类型-逻辑语法与逻辑形式系统的深刻联系*

张秋成

（中山大学逻辑与认知研究所 中山大学哲学系 广州 510275）

摘要：本文通过论述类型-逻辑语法与逻辑形式系统的深刻联系，揭示了该理论以逻辑推理为基础的主要特色。这主要体现在两个方面：其一是类型-逻辑语法与相干逻辑、线形逻辑等逻辑系统同属于所谓的子结构逻辑；其二是依据柯里一霍华德同构定理，类型-逻辑语法中的两种运算——句法范畴运算和λ-词项运算，都与直觉主义命题逻辑证明是同态对应关系。

关键词：子结构逻辑；直觉主义命题逻辑；兰贝克演算；柯里一霍华德同构定理；同态对应

类型—逻辑语法诞生于上个世纪八十年代，是自蒙塔古语法以来的又一种十分重要的自然语言逻辑理论，它以其表述的简洁性、理论的逻辑化和词汇化倾向以及更好地符合意义组合原则等鲜明特色，受到了形式语义学、语言学、语言哲学和自然语言理解和处理等领域的广泛关注，并继续保持迅猛的发展势头。本文试图通过论述类型-逻辑语法与逻辑形式系统的深刻联系，揭示该理论以逻辑推理为基础的主要特色。

一．作为一种子结构逻辑的类型-逻辑语法

经典逻辑（Classical Logic）与直觉主义逻辑（Intuitionistic Logic）把可证关系 $\vdash$的前提当作是若干公式的集合，但是我们也可以把它看作是满足下列结构规则（structural rules）的由若干公式组成的序列：

交换（permutation） 弱化（weakening） 减除（contraction）

$$\frac{\Gamma,\Phi,\Psi,\Gamma' \vdash \xi}{\Gamma,\Psi,\Phi,\Gamma' \vdash \xi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma,\Phi \vdash \Psi} \qquad \frac{\Gamma,\Phi,\Phi,\Gamma' \vdash \Psi}{\Gamma,\Phi,\Gamma' \vdash \Psi}$$

该序列满足结合公理。如果我们在直觉主义逻辑中去掉弱化规则，保留交换与减除规则，得到的就是相干逻辑（relevance logic）。弱化规则允许在前提中增加与证明过程毫无关系的假设，而这在相干逻辑中是不允许的，相干逻辑要求每一个假设在证明过程中必须至少用到一次。如果我们再去掉减除规则，只保留交换规则，就获得了带有蕴涵及合取联结词的线形逻辑（linear logic）。相干逻辑、线形逻辑等被归入子结构逻辑（substructural logics），因为它们都是通过在其证明系统中去掉上述三个结构规则中的一个或多个而得到的。类型-逻辑语法也是一种子结构逻辑，它在结构方面最接近线形逻辑。

但是，作为一种子结构逻辑的类型-逻辑语法与线形逻辑还有些不同。线形逻辑还保留

作者简介：张秋成（1970-），男，吉林省长春市人，现为中山大学哲学系博士后，研究领域：自然语言逻辑

了交换规则，而类型-逻辑语法连这一结构规则也去掉了，即它没有保留上述三个结构规则中的任何一个。因为没有交换规则，所以在类型-逻辑语法中运用肯定前件规则就要受到一定的限制。在保留交换规则的其它逻辑系统中，运用肯定前件规则对带有蕴涵联结词的公式和其前件进行运算要灵活得多，不管前件出现在带有蕴涵联结词的公式的左边还是右边，肯定前件规则都适用；这在类型-逻辑语法中是不可以的，依据前件出现在带有蕴涵联结词公式的左边和右边的位置不同，在类型-逻辑语法中，蕴涵联结词也相应地分为向左的蕴涵（用\表示）和向右的蕴涵(用/表示)。在运用肯定前件规则进行运算时，带有向左的蕴涵联结词的公式只能和位于其左边的前件进行运算；带有向右的蕴涵联结词的公式只能和位于其右边的前件进行运算。应该说，类型-逻辑语法对其蕴涵联结词的这种处理并不是它的缺点，而恰恰是为了满足类型-逻辑语法对自然语言处理的需要而设计的。因为自然语言和逻辑人工语言有很大不同，逻辑人工语言的语序可以人为设定，十分灵活，交换规则往往适用；自然语言的语序却是约定俗成的，不容随意改变，交换规则经常不适用。

结合公理也可以看作是一条结构规则，根据是否保留结合公理，类型-逻辑语法内部还可以再分为两类：一类是承认结合公理的兰贝克演算（associative Lambek calculus），另外一类是不承认结合公理的兰贝克演算（nonassociative Lambek calculus）。在不承认结合公理的兰贝克演算中，后承 $\Gamma\Rightarrow A:\alpha$中的前提序列$\Gamma$是通过加括号来加以限制的。在不承认结合公理的兰贝克演算中，我们可以通过添加一条明确的结构规则——结合公理，把它转化为承认结合公理的兰贝克演算。最近几年来，在类型-逻辑语法内部又出现了一些混合型的系统，这些系统只允许结合公理、交换规则和其他结构规则的有限应用。这种结构规则的有限应用又叫做结构控制（structural control），它是通过在类型-逻辑语法中增加新的联结词——模态算子和使待证明的后承中的前提序列结构化来实现的。

二. 类型-逻辑语法与直觉主义命题逻辑

下面讨论类型-逻辑语法与逻辑形式系统相联系的第二方面。先介绍著名的柯里—霍华德同构定理。该定理揭示了简单类型λ-演算中良类型（well-typed）λ-词项和直觉主义命题逻辑证明之间的深刻联系。

定理（柯里—霍华德同构定理）：具有蕴涵（implication）、合取（conjunction）和析取（disjunction）的直觉主义命题逻辑证明同简单类型λ-演算中具有函项（function）、积（product）与“和”（sum）类型的良类型λ-词项之间是一一对应关系。

下面详细说明。简单类型λ-演算中语义类型与直觉主义命题逻辑公式之间是一一对应的：

语义类型	命题逻辑公式
$\sigma\rightarrow\tau$（函项）	$\phi\rightarrow\psi$（蕴涵）
$\sigma\times\tau$（积）	$\phi\wedge\psi$（合取）
$\sigma+\tau$（和）	$\phi\vee\psi$（析取）

函项和直觉主义逻辑蕴涵之间的联系最早是由海丁（Heyting，1956）提出来的。他根据对逻辑证明的构造性理解将命题逻辑公式解释成它们的证明的集合。也就是说，要判定一个命题逻辑公式为真，就必须给出它的构造性证明。具体地，命题逻辑公式$\phi\rightarrow\psi$的一个构造性证明是一个从ϕ的构造性证明到ψ的构造性证明的函项（相当于函项语义类型）；命题逻辑公式$\phi\wedge\psi$的一个构造性证明是一个ϕ的构造性证明与ψ的构造性证明的配对（相当于积语义类型）；命题逻辑公式$\phi\vee\psi$的一个构造性证明或者是ϕ的构造性证明，或者是ψ的构造性证明，但必须指明是二者之中的哪一个构造性证明（相当于和语义类型）。

λ-词项是依据语义类型来定义的，所以根据语义类型与直觉主义命题逻辑公式之间的一一对应关系，我们也可以得出这样的结论：某种语义类型的λ-词项与和该种语义类型相对应的直觉主义命题逻辑公式之间也是一一对应的关系。由此便可以建立λ-演算与直觉主义命题逻辑证明之间的一一对应关系。下面举例说明：直觉主义命题逻辑中的肯定前件规则（modus ponens）允许我们从假设φ和φ→ψ推出结论ψ。这一推理规则和简单类型λ-演算中的函项型λ-词项的运用极为相似，因为把一个语义类型为σ→τ的函项型λ-词项α应用于一个语义类型为σ的λ-词项β，我们就可以得到一个语义类型为τ的λ-词项α（β）。直觉主义命题逻辑中的引进假设证明（hypothetical reasoning）和λ-演算中的λ-抽象（λ-abstraction）相对应。λ-抽象指的是：如果 x 是语义类型为σ的变项型λ-词项，α是语义类型为τ的λ-词项，那么λx.α就是语义类型为σ→τ的λ-词项。很明显，λ-抽象的作用是产生函项型λ-词项，λ-抽象在直觉主义命题逻辑中的对应物是蕴涵引进规则（implication-introduction rule）。该规则的意思是：如果我们能够从假设φ推出结论ψ，那么我们就能够不用任何假设而推出φ→ψ。

以上两例是由柯里和菲斯（Curry&Feys,1961）发现的，下面给出直觉主义命题逻辑中蕴涵证明和简单类型λ-演算中函项型λ-词项的运用及λ-抽象一一对应的严格表述：

蕴涵证明	函项型λ-词项的运用与λ-抽象
$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \qquad \triangle, \Psi \vdash \xi}{\Phi \to \Psi,\ \Gamma,\ \triangle \vdash \xi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \beta{:}\ \sigma \qquad \triangle, \alpha(\beta):\ \tau \vdash \gamma{:}\ \rho}{\alpha:\sigma \to \tau,\ \Gamma,\ \triangle \vdash \gamma{:}\ \rho}$
$\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \xi}{\Gamma \vdash \Phi \to \xi}$	$\dfrac{\Gamma,\ x{:}\ \sigma \vdash \alpha{:}\ \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\alpha : \sigma \to \tau}$

因为函项型λ-词项的运用及λ-抽象都与函项型λ-词项有关，所以上述对应也可以看作是直觉主义命题逻辑中蕴涵证明和简单类型λ-演算中函项型λ-词项之间的一一对应。以上的表述采用根岑风格的后承证明方式，主要是为了节省空间。毫无疑问，采用自然演绎的证明方式来表述也完全可以。另外，由于这里涉及的是直觉主义命题逻辑，所以交换规则、弱化规则、减除规则，这三个结构规则，在这里都适用。

霍华德（Howard, 1969）进一步发现了直觉主义命题逻辑中合取证明与析取证明和简单类型λ-演算中积类型与“和”类型λ-词项的一一对应关系：

合取证明与析取证明	积类型与“和”类型λ-词项
$\dfrac{\phi, \psi, \Gamma \vdash \xi}{\phi \wedge \psi, \Gamma \vdash \xi}$	$\dfrac{\pi_1(\alpha){:}\sigma, \pi_2(\alpha){:}\tau, \Gamma \vdash \beta{:}\rho}{\alpha{:}\sigma \times \tau, \Gamma \vdash \beta{:}\rho}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Delta \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \phi \wedge \psi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha{:}\ \sigma \qquad \Delta \vdash \beta{:}\ \tau}{\Gamma, \Delta \vdash \langle \alpha,\beta \rangle{:}\sigma \times \tau}$
$\dfrac{\Gamma,\ \phi \vdash \xi \quad \Gamma, \psi \vdash \xi}{\Gamma,\ \phi \vee \psi \vdash \xi}$	$\dfrac{\Gamma,\ x{:}\sigma \vdash \alpha{:}\rho \quad \Gamma,\ y{:}\tau \vdash \beta{:}\rho}{\Gamma, \gamma{:}\sigma+\tau \vdash (\gamma \to \lambda x.\alpha; \lambda y.\beta){:}\rho}$

$$\frac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\phi\vee\psi}\qquad\frac{\Gamma\vdash\alpha:\sigma}{\Gamma\vdash<1,\alpha>:\sigma+\tau}\qquad\frac{\Gamma\vdash\beta:\tau}{\Gamma\vdash<2,\beta>:\sigma+\tau}$$

这里的π_1和π_2通常被叫做投射函项（projection function）算子，它们分别把类型为$(\sigma\times\tau)$的λ-词项投射到它的第一个和第二个成分上。

很明显，柯里和菲斯发现的直觉主义命题逻辑中蕴涵证明和简单类型λ-演算中函项型λ-词项之间的一一对应关系与霍华德发现的合取证明与析取证明和积类型与“和”类型λ-词项的一一对应关系共同构成了柯里—霍华德同构定理（Curry-Howard isomorphism）的全部内容。

在子结构逻辑框架内，由于各种子结构逻辑都是通过在其证明系统中去掉一个或多个结构规则而得到的，所以它们可能不会象直觉主义命题逻辑那样与简单类型λ-演算中良类型λ-词项之间是一一对应的关系。例如在直觉主义命题逻辑中，如果我们去掉弱化规则，就会得到相干逻辑。相应地，在与相干逻辑证明一一对应的经过运算所得到的每一个λ-词项里，每一个变量都是被约束的，不会有不约束任何变量的空的λ-抽象式。而这种空的λ-抽象式在与直觉主义命题逻辑证明一一对应的简单类型λ-演算中是允许的，因此，如果把直觉主义命题逻辑变为相干逻辑，又不对简单类型λ-演算中的λ-词项加以限制，柯里—霍华德同构定理将不再适用。为了适应相干逻辑的情况，柯里—霍华德同构定理必须被限定为相干逻辑证明与简单类型λ-演算中不含空的λ-抽象式的λ-词项的一一对应。

类型-逻辑语法（这里指承认结合公理的兰贝克演算）由于不保留在直觉主义命题逻辑中适用的交换规则、弱化规则、减除规则中的任何一个，所以也是一种子结构逻辑。因为保留交换规则、减除规则与否并不影响简单类型λ-演算中的λ-词项，所以与类型-逻辑语法一一对应的λ-词项和相干逻辑证明的情况一样，不含空的λ-抽象式,并且是简单类型λ-演算中λ-词项的真子集。因此根据柯里—霍华德同构定理，与类型-逻辑语法一一对应的λ-词项和直觉主义命题逻辑证明并不是一一对应的关系，而只能是同态对应（homomorphism）。

类型-逻辑语法中不但包含λ-词项运算，还包含句法范畴运算。由于简单类型λ-演算中λ-词项的语义类型与类型-逻辑语法的句法范畴也有对应关系，所以，根据柯里—霍华德同构定理，类型-逻辑语法的句法范畴运算通过语义类型的中介与直觉主义命题逻辑证明也显示出结构上的相似。但是我们必须注意简单类型λ-演算中λ-词项的语义类型与类型-逻辑语法中的句法范畴并不是一一对应的，而只是同态对应，因为不同的句法范畴可以有相同的语义类型。下面举例说明。我们先设定在自然语言研究中应用得较为普遍的两个基本语义类型为：个体表达式的类型 Ind（个体“individual”的缩写）,命题表达式的类型 Bool（布尔值“Boolean Value”的缩写）。语义类型 Ind→Bool 既可以对应基本句法范畴 n（表示普通名词），也可以对应派生句法范畴 np\s(表示动词词组)；句法范畴 s/np 和 np\s 也具有相同的语义类型 Ind→Bool。因此，类型-逻辑语法中的句法范畴与简单类型λ-演算中的λ-词项也只是同态对应，进而根据柯里—霍华德同构定理可知：类型-逻辑语法中的句法范畴运算和直觉主义命题逻辑证明也是同态对应。下面试举两例：

命题逻辑证明	句法范畴运算	
$\Gamma \vdash \Phi \quad \triangle, \Psi \vdash \xi$	$\Gamma \Rightarrow B{:}\ \beta \quad \triangle, A{:}\alpha(\beta) \Rightarrow C{:}\ \gamma$	
$\Phi \rightarrow \Psi,\ \Gamma,\ \triangle \vdash \xi$	$A/B{:}\alpha, \Gamma,\ \triangle \Rightarrow C{:}\ \gamma$	(/L 模式)
$\Gamma, \Phi \vdash \xi$	$\Gamma,\ B{:}x \Rightarrow A{:}\alpha$	
$\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \xi$	$\Gamma \Rightarrow A/B{:}\ \lambda x.\alpha$	（/R 模式）

综上所述，类型-逻辑语法中的两种运算——句法范畴运算和λ-词项运算，都与直觉主义命题逻辑证明是同态对应关系。

参考文献

[1] 冯棉（1989）：《经典逻辑与直觉主义逻辑》，上海人民出版社。

[2] 邹崇理(2000)：《自然语言逻辑研究》，北京大学出版社。

[3] 邹崇理(1997)：“范畴语法和加标演绎系统”，《自然辩证法研究》1997 年增刊。

[4] Buszkowski, W, etc. Categorial Grammar. 1988

[5] Carpenter, B. Type-Logical Semantics. The MIT Press. 1997

[6] Church, A. 1940. A formulation of a simple theory of types. *Journal of Symbolic logic* 5:56-68.

[7] Heyting, A. 1956. *Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland.

[8] Howard, W. A. 1969. The formulae-as-types notion of construction. In J. R. Hindley and J. P. Seldin, editors, *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus, and Formalism*. New York: Academic Press.

[9] Kripke. S. A. 1963. Semantical analysis of intuitionistic logic, I. In J. N. Crossley and M. A. E. Dummett, editors, *Formal Systems and Recursive Functions*. Amsterdam: North-Holland.

[10] Kurtonina, N. and M. Moortgat (1997), ‘Structural Control’. In P. Blackburn and M. de Rijke (eds.) *Specifying Syntactic Structures*. CSLI, Stanford, 1997, 75-113.

[11] Lambek, J. 1958. The mathematics of sentence structure. *American Mathematical Monthly* 65:154-169.

[12] Lambek, J. 1961. On the calculus of syntactic types. In R. Jakobson, editor, *Structure of Language and Its Mathematical Aspects: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 166-178. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

[13] Moortgat, M. Categorial Investigations. Logic and Linguistic Aspects of the Lambek Calculus. Foris, Dordrecht. 1988

[14] Morrill, G. 1994. Type Logical Grammar. Dordrecht: Kluwer.

[15] Restall, G. 2000. An introduction to substructural logics. London and New York:Routledge.

[16] Van Benthem , Johan and Alice ter Meulen (eds.). Handbook of Logic and Language . Amsterdam: Elsevier Science. 1997

On the Deep Connection between Type-Logical Grammar and Logical Systems

Zhang Qiucheng

（Institute of Logic and Cognition of Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510275）

Abstract： By discussing the deep connection between Type-Logical Grammar (shortened as TLG) and logical systems, this paper reveals the deduction-based characteristic of TLG. There are two manifestations of this connection: (1) Like relevance logic, linear logic, etc., TLG also belongs to substructural logics; (2) According to the Curry-Howard isomorphism, the two computations in TLG, those of syntactic categories and λ-terms, are all homomorphic to the proofs in intuitionistic implicational logic.

Key words： substructural logics, intuitionistic propositional logic, Lambek calculus, Curry-Howard isomorphism, homomorphism