alpha(v))。$$

所以据 1.2.3（5），有

$$\forall u\in R_K(w)(u\in[K\alpha])$$

再据 1.2.3（3），有 $w\in[KK\alpha]$。┤

3、完全性定理

1.3.1 定义　令 w 是公式集。

（1）称 w 是**一致集**，当且仅当，对所有有穷公式序列$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in w$，有

$\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$。

（2）称 w 是**极大集**，当且仅当，对所有$\varphi \in Form$，有$\varphi \in w$或$\neg\varphi \in w$。

（3）称 w 是**极大一致集**，当且仅当，w 既是一致的又是极大的。

（4）称 **KA1** 是**一致系统**，当且仅当，Th(**KA1**)是一致的。⊣

1.3.2 引理　**KA1** 是一致的。

证明：假设 **KA1** 不一致。则 Th(**KA1**)不一致，所以存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in$ Th(**KA1**)使得

$\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$。

另一方面，因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in$ Th(**KA1**)，所以易证

$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$。

据定义 1.1.9，**KA1** 不协调，矛盾于定理 1.1.10。⊣

因为 **KA1** 是 **PC** 的扩充，所以如通常的证明（参见［5］第 2 章），我们可以得到下面几个结果。

1.3.3 引理

（1）令 w 是极大一致集。则

$\neg\varphi \in w \Leftrightarrow \varphi \notin w$，

$\varphi \wedge \psi \in w \Leftrightarrow \varphi \in w$ 且$\psi \in w$，

$\varphi \vee \psi \in w \Leftrightarrow \varphi \in w$ 或$\psi \in w$，

$\varphi \in w$ 且$\vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \psi \in w$，

$\varphi \in w$ 且$\varphi \to \psi \in w \Rightarrow \psi \in w$，

$(\varphi \in w \Rightarrow \psi \in w) \Leftrightarrow \varphi \to \psi \in w$。

（2）令 w 是极大一致集。则 Th(**KA1**)$\subseteq$w。

（3）φ属于每一以 w 为子集的极大一致集，当且仅当，存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in w$ 使得

$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi$。

（4）若 $\nvdash \varphi$，则存在极大一致集 w 使得$\varphi \notin w$。

（5）令Φ是公式集。若$\Phi \cup \{\neg\varphi\}$不一致，则存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \Phi$使得

$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi$。

（6）（**Lindenbaum-**引理）令 w 一致。则存在极大一致集 u 使得 w$\subseteq$u。⊣

1.3.4 定义

$|\varphi|$∷＝{w：w 是极大一致集使得$\varphi \in w$}。⊣

1.3.5 引理

令 W 是所有极大一致集的集合。

（1）$|\neg\varphi| = W - |\varphi|$，

$|\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi|$，

$|\varphi \vee \psi| = |\varphi| \cup |\psi|$，

$|\bot| = \varnothing$，$|\top| = W$。

（2）$|\varphi|\cap|\varphi\to\psi|\subseteq|\psi|$。

（3）$|\varphi\to\psi|=W \Leftrightarrow |\varphi|\subseteq|\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi\to\psi$。

（4）$|\varphi\leftrightarrow\psi|=W \Leftrightarrow |\varphi|=|\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi\leftrightarrow\psi$。┤

1.3.6 定义 令 w 是公式集。

$w^{-K}::=\{\varphi: K\varphi\in w\}$，

$w^{-[\alpha]}::=\{\varphi: [\alpha]\varphi\in w\}$。┤

1.3.7 引理 令 W 是所有极大一致集的集合，令 $w\in W$。则

（1）$K\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-K}\subseteq u \Rightarrow \varphi\in u)$。

（2）$[\alpha]\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-[\alpha]}\subseteq u \Rightarrow \varphi\in u)$。

证明：

（1）"⇒"：显然。下证"⇐"：设

① 任给 $u\in W$，若 $w^{-K}\subseteq u$，则$\varphi\in u$。

这意味φ属于每一以 w^{-K} 为子集的极大一致集。据引理 1.3.3（3），存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-K}$使得

② $\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi$。

据 1.1.5（3），我们有

③ $\vdash K\varphi_1\wedge\ldots\wedge K\varphi_n\to K\varphi$。

因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-K}$，所以 $K\varphi_1,\ldots,K\varphi_n\in w$，所以据③和 1.3.3（1），有 $K\varphi\in w$。

（2）类似（1）据 1.1.5 的（4）同理可证。┤

1.3.8 定义

（1）定义 **KA1** 的**典范框架**$<W, R_K, \underline{R}>$如下：

① $W=\{w: w$ 是极大一致集$\}$，

② $R_K=\{<w,u>\in W^2: w^{-K}\subseteq u\}$，

③ $\underline{R}=\{R_\alpha: \alpha\in Act\}$，使得对每一$\alpha\in Act$，

$R_\alpha=\{<w,u>\in W^2: w^{-[\alpha]}\subseteq u\}$。

（2）定义 **KA1** 的**典范模型**$<W, R_K, \underline{R}, [\ ]>$如下：$<W, R_K, \underline{R}>$是 **KA1** 的典范框架，且

④ $[p]=|p|$， 对每一原子公式 $p\in At$。┤

说明：

据引理 1.3.2，**KA1** 一致，所以 W 非空，因此 F 和 M 是良定义的。

1.3.9 典范框架主引理 令$<W, R_K, \underline{R}>$是 **KA1** 的典范框架且 $w\in W$。则

$K\alpha\in w \Leftrightarrow \forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))$。

证明：

"⇒"：设 $K\alpha\in w$。据公理 **4**A，有

① $KK\alpha\in w$。

要证

② $\forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))$。

任给 $u\in R_K(w)$，只须证

③ $R_K(u)\subseteq R_\alpha(u)$。

任给 $v\in R_K(u)$，只须证 $v\in R_\alpha(u)$，即要证

④ $u^{-[\alpha]}\subseteq v$。

任给$\varphi\in u^{-[\alpha]}$，最后只须证

⑤ $\varphi\in v$。

因为$\varphi\in u^{-[\alpha]}$，所以

⑥ $[\alpha]\varphi\in u$。

因为 $u\in R_K(w)$，故据①和 1.3.7（1），有 $K\alpha\in u$。再据⑥和公理 KA，有 $K\varphi\in u$，因为 $v\in R_K(u)$，故有⑤。

"⇐"：设 $K\alpha\notin w$。要证：

⑦ 存在 $u\in R_K(w)$和 $v\in R_K(u)$使得 $v\notin R_\alpha(u)$。

即要证

⑧ 存在 $u\in W$ 使得

(a) $w^{-K}\subseteq u$， 且

(b) 存在 $v\in W$ 使得 $u^{-K}\subseteq v$ 但 $u^{-[\alpha]}\not\subseteq v$。

令$\Phi=w^{-K}\cup\{\neg K\alpha\}$。先证：

⑨ Φ是一致的。

假设Φ不一致。据 1.3.3（5），有$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-K}$使得

$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to K\alpha$。

据 1.1.5（3），我们有

⑩ $\vdash K\varphi_1\wedge\ldots\wedge K\varphi_n\to KK\alpha$。

因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-K}$，所以 $K\varphi_1,\ldots,K\varphi_n\in w$，再据⑩有 $KK\alpha\in w$。再据公理 T_K，有 $K\alpha\in w$，矛盾于设定。

这样我们证明了⑨成立。据⑨和 Lindenbaum-引理，存在 $u\in W$ 使得$\Phi\subseteq u$，所以易见(a)成立且

⑪ $K\alpha\notin u$。

最后我们只须证明(b)。先证 u^{-K}一致。假设它不一致。则存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in u^{-K}$使得

$\vdash \neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$。

再据公理 TA，有

$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to K\alpha$。

据 1.1.5（3），我们有

⑫ $\vdash K\varphi_1\wedge\ldots\wedge K\varphi_n\to KK\alpha$。

因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in u^{-K}$，所以 $K\varphi_1,\ldots,K\varphi_n\in u$，再据⑫，有 $KK\alpha\in u$。再据公理 T_K，有 $K\alpha\in u$，矛盾于⑪。

这样我们证明了 u^{-K}是一致的。据 Lindenbaum-引理，存在 $v\in W$ 使得

⑬ $u^{-K}\subseteq v$。

因为$\neg K\alpha\in u^{-K}$，所以据⑬，有

⑭ $K\alpha\notin v$。

因为公理$[\alpha]K\alpha\in u$，所以 $K\alpha\in u^{-[\alpha]}$，再据⑭，我们有 $u^{-[\alpha]}\not\subseteq v$。再据⑬，我们有(b)。⊣

1.3.10 典范模型基本定理

令 $M=\langle W, R_K, \underline{R}, [\ ]\rangle$是 **KA1** 的典范模型。

（1）$\varphi\in w\Leftrightarrow w\in[\varphi]$， 对每一 $w\in W$ 和公式φ。

（2）$|\varphi|=[\varphi]$， 对每一公式φ。

证明：

（2）从（1）易得。所以我们只须证（1）。

施归纳于φ的结构。

情况 1　φ是原子公式：据定义 1.3.8 的④。

情况 2　φ＝¬ψ：如通常所证。

情况 3　φ＝ψ∧θ：如通常所证。

情况 4　φ＝Kψ：易见

$K\psi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-K}\subseteq u \Rightarrow \psi\in u)$　　据 1.3.7（1）

$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_K u \Rightarrow u\in|\psi|)$　　据 1.3.8 的②和 1.3.4

$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_K u \Rightarrow u\in[\psi])$　　据归纳假设

$\Leftrightarrow w\in[K\psi]$。　　据 1.2.3 的（3）

情况 5　φ＝[α]ψ：据引理 1.3.7（2），本情况证明类似上一情况的证明。

情况 6　φ＝Kα：我们有

$K\alpha\in w \Leftrightarrow \forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))$　　据上面的主引理

$\Leftrightarrow w\in[K\alpha]$。　　据 1.2.3 的（5）┤

1.3.11 定理　令 M 是 **KA1** 的典范模型。则

$M\vDash\varphi \Leftrightarrow\ \vdash\varphi$，　对每一公式φ。

证明：

$\vdash\varphi \Leftrightarrow |\varphi|=W$　　据引理 1.3.3（2）和（4）

$\Leftrightarrow [\varphi]=W$　　据上一定理

$\Leftrightarrow M\vDash\varphi$　　据有效性定义 1.2.5。┤

1.3.12 引理

KA1 的典范框架是 **de1**-框架。

证明：

令 F＝<W, R_K, $\underline{R}$>是 **KA1** 的典范框架。下面验证 F 满足定义 1.2.4 给出的框架条件。

验证(tk)：任给 w∈W。据公理 T_K，有

$K\varphi\to\varphi\in w$，　对所有公式φ。

由此易证 $w^{-K}\subseteq w$。所以 $w\in R_K(w)$。

验证(aka)：任给 w, u∈W 使得 $u\in R_\alpha(w)$，则

（1）$w^{-[\alpha]}\subseteq u$，

据公理 AKA，有[α]Kα∈w，再据（1），有 Kα∈u。据主引理 1.3.9，有

$\forall v\in R_K(u)(R_K(v)\subseteq R_\alpha(v))$。

验证(**4**a)：任给 w∈W 使得

$\forall u\in R_K(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))$。

据主引理 1.3.9，有 Kα∈w，据公理 **4**A，有 KKα∈w。再据 1.3.7（1），有

$\forall u\in R_K(w)(K\alpha\in u)$。

再据主引理 1.3.9，有

$\forall u\in R_K(w)\forall v\in R_K(u)(R_K(v)\subseteq R_\alpha(v))$。┤

1.3.13 框架完全性定理

KA1 相对框架类 Frame(**de1**)是完全的。

证明：只须证：

(%) 若φ不是 **KA1** 的内定理，则φ在某个 **de1**-框架中不有效。

设φ不是 **KA1** 的内定理。令 M＝<W, R_K, $\underline{R}$, [ ]>是 **KA1** 的典范模型。据设定和定理 1.3.11，

有 M $\nvDash \varphi$，故$<W, R_K, \underline{R}> \nvDash \varphi$。再据上一引理，$<W, R_K, \underline{R}>$是 **de1**-框架，故(%)成立。┤

下面我们来考虑 **KA1** 的几个变种：

1、若我们用下列真值集定义

（＃）$w\in[K\alpha] \Leftrightarrow \forall\varphi\in Form(w\in[[\alpha]\varphi\to K\varphi])$

代替 1.2.3（5），则我们要用下面的引理代替 1.3.9：

1.3.9-1 引理　令 w 是极大一致集。则

$K\alpha\in w \Leftrightarrow \forall\varphi\in Form([\alpha]\varphi\to K\varphi\in w)$。

据公理 KA 易证“⇒”。

证明“⇐”：设 $K\alpha\notin w$，则$\neg K\alpha\in w$。要证：

（1）存在$\varphi\in Form$ 使得$[\alpha]\varphi\to K\varphi\notin w$。

即要证

（2）存在$\varphi\in Form$ 使得$[\alpha]\varphi\wedge\neg K\varphi\in w$。

因此关键问题是要找到满足（2）表述的性质的φ。

第一种方案是如前令$\varphi=K\alpha$。因为$\neg K\alpha\in w$，所以我们需要

（Ax）$\neg K\alpha\to[\alpha]K\alpha\wedge\neg KK\alpha$，

作为公理才能有

$[\alpha]K\alpha\wedge\neg KK\alpha\in w$，

使得（2）表述的性质成立。而 Ax 等价下面两公式

$KK\alpha\to K\alpha$，　$\neg[\alpha]K\alpha\to K\alpha$。

因此我们有相应的 [1] **知道活动系统 KA1-1**。它是用下面两个公理替换 **KA1** 中的 T_K ，AKA 和 **4**A 得到的系统：

（AK1）　$KK\alpha\to K\alpha$，

（AK2）　$\neg[\alpha]K\alpha\to K\alpha$。

这样的系统也可以看作是（相对上述语义且要求框架完全性定理成立的）极小系统。公理 AK1 是 **KA1** 的公理 T_K 的一个特例，而 AK2 从直观上看也比较自然：

若我不思而知我思是必然的，则我知我思。

若我们不局限于考虑当前主体的思维活动，而是考虑一般的活动（这样的活动甚至不是当前主体做的活动），则 AK2 从直观上看仍然比较自然：

若不做α而使我知α是必然的，则（一般地）我知α。

注意：上述（＃）可以表示为

$w\in[K\alpha] \Leftrightarrow R_K(w)\subseteq R_\alpha(w)$。

这是 1.2.3（5）的特例。考虑下列系统：

（TA）　所有重言式的代入特例，

（K_K）　$K(\varphi\to\psi)\to K\varphi\to K\psi$，

（T_K）　$K\varphi\to\varphi$，

（K_α）　$[\alpha](\varphi\to\psi)\to[\alpha]\varphi\to[\alpha]\psi$，

（KA）　$K\alpha\to[\alpha]\varphi\to K\varphi$，

（AKA）　$[\alpha]K\alpha$，

（MP）　$\varphi, \varphi\to\psi／\psi$，

[1] 这里的“相应的”是指下面给出的系统相对上述真值集定义和相应的框架条件有框架可靠性定理和框架完全性定理。

（RN_K） $\varphi／K\varphi$，

（RN_α） $\varphi／[\alpha]\varphi$。

易证此系统相对满足下列框架条件的全体框架类是框架可靠和框架完全的：

(tk) $w\in R_K(w)$，

(aka) $\forall u\in R_\alpha(w)(R_K(u)\subseteq R_\alpha(u))$。

第二种方案是令（2）中的$\varphi=\neg K\alpha$。为了证明引理 1.3.9-1 的“$\Leftarrow$”，我们需要下列公理：

（AK3） $K\neg K\alpha\to K\alpha$，

（AK4） $\langle\alpha\rangle K\alpha\to K\alpha$， 其中$\langle\alpha\rangle\varphi=\neg[\alpha]\neg\varphi$。

用 AK3 和 AK4 替换 **KA1-1** 中的 AK1 和 AK2，我们就得到**知道活动系统 KA1-2**。

易见 AK3 等价

$\neg K\alpha\to\neg K\neg K\alpha$。

而这描述了当前主体对活动没有负反思能力。事实上，Ch. Meyer 和 W. van der Hoek 在其[3]（第 23 页）指出句子型的负反思公理$\neg K\varphi\to K\neg K\varphi$在哲学上相当有争议。推而广之，活动型的负反思公理$\neg K\alpha\to K\neg K\alpha$也有不自然之处，从而使 AK3 有一定的合理性。

2、据［4］的第 12 页，$\langle\alpha\rangle\varphi$直观表示“在当前状态，某个能终止的对活动$\alpha$的贯彻导致一个使$\varphi$成立的状态”（some terminating execution of action α from the present state leads to a state bearing the information φ）。

若我们用下列真值集定义

$w\in[K\alpha]\Leftrightarrow\forall\varphi\in Form(w\in[\langle\alpha\rangle\varphi\to K\varphi])$

代替上面的（＃），则我们要用下面的引理代替 1.3.9-1：

1.3.9-2 引理 令 w 是极大一致集。则

$K\alpha\in w\Leftrightarrow\forall\varphi\in Form(\langle\alpha\rangle\varphi\to K\varphi\in w)$。

若我们有公理

（$KA_\Diamond$） $K\alpha\to\langle\alpha\rangle\varphi\to K\varphi$，

则易证“$\Rightarrow$”。

证明“$\Leftarrow$”：设 $K\alpha\notin w$，要证：

（3）存在$\varphi\in Form$ 使得$\langle\alpha\rangle\varphi\to K\varphi\notin w$。

即要证

（4）存在$\varphi\in Form$ 使得$\langle\alpha\rangle\varphi\wedge\neg K\varphi\in w$。

这里也相应地有两个方案。

第一种方案是令（4）中$\varphi=K\alpha$。因为$\neg K\alpha\in w$，所以我们需要公理

（$Ax_\Diamond$）$\neg K\alpha\to\langle\alpha\rangle K\alpha\wedge\neg KK\alpha$，

作为公理才能有

$\langle\alpha\rangle K\alpha\wedge\neg KK\alpha\in w$，

从而使（4）表述的性质成立。而 $Ax_\Diamond$等价 AK1 和

（AK5） $\neg\langle\alpha\rangle K\alpha\to K\alpha$，

我们用 $KA_\Diamond$和 AK5 替换 **KA1-1** 中的 KA 和 AK2，我们就得到**知道活动系统 KA1-3**。

第二种方案是令（4）中的$\varphi=\neg K\alpha$。为了证明引理 1.3.9-2 的“$\Leftarrow$”，我们需要 AK3 和

（AK6）　$[\alpha]K\alpha \to K\alpha$。[2]

用 AK3 和 AK6 替换 **KA1-3** 中的 AK1 和 AK5，我们就得到**知道活动系统 KA1-4**。

对系统 **KA1-1**－**KA1-4** 中的 AK-型公理 AK1－AK6 增加相应的框架条件，我们就能得到相应的框架可靠性定理和框架完全性定理。请读者自己动手做一下。

除了令$\varphi = K\alpha$和$\varphi = \neg K\alpha$之外，我们还可以根据实际情况令φ是其他公式。例如，φ可以是下面公式中的一个

$[\alpha]K\alpha$，$\neg[\alpha]K\alpha$，$\langle\alpha\rangle K\alpha$，$\neg\langle\alpha\rangle K\alpha$，

$[\alpha]\langle\alpha\rangle K\alpha$，$\langle\alpha\rangle[\alpha]K\alpha$，……。

从无穷逻辑的角度，我们可以把联结符$\wedge$概括为对可数无穷多个公式的集合的合取$\bigwedge$。这样，我们可以用下面的公理来代替公理 KA 和 AKA：

$$K\alpha \leftrightarrow \bigwedge\{[\alpha]\varphi \to K\varphi : \alpha \in Act\}。$$

加上其他必要的修改能得到无穷逻辑型的逻辑 [3] 。

知道活动 $K\alpha$还应该有其他表述。例如，若我们把 $K\alpha$直观解释为“知道α能做”，那么，我们可以在系统中增加公理 $K\alpha \leftrightarrow K\langle\alpha\rangle\top$。由此也能推出不少有趣的东西。

我们也可以把认知算子 K 全部改成□。$\Box\alpha$的直观意义是“α是本体论必然的(ontological necessity)”。这样，我们的动态认知逻辑变成客观动态逻辑。这也很有趣。例如，公理 KA 和 AKA 变成

$$\Box\alpha \to [\alpha]\varphi \to \Box\varphi, \quad [\alpha]\Box\alpha。$$

前者很自然，而后者表示“无论怎样做了活动α都使α成为必然”。这也说的过去。

2　知道活动的逻辑 KA2

逻辑 **KA2** 沿着［6］的思路进行。先定义“主体 A 做了活动α”，然后根据 A 知道一群主体 G 中的某个（或全部）主体做了α来定义两个相对 G 的知道活动算子。

由于描述和证明 **KA2** 的概念和成果的许多内容从形式上重复上节，所以下面我们在许多地方只提到与上节内容不同之处。

2.1.1 定义

（1）本节用 Agent 表示有穷个主体的集合。

（2）用 Act 表示可数无穷多个活动的集合。[4]

（3）公式的形成规则如下：

$$p \mid \neg\varphi \mid (\varphi\wedge\psi) \mid [\alpha_A]\varphi \mid K_A\varphi \mid A\alpha, \quad \text{其中 } p\in At，\alpha\in Act，A\in Agent。$$

$A\alpha$也是原子公式，因为除了它自身，它不由其他子公式构成。

（4）所有公式的集合记为 Form。

（5）任给公式集 X，$\bigwedge X$ 和$\bigvee X$ 分别表示把 X 中所有元素按某个序合取和析取起来得到的公式。

缩写定义

2　AK6 也是 T_K 的特例。

3　参见后面列的文献［7］。

4　这里的活动是指抽象的活动。如“吃了”，而不是哪个主体吃了。

$[\alpha]\varphi ::= \wedge\{[\alpha_A]\varphi：A\in Agent\}$，

$G\alpha ::= \wedge\{A\alpha：A\in G\}$，

$\underline{G}\alpha ::= \vee\{A\alpha：A\in G\}$，

$WK_{A,G}\alpha ::= K_A\underline{G}\alpha$，

$SK_{A,G}\alpha ::= K_AG\alpha$。┤

说明：

$[\alpha_A]\varphi$的直观意义是：“‘A 做了α后φ真’是必然的”。

$K_A\varphi$直观意义是：“主体 A 知道命题φ”。

$A\alpha$的直观意义是：“主体 A 做了活动α”。

$G\alpha$的直观意义是：“群体 G 做了集体活动α”。

$WK_{A,G}\alpha$读作：“主体 A 相对 G 弱知活动α”。

$SK_{A,G}\alpha$读作：“主体 A 相对 G 强知活动α”。

“相对群体 G 弱知一个活动”接近我们通常意义上的知道活动概念。例如，我知道太空行走这样的活动，甚至我知道（致死的）自杀活动，这是因为在我所知的范围 G 中有人做过这样的活动，不见得一定是我做过。“相对群体 G 强知一个活动”这样的概念相当于知道关于 G 的集体活动。例如，我知道我系的老师都上过课。若我们把主体群 G 看作是一个社会，则我们定义的 $WK_{A,G}\alpha$和 $SK_{A,G}\alpha$是一种具有社会学意义的认知概念，可以深入研究。

2.1.2 规定与缩写 形如 1.1.2。┤

2.1.3 定义

知道主体的系统 **KA2** 定义如下：对所有$\alpha\in Act$，$\varphi, \psi\in Form$，$A\in Agent$ 和 $G\subseteq Agent$，

（TA） 所有重言式的代入特例，

（$K_{\alpha A}$） $[\alpha_A](\varphi\to\psi)\to[\alpha_A]\varphi\to[\alpha_A]\psi$，

（K_A） $K_A(\varphi\to\psi)\to K_A\varphi\to K_A\psi$，

（T_A） $K_A\varphi\to\varphi$，

（A1） $A\alpha\to[\alpha_A]\varphi\to\varphi$，

（A2） $[\alpha_A]A\alpha$。

（MP） $\varphi, \varphi\to\psi／\psi$，

（$RN_{\alpha A}$） $\varphi／[\alpha_A]\varphi$，

（RN_A） $\varphi／K_A\varphi$。┤

说明：

A1 和 A2 从直观上说应比较自然。

T_A 和 A2 称为 **KA2** 的**特征公理**。

令 $\mathbf{PC}_0$ 是用不含模态算子$[\alpha_A]$和 K_A 的公式表述的、由 TA 和 MP 构成的系统。

2.1.4 定义 形如 1.1.4。┤

2.1.5 引理

下面是 **KA2** 的导出规则和内定理：对所有$\alpha\in Act$，$\varphi, \psi\in Form$，$A\in Agent$ 和 $G\subseteq Agent$，

（1）$\varphi\to\psi／[\alpha_A]\varphi\to[\alpha_A]\psi$；

（2）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi／[\alpha_A]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha_A]\varphi_n\to[\alpha_A]\varphi$，

（3）$\varphi／[\alpha]\varphi$；

（4）$[\alpha](\varphi\to\psi)\to[\alpha]\varphi\to[\alpha]\psi$；

（5）$\varphi\to\psi／K_A\varphi\to K_A\psi$；

（6）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi／K_A\varphi_1\wedge\ldots\wedge K_A\varphi_n\to K_A\varphi$；

（7）$G\alpha\to A\alpha$，　$A\alpha\to\underline{G}\alpha$，　对每一 $A\in G$；

（8）$Agent\,\alpha\to G\alpha$；

（9）$SK_{A,\,G}\,\alpha\to WK_{A,\,G}\,\alpha$；

（10）$SK_{A,\,Agent}\,\alpha\to SK_{A,\,G}\,\alpha$，

　　$WK_{A,\,G}\,\alpha\to WK_{A,\,Agent}\,\alpha$；

（11）$SK_{A,\,G}\,\alpha\to SK_{A,\,\{A\}}\,\alpha$，　对每一 $A\in G$，

　　$WK_{A,\,\{A\}}\,\alpha\to WK_{A,\,G}\,\alpha$，　对每一 $A\in G$。

证明：

（1）－（4）据 $K_{\alpha A}$ 和 $RN_{\alpha A}$ 如通常所证。

（5）－（6）据 K_A 和 RN_A 如通常所证。

（7）－（11）据 2.1.1（6）显然。┤

说明：

从（3）和（4），我们可以看到，我们的系统是通常动态逻辑的扩充和细化。

2.1.6 定义

定义不含模态算子$[\alpha_A]$和 K_A 以及形如 $A\alpha$的 $Form_0\subseteq Form$ 的**翻译映射** t 如下：

$t(p)$，$t(\neg\varphi)$和 $t(\varphi\wedge\psi)$如前定义；

$t(A\alpha)=t(\top)$；

$t([\alpha_A]\varphi)=t(K_A\varphi)=t(\varphi)$。┤

如前定义 t-退化和协调性概念，可证

KA2 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$ 且 **KA2** 是协调的。

2.2.1 定义

（1）称$\langle W, R\rangle$是**框架**，当且仅当，

① W 是非空集，

② R 是定义域为$(Act\times Agent)\cup Agent$ 的映射，使得对每一$<\alpha, A>\in Act\times Agent$，$R(\alpha, A)$是 W 上的二元通达关系；且对每一 $A\in Agent$，$R(A)$也是 W 上的二元通达关系。

（2）称$\langle W, R, [\,]\rangle$是**模型**，当且仅当，$\langle W, R\rangle$是框架且

③ $[\,]$是从 At 到 $P(W)$中的指派映射。┤

说明：

为了简洁和符合书写习惯，以后我们用 $R_{\alpha A}$ 缩写 $R(\alpha, A)$且用 R_A 缩写 $R(A)$。

2.2.2 缩写定义

令$\langle W, R\rangle$是框架。

任给 $w\in W$，$A\in Agent$ 和$\alpha\in Act$，

$R_{\alpha A}(w)::=\{u\in W:\ wR_{\alpha A}u\}$，

$R_A(w)::=\{u\in W:\ wR_Au\}$。┤

2.2.3 真值集定义　令 $M=\langle W, R, [\,]\rangle$是模型。

对每一复合公式或形如 $A\alpha$的原子公式φ，定义φ相对 M 的**真值集**$[\varphi]$如下：任给 $w\in W$，$A\in Agent$，$\alpha\in Act$，

（1）$w\in[\neg\varphi] \Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，
（2）$w\in[\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，
（3）$w\in[[\alpha_A]\varphi] \Leftrightarrow R_{\alpha A}(w)\subseteq[\varphi]$，
（4）$w\in[K_A\varphi] \Leftrightarrow R_A(w)\subseteq[\varphi]$，
（5）$w\in[A\alpha] \Leftrightarrow wR_{\alpha A}w$。┤

说明：

在文献［6］，我们用下面条件代替（5）：

（5B）$w\in[A\alpha] \Leftrightarrow \exists u\in W(uR_{\alpha A}w)$。

由于我们在那里还引入框架条件

(a1) $\exists u\in W(uR_{\alpha A}w) \Rightarrow wR_{\alpha A}w$，[5]

且我们总有

$wR_{\alpha A}w \Rightarrow \exists u\in W(uR_{\alpha A}w)$，

所以这里的（5）等价那里的（5B）。但（5）更简洁。

那么（5）是如何来的了？前面我们说过，$A\alpha$的直观意义是 A 做了α。再据（3）对$[\alpha_A]\varphi$的定义，我们认为公理 A1 应是有效式，所以应有

（%）$w\in[A\alpha] \Rightarrow wR_{\alpha A}w$。

当然，在 w 做活动α一般情况下还能转变为其他状态（在多主体情况下有可能还要加上其他主体在 w 做的其他活动的影响）。但从做了活动的最弱意义上说，状态 w 不会因为做α而得到改变总是可能的，要改变的话也是其他状态，故（%）的逆也应成立。

$WK_{A,G}\alpha$还有一个语义解释：

$w\in[WK_{A,G}\alpha] \Leftrightarrow \exists B\in G(w\in[K_AB\alpha])$，

在这种解释下，

$WK_{A,G}\alpha\leftrightarrow\bigvee\{K_AB\alpha: B\in G\}$

是有效式。易见这种解释要比现有的解释强。

2.2.4 定义

（1）称框架 $F=\langle W, R\rangle$是 **ka2-框架**，当且仅当，下列**框架条件**成立：对 $w, u\in W$，$A\in$ Agent 和$\alpha\in$ Act，

(ta) wR_Aw，

(a2) $wR_{\alpha A}u \Rightarrow uR_{\alpha A}u$。

（2）所有的 **ka2-**框架的类记作 Frame(**ka2**)。┤

说明：

易见(a2)描述了一种通达自返性。

2.2.5－2.2.7 形如 1.2.5－1.2.7 。┤

2.2.8 框架可靠性定理

KA2 相对框架类 Frame(**ka2**)是可靠的。

证明：

任给 **ka2-**框架 $F=\langle W, R\rangle$和 F 上赋值[ ]。

下面验证 **KA2** 的公理相对 $M=\langle F, [\ ]\rangle$有效且 **KA2** 的推理规则相对 M 保持有效性。

公理 TA，$K_{\alpha A}$和 K_A，规则 MP，$RN_{\alpha A}$和 RN_A 的验证如通常。

验证公理 T_A：任给 $w\in[K_A\varphi]$。据 2.2.3（4），$R_A(w)\subseteq[\varphi]$，据(ta)，有 $w\in R_A(w)$，所以

[5] (a1)与下面的框架条件(a2)一阶等价。

$w\in[\varphi]$。

验证公理 A1：任给 $w\in[A\alpha]$。据 2.2.3（5），有

（%）$w\in R_{\alpha A}(w)$。

任给公式φ使得 $w\in[[\alpha_A]\varphi]$，据 2.2.3（3），有

$R_{\alpha A}(w)\subseteq[\varphi]$。

再据（%），有 $w\in[\varphi]$。

验证公理 A2：假设$[\alpha_A]A\alpha$在 M 中不有效，则存在 $w\in W$ 使得 $w\notin[[\alpha_A]A\alpha]$。据 2.2.3（3），

$R_{\alpha A}(w)\not\subseteq[A\alpha]$，

所以存在 $u\in W$ 使得

① $wR_{\alpha A}u$，　且

② $u\notin[A\alpha]$。

据②和 2.3（5），我们有

③ $\sim uR_{\alpha A}u$，

另外据①和(a2)，有 $uR_{\alpha A}u$，矛盾于③。┤

2.3.1 定义　形如 1.3.1。┤

2.3.2 引理　**KA2** 是一致的。

证明：形如 1.3.2。┤

类似 1.3.4 那样定义 2.3.4，我们有形如 1.3.3 和 1.3.5 那样的结果，记为 2.3.3 和 2.3.5。

2.3.6 定义　令 w 是公式集。

$w^{-[\alpha_A]}::=\{\varphi:[\alpha_A]\varphi\in w\}$，

$w^{-K_A}::=\{\varphi:K_A\varphi\in w\}$。┤

2.3.7 引理　令 W 是所有极大一致集的集合，令 $w\in W$。则

（1）$K_A\varphi\in w\Leftrightarrow\forall u\in W(w^{-K_A}\subseteq u\Rightarrow\varphi\in u)$。

（2）$[\alpha_A]\varphi\in w\Leftrightarrow\forall u\in W(w^{-[\alpha_A]}\subseteq u\Rightarrow\varphi\in u)$。

证明：形如 1.3.7（1）－（2）的证明。┤

2.3.8 定义

（1）定义 **KA2** 的**典范框架**<W, R>如下：

① $W=\{w:w$ 是极大一致集$\}$，

② R 是 $(Act\times Agent)\cup Agent$ 上的映射，使得

$R_{\alpha A}=\{\langle w,u\rangle\in W^2:w^{-[\alpha_A]}\subseteq u\}$，　对每一$\langle\alpha,A\rangle\in Act\times Agent$；

$R_A=\{\langle w,u\rangle\in W^2:w^{-K_A}\subseteq u\}$，　对每一 $A\in Agent$。

（2）定义 **KA2** 的**典范模型**<W, R, [ ]>如下：<W, R>是 **KA2** 的典范框架，且

③ $[p]=|p|$，　对每一原子公式 p。┤

说明：

据 2.3.2，**KA2** 一致，所以 W 非空。

2.3.9 典范框架主引理
令<W, R >是 **KA2** 的典范框架且 $w\in W$。则

$$A\alpha\in w \Leftrightarrow w^{-[\alpha_A]}\subseteq w。$$

证明：

"⇒"：设 $A\alpha\in w$。据公理 A1，对任意公式φ，有$[\alpha_A]\varphi\to\varphi\in w$，所以 $w^{-[\alpha_A]}\subseteq w$。

"⇐"：设 $A\alpha\notin w$。据 2.3.3（2），公理$[\alpha_A]A\alpha\in w$，所以 $A\alpha\in w^{-[\alpha_A]}$。再据设定，易见 $w^{-[\alpha_A]}\not\subseteq w$。

2.3.10 典范模型基本定理
令 M＝<W, R, [ ]>是 **KA2** 的典范模型。
（1）$\varphi\in w \Leftrightarrow w\in[\varphi]$， 对每一 $w\in W$ 和公式φ。
（2）$|\varphi|=[\varphi]$， 对每一公式φ。
证明：只须证（1）。施归纳于φ的结构。
情况 1 φ是原子公式：据定义 2.3.8③。
情况 2 $\varphi=\neg\psi$：如通常所证。
情况 3 $\varphi=\psi\wedge\theta$：如通常所证。
情况 4 $\varphi=[\alpha_A]\psi$：我们有

$$\begin{aligned}[\alpha_A]\psi\in w &\Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-[\alpha_A]}\subseteq u \Rightarrow \psi\in u) && \text{据 2.3.7（1）}\\ &\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow u\in|\psi|) && \text{据 2.3.8②和 2.3.4}\\ &\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow u\in[\psi]) && \text{据归纳假设}\\ &\Leftrightarrow w\in[[\alpha_A]\psi]。 && \text{据 2.2.3（3）}\end{aligned}$$

情况 5 $\varphi=K_A\psi$：我们有

$$\begin{aligned}K_A\psi\in w &\Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-K_A}\subseteq u \Rightarrow \psi\in u) && \text{据 2.3.7（2）}\\ &\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in|\psi|) && \text{据 2.3.8②和 2.3.4}\\ &\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in[\psi]) && \text{据归纳假设}\\ &\Leftrightarrow w\in[K_A\psi]。 && \text{据 2.2.3（4）}\end{aligned}$$

情况 6 $\varphi=A\alpha$：我们有

$$\begin{aligned}A\alpha\in w &\Leftrightarrow w^{-[\alpha_A]}\subseteq w && \text{据 2.3.9}\\ &\Leftrightarrow wR_{\alpha A}w && \text{据 2.3.8②}\\ &\Leftrightarrow w\in[A\alpha]。 && \text{据 2.2.3（5）}\dashv\end{aligned}$$

2.3.11 定理 形如 1.3.11。⊣

2.3.12 引理
KA2 的典范框架是 **KA2**-框架。
证明：

令 F＝<W, R>是 **KA2** 的典范框架。下面我们来验证 F 满足定义 2.2.4 给出的框架条件。

验证(ta)：形如 1.3.12 的证明对(tk)的验证。

验证(a2)：设 $wR_{\alpha A}u$。据公理 A2，有

① $[\alpha_A]A\alpha\in w$。

另一方面，据公理 A1 和 2.1.5（1），有

$\vdash [\alpha_A]A\alpha\to[\alpha_A]([\alpha_A]\varphi\to\varphi)$，　$\forall\varphi\in Form$。

再据①和 2.3.3（1），有

② $[\alpha_A]([\alpha_A]\varphi\to\varphi)\in w$，　$\forall\varphi\in Form$。

据设定，有 $w^{-[\alpha_A]}\subseteq u$，所以据②，有

$[\alpha_A]\varphi\to\varphi\in u$，　$\forall\varphi\in Form$。

易见 $uR_{\alpha A}u$。┤

2.3.13 框架完全性定理

KA2 相对框架类 Frame(**ka2**)是完全的。

证明：形如 1.3.13。┤

本文把所有活动处理为原子活动，没有像［2］那样考虑复合活动。若在对象语言中直接引入复合活动$\alpha\cup\beta$, $\alpha\cap\beta$和α^*，并且如通常定义

$R_{\alpha\cup\beta}=R_\alpha\cup R_\beta$，

$R_{\alpha;\beta}=R_\alpha\circ R_\beta$。

则易见下列是有效式

$K\alpha\wedge K\beta\to K(\alpha\cup\beta)$，

$A(\alpha\cup\beta)\leftrightarrow A\alpha\vee A\beta$，　$A\alpha\wedge A\beta\to A(\alpha;\beta)$。

研究知道复合活动的逻辑是我们将来的工作。

3　知道活动的逻辑 ACK

如前，下面我们在许多地方只提到与前面内容不同之处。

3.1.1 定义　形成规则如下：

$p\,|\,\neg\varphi\,|\,(\varphi\wedge\psi)\,|\,[\alpha]\varphi\,|\,(\alpha\geqslant\beta)\,|\,K\varphi\,|\,K\alpha\,|\,K\alpha\beta$，　其中 $p\in At$，$\alpha, \beta\in Act$。┤

说明：

如前所说，形如$\alpha\geqslant\beta$，$K\alpha$和 $K\alpha\beta$的公式都是原子公式。

$\alpha\geqslant\beta$的直观意义是：任给公式φ，若$[\beta]\varphi$成立，则$[\alpha]\varphi$成立。所以，$\alpha\geqslant\beta$表示α是β的某种条件。

$K\alpha\beta$的直观意义是：（主体）知α和β有某种关联。

3.1.2 规定与缩写

为了叙述方便，我们规定**联结符的结合力**从左到右依次减弱：

$\neg$，K，$[\alpha]$，$\geqslant$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$。┤

3.1.3 定义

带活动条件句的认知活动系统 ACK 定义如下：对所有$\alpha, \beta\in Act$ 和$\varphi, \psi\in Form$， （TA） 所有重言式的代入特例，

（K_K） $K(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow K\varphi\rightarrow K\psi$，

（K_α） $[\alpha](\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow[\alpha]\varphi\rightarrow[\alpha]\psi$，

（CA） $\alpha\geqslant\beta\rightarrow[\beta]\varphi\rightarrow[\alpha]\varphi$，

（ACA） $[\beta](\alpha\geqslant\beta)$，

（T_α） $[\alpha](\alpha\geqslant\beta)\rightarrow\alpha\geqslant\beta$，

（CAK） $K(\alpha\geqslant\beta)\rightarrow K\alpha\rightarrow K\beta$，

（CAT） $K(\beta_0\geqslant\beta)\rightarrow K\alpha\beta_0\rightarrow K\alpha\beta$。

（MP） $\varphi, \varphi\rightarrow\psi／\psi$，

（RN_K） $\varphi／K\varphi$，

（RN_α） $\varphi／[\alpha]\varphi$。┤

3.1.4 定义 形如 1.1.4。┤

3.1.5 引理

下面是 **ACK** 的导出规则和内定理：

（1）$\varphi\rightarrow\psi／K\varphi\rightarrow K\psi$， （$RM_K$）

（2）$\varphi\rightarrow\psi／[\alpha]\varphi\rightarrow[\alpha]\psi$， （$RM_\alpha$）

（3）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\varphi／K\varphi_1\wedge\ldots\wedge K\varphi_n\rightarrow K\varphi$，（$RK_K$）

（4）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\varphi／[\alpha]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha]\varphi_n\rightarrow[\alpha]\varphi$，（$RK_\alpha$）

（5）$\alpha\geqslant\alpha$。

证明：

（1）—（2）分别据 RN_K 和 K_K，RN_α和 K_α。

（3）—（4）分别据 RM_K 和 RM_α。

（5）据 ACA 和 T_α。┤

3.1.6 定义

定义从 Form 到不含模态算子 K, [α]和⩾的子语言 $Form_0\subseteq Form$ 的**翻译映射** t 如下：

t(p)，$t(\neg\varphi)$和 $t(\varphi\wedge\psi)$如前定义；

$t(K\varphi)=t([\alpha]\varphi)=t(\varphi)$；

$t(\alpha\geqslant\beta)=t(K\alpha)=t(K\alpha\beta)=t(\top)$。┤

如前定义 t-退化和协调性概念，可证

ACK 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$ 且 **ACK** 是协调的。

3.2.1 定义

（1）称 $F=\langle W, R_K, \underline{R}, N, O\rangle$是**关系与邻域映射混合的框架**，简称 F 是 **RN-框架**，当且仅当，

① W 是非空集，

② R_K 是 W 上的二元通达关系，

③ $\underline{R}=\{R_\alpha：\alpha\in Act\}$，使得对每一$\alpha\in Act$，$R_\alpha$是 W 上的二元通达关系。

④ N 和 O 是从 W 到 P(P(W))中的邻域映射。

（2）称 $M=\langle W, R_K, \underline{R}, N, O, [\ ]\rangle$是**关系与邻域映射混合的模型**，简称 M 是 **RN-模型**，当且仅当$\langle W, R_K, \underline{R}, N, O\rangle$是 RN-框架且

⑤ [ ]是从 At 到 P(W)中的指派映射。

（3）[ ]也称为框架 F 上的指派映射。┤

3.2.2 定义

令$\langle W, R_K, \underline{R}, N, O\rangle$是 RN-框架。任给 $w\in W$。

（1）$R_K(w) ::= \{u\in W: wR_K u\}$，

（2）$R_\alpha(w) ::= \{u\in W: wR_\alpha u\}$，　任给$\alpha\in Act$。┤

3.2.3 真值集定义　令 $M=\langle W, R_K, \underline{R}, N, O, [\ ]\rangle$是 RN-模型。

对每一复合公式或形如$\alpha\geqslant\beta$，$K\alpha$和 $K\alpha\beta$的原子公式φ，定义φ相对 M 的**真值集**$[\varphi]$如下：任给 $w\in W$ 和$\alpha\in Act$，

（1）$w\in[\neg\varphi] \Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，

（2）$w\in[\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[K\varphi] \Leftrightarrow R_K(w)\subseteq[\varphi]$，

（4）$w\in[[\alpha]\varphi] \Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq[\varphi]$，

（5）$w\in[\alpha\geqslant\beta] \Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$，

（6）$w\in[K\alpha] \Leftrightarrow R_\alpha(w)\in N(w)$，

（7）$w\in[K\alpha\beta] \Leftrightarrow <R_\alpha(w), R_\beta(w)>\in O(w)$。┤

3.2.4 定义

（1）称 RN-框架 $F=\langle W, R_K, \underline{R}, N, O\rangle$是带**活动条件句的认知活动框架**，简称 F 是 **ack-框架**，当且仅当下列**框架条件**成立：对任意 $w, u\in W$，

(aka)　$u\in R_\beta(w) \Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u)$。

(ta)　$\forall u\,(u\in R_\alpha(w) \Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u)) \Rightarrow R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$。

(cak)　$\forall u\,(u\in R_K(w) \Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u))$且 $R_\alpha(w)\in N(w) \Rightarrow R_\beta(w)\in N(w)$。

(cat)　$\forall u\,(u\in R_K(w) \Rightarrow R_{\beta_0}(u)\subseteq R_\beta(u))$且$<R_\alpha(w), R_{\beta_0}(w)>\in O(w)$

$\Rightarrow <R_\alpha(w), R_\beta(w)>\in O(w)$。

（2）所有的 ack-框架的类记作 Frame(**ack**)。┤

3.2.5－3.2.7　形如 1.2.5－1.2.7 。┤

3.2.8 框架可靠性定理

ACK 相对框架类 Frame(**ack**)是可靠的。

证明：

任给 **ack-**框架 $F=\langle W, R_K, \underline{R}, N, O\rangle$和 F 上赋值[ ]。

下面验证 **ACK** 的公理相对 $M=<F, [\ ]>$有效且 **ACK** 的推理规则相对 M 保持有效性。

公理 TA，K_K 和 K_α，规则 MP，RN_K 和 RN_α的验证如通常。

验证公理 CA：任给 $w\in[\alpha\geqslant\beta]$且任给公式$\varphi$使得 $w\in[[\beta]\varphi]$。据 3.2.3（5）和（4），有

$R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$，$R_\beta(w)\subseteq[\varphi]$。

所以 $R_\alpha(w)\subseteq[\varphi]$，因此 $w\in[[\alpha]\varphi]$。

验证公理 ACA：假设$[\beta](\alpha\geqslant\beta)$在 M 中不有效，则存在 $w\in W$ 使得 $w\notin[[\beta](\alpha\geqslant\beta)]$。据 3.2.3（4），有

$R_\beta(w) \not\subseteq [\alpha\geqslant\beta]$，

所以存在 $u\in W$ 使得

① $u\in R_\beta(w)$，　且

② $u\notin[\alpha\geqslant\beta]$。

据①和 3.2.4(aka)，我们有

$R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u)$。

再据 3.2.3（5），有 $u\in[\alpha\geqslant\beta]$，矛盾于②。

验证公理 T_α：任给 $w\in[[\alpha](\alpha\geqslant\beta)]$。据 3.2.3（4），我们有

$R_\alpha(w)\subseteq[(\alpha\geqslant\beta)]$，

所以

$u\in R_\alpha(w)\Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u)$，　对所有 $u\in W$。

据(ta)，我们有

$R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$，

因此 $w\in[\alpha\geqslant\beta]$。

验证公理 CAK：任给 $w\in W$ 使得

$w\in[K(\alpha\geqslant\beta)]$，且 $w\in[K\alpha]$。

据 3.2.3（3），（5）和（6），我们有

$\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u))$，且

$R_\alpha(w)\in N(w)$。

再据(cak)，易见 $R_\beta(w)\in N(w)$。所以再据 3.2.3（6），有 $w\in[K\beta]$。

验证公理 CAT：任给 $w\in W$ 使得

$w\in[K(\beta_0\geqslant\beta)]$，且 $w\in[K\alpha\beta_0]$。

据 3.2.3（3），（5）和（7），我们有

$\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow R_{\beta_0}(u)\subseteq R_\beta(u))$，且

$<R_\alpha(w), R_{\beta_0}(w)>\in O(w)$。

再据(cat)，易见

$<R_\alpha(w), R_\beta(w)>\in O(w)$。

所以再据 3.2.3（7），有 $w\in[K\alpha\beta_0]$。$\dashv$

3.3.1 定义　形如 1.3.1。$\dashv$

3.3.2 引理　**ACK** 是一致的。

证明：形如 1.3.2。$\dashv$

类似 1.3.4 那样定义 3.3.4，类似 1.3.6 那样定义 3.3.6，我们有形如 1.3.3，1.3.5 和 1.3.7 那样的结果，记为 3.3.3，3.3.5 和 1.3.7。

3.3.8 定义

（1）定义 **ACK** 的**典范框架** $F=<W, R_K, \underline{R}, N, O>$如下：

① $W=\{w$：w 是极大一致集$\}$，

② $R_K=\{<w, u>\in W^2$：$w^{-K}\subseteq u\}$，

③ $\underline{R}=\{R_\alpha$：$\alpha\in Act\}$，使得对每一$\alpha\in Act$，

$R_\alpha=\{<w, u>\in W^2$：$w^{-[\alpha]}\subseteq u\}$。

④ $N(w)=\{R_\alpha(w)$：存在 $K\alpha\in w\}$，

$O(w)=\{<R_\alpha(w), R_\beta(w)>$：存在 $K\alpha\beta\in w\}$。

（2）定义 **ACK** 的**典范模型** M＝<W, R_K, $\underline{R}$, N, O, [ ]>如下：<W, R, N, O>是 **ACK** 的典范框架，且

⑤ [p]＝|p|， 对每一原子公式 p。⊣

3.3.9 典范框架主引理

令 F＝<W, R_K, $\underline{R}$, N, O>是 **ACK** 的典范框架，且令 w∈W。则

（1）$R_\alpha(w) \subseteq R_\beta(w) \Leftrightarrow \forall\varphi\in$ Form $([\beta]\varphi\to[\alpha]\varphi\in w)$。

（2）$\alpha\geqslant\beta\in w \Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$。

（3）$\alpha\geqslant\beta\in w \Leftrightarrow \forall\varphi\in$ Form $([\beta]\varphi\to[\alpha]\varphi\in w)$。

（4）$K\alpha\in w \Leftrightarrow R_\alpha(w)\in N(w)$。

（5）$K\alpha\beta\in w \Leftrightarrow \langle R_\alpha(w), R_\beta(w)\rangle\in O(w)$。

证明：

（1）“⇒”：设

① $R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$。

任给$\varphi\in$ Form 使得$[\beta]\varphi\in w$。据 3.3.7（2），有

② $R_\beta(w)\subseteq |\varphi|$。

据①，我们有

③ $R_\alpha(w)\subseteq |\varphi|$。

再据 3.3.7（2），有$[\alpha]\varphi\in w$。

“⇐”：设

④ $R_\alpha(w) \not\subseteq R_\beta(w)$。

要证

⑤ 存在公式使得$[\beta]\varphi\in w$ 但$[\alpha]\varphi\notin w$。

据④，

⑥ 存在 $u\in W$ 使得 $u\in R_\alpha(w)$但 $u\notin R_\beta(w)$。

因此

⑦ 存在 $u\in W$ 使得 $w^{-[\alpha]}\subseteq u$ 但 $w^{-[\beta]} \not\subseteq u$。

据 $w^{-[\beta]} \not\subseteq u$，存在公式$\varphi\in w^{-[\beta]}$使$\varphi\notin u$。再据$\varphi\notin u$ 和 $w^{-[\alpha]}\subseteq u$，有$\varphi\notin w^{-[\alpha]}$，所以$[\alpha]\varphi\notin w$。因为$\varphi\in w^{-[\beta]}$，所以$[\beta]\varphi\in w$。这样，我们证明了⑤。

（2）“⇒”：设$\alpha\geqslant\beta\in w$。据公理 CA，

① $[\beta]\varphi\to[\alpha]\varphi\in w$， 对所有$\varphi\in$ Form。

再据已证（1），有

② $R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$。

“⇐”：设$\alpha\geqslant\beta\notin w$。要证：

④ $R_\alpha(w) \not\subseteq R_\beta(w)$。

为此只须证：

⑤ 存在 $u\in W$ 使得 $u\in R_\alpha(w)$但 $u\notin R_\beta(w)$。

令$\Phi= w^{-[\alpha]}\cup\{\neg(\alpha\geqslant\beta)\}$。先证：

⑥ Φ是一致的。

假设Φ不一致，则存在$\varphi_1,\ldots, \varphi_n\in w^{-[\alpha]}$使得

□ $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\alpha\geqslant\beta$

据 3.1.5 的 RK_α，我们有

⑦ □ $[\alpha]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha]\varphi_n\rightarrow[\alpha](\alpha\geqslant\beta)$。

因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-[\alpha]}$，所以$[\alpha]\varphi_1,\ldots,[\alpha]\varphi_n\in w$，再据⑦我们有，$[\alpha](\alpha\geqslant\beta)\in w$。再据公理 T_α，有$\alpha\geqslant\beta\in w$，矛盾于设定。

这样我们证明了⑥成立。据⑥和 Lindenbaum-引理，存在 $u\in W$ 使得$\Phi\subseteq u$，所以易见

⑧ $w^{-[\alpha]}\subseteq u$， 且

⑨ $\alpha\geqslant\beta\notin u$。

因为公理$[\beta](\alpha\geqslant\beta)\in w$，所以$\alpha\geqslant\beta\in w^{-[\beta]}$，再据⑨，我们有 $w^{-[\beta]}\not\subseteq u$，因此 $u\notin R_\beta(w)$。

另一方面，据⑧，有 $u\in R_\alpha(w)$，所以我们最终证明了⑤成立。

（3）据（1）和（2）。

（4）和（5）显然。┤

3.3.10 典范模型基本定理

令 $M=\langle W, R_K, \underline{R}, N, O, [\ ]\rangle$是 **ACK** 的典范模型。

（1）$\varphi\in w \Leftrightarrow w\in[\varphi]$， 对每一 $w\in W$ 和公式φ。

（2）$|\varphi|=[\varphi]$， 对每一公式φ。

证明：只须证（1）。施归纳于φ的结构。

情况 1 φ是原子公式：据定义 3.3.8⑤。

情况 2 $\varphi=\neg\psi$：如通常所证。

情况 3 $\varphi=\psi\wedge\theta$：如通常所证。

情况 4 $\varphi=K\psi$：易见

$K\psi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-K}\subseteq u \Rightarrow \varphi\in u)$ 据 3.3.7（1）

$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Ku \Rightarrow u\in|\psi|)$ 据 3.3.8②

$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Ku \Rightarrow u\in[\psi])$ 据归纳假设

$\Leftrightarrow w\in[K\psi]$。 据 3.2.3（3）

情况 5 $\varphi=[\alpha]\psi$：据 3.3.7（2），本情况证明类似上一情况的证明。

情况 6 $\varphi=\alpha\geqslant\beta$：我们有

$\alpha\geqslant\beta\in w \Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$ 据上一引理（2）

$\Leftrightarrow w\in[\alpha\geqslant\beta]$。 据 3.2.3（5）

情况 7 $\varphi=K\alpha$：我们有

$K\alpha\in w \Leftrightarrow R_\alpha(w)\in N(w)$ 据上一引理（4）

$\Leftrightarrow w\in[K\alpha]$。 据 3.2.3（6）

情况 8 $\varphi=K\alpha\beta$：我们有

$K\alpha\beta\in w \Leftrightarrow \langle R_\alpha(w), R_\beta(w)\rangle\in O(w)$ 据上一引理（5）

$\Leftrightarrow w\in[K\alpha\beta]$。 据 3.2.3（7）┤

3.3.11 定理 形如 1.3.11。┤

3.3.12 引理

ACK 的典范框架是 **ack**-框架。

证明：

令 $F=\langle W, R_K, \underline{R}, N, O\rangle$是 **ACK** 的典范框架。下面我们来验证 F 满足定义 3.2.4 给出的

框架条件。

验证(aka)：任给 w, u∈W 使得 $u\in R_\beta(w)$，则

（1）$w^{-[\beta]}\subseteq u$，

据公理 ACA，有$[\beta](\alpha\geqslant\beta)\in w$，据（1），有$\alpha\geqslant\beta\in u$。据 3.3.9（2），有

$R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u)$。

验证(ta)：任给 w∈W。设

① $u\in R_\alpha(w)\Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u)$，　对任意 u∈W。

要证：

② $R_\alpha(w)\subseteq R_\beta(w)$。

据 3.3.8③和 3.3.9（2），①和②分别是

③ $w^{-[\alpha]}\subseteq u\Rightarrow\alpha\geqslant\beta\in u$，　对任意 u∈W。

④ $\alpha\geqslant\beta\in w$。

据③和 3.3.7（2），我们有

⑤ $[\alpha](\alpha\geqslant\beta)\in w$。

再据公理 T_α，有④。

验证(cak)：设

① $\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_\beta(u))$，且

② $R_\alpha(w)\in N(w)$。

据①和 3.3.9（2），我们有

$\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow\alpha\geqslant\beta\in u)$。

据 3.3.7（1），我们有

③ $K(\alpha\geqslant\beta)\in w$。

另一方面，据②和 3.3.9（4），有

④ $K\alpha\in w$。

再据③和公理 CAK，有 $K\beta\in w$，再据 3.3.9（4），有

$R_\beta(w)\in N(w)$。

验证(cat)：设

① $\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow R_{\beta_0}(u)\subseteq R_\beta(u))$，且

② $<R_\alpha(w), R_{\beta_0}(w)>\in O(w)$。

据①和 3.3.9（2），我们有

$\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow\beta_0\geqslant\beta\in u)$。

据 3.3.7（1），我们有

③ $K(\beta_0\geqslant\beta)\in w$。

另一方面，据②和 3.3.9（5），有

④ $K\alpha\beta_0\in w$。

据③，④和公理 CAT，有 $K\alpha\beta\in w$，再据 3.3.9（5），有

$<R_\alpha(w), R_\beta(w)>\in O(w)$。⊣

3.3.13 框架完全性定理

ACK 相对框架类 Frame(**ack**)是完全的。

证明：形如 1.3.13。⊣

我们可以扩充系统 **ACK** 到表达力更为丰富的系统。

一种方法是在对象语言中直接引入活动$\alpha\cup\beta$, $\alpha\cap\beta$和α^*，并且如通常定义

$R_{\alpha\cup\beta}=R_\alpha\cup R_\beta$，

$R_{\alpha\cap\beta}=R_\alpha\cap R_\beta$，

$R_{\alpha^*}=R_\alpha$的自返传递闭包。

易见下列公式是有效式：

$\alpha\geqslant\alpha\cup\beta$， $\alpha\cap\beta\geqslant\alpha$，$\alpha\geqslant\alpha^*$。

所以我们可以把它们作为公理加入 **ACK**。

另一方面，我们还可以在 **ACK** 中增加公理 KA 或 AKA。当然，增加 AKA 使我们只能刻画一类特殊的认知－－对思维活动的认知。

最后，我们要讨论一下公理 CAT。它有一个概括形式：

（GCAT）$K(\alpha\geqslant\alpha_0)\wedge K(\beta_0\geqslant\beta)\rightarrow(K\alpha_0\beta_0\rightarrow K\alpha\beta)$。

此公式对应的框架条件是

$\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow R_\alpha(u)\subseteq R_{\alpha_0}(u))$且$\forall u\,(u\in R_K(w)\Rightarrow R_{\beta_0}(u)\subseteq R_\beta(u))$

且$\langle R_{\alpha_0}(w), R_{\beta_0}(w)\rangle\in O(w)\Rightarrow\langle R_\alpha(w), R_\beta(w)\rangle\in O(w)$。

易证用 GCAT 替换 CAT 得到的系统相对上述框架条件是框架完全的。但我们认为 GCAT 的直观意义不清楚，所以我们没有把它引入 **ACK**。

参考文献:

［**1**］刘壮虎，李小五. 对动作的认知 [J]. 湖南科技大学学报，社会科学版, 2005, (5).

［**2**］D. Harel, D. Kozen, and J. Tiuryn. Dynamic Logic [M], The MIT Press, 1995.

［**3**］Ch. Meyer and W. van der Hoek. Epistemic Logic for AI and Computer Science [M], Cambridge University Press, 1995.

［**4**］ P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. Modal Logic [M], Cambridge University Press, 2001.

［**5**］李小五. 模态逻辑讲义 [M]. 中山大学出版社，2005.

［**6**］李小五. 我知道你－－知道主体的逻辑.逻辑与认知 [J/OL]. 2005, (2): 66-79.

［**7**］李小五. 无穷逻辑（上下卷）[M]. 社科文献出版社， 1996.10, 1998.10.

Three kinds of Logics of Knowing Action

LI Xiao-wu

(Institute of Logic and Cognition of Zhongshan University 510275, Guangdong, China)

Abstract： We construct three kinds of systems of knowing action, prove that they have the frame soundness and frame completeness with respect to the matched semantics, respectively.

Key words： system of knowing action; frame soundness; frame completeness