

基于 Copula 函数的资产组合动态风险度量方法

刘志东

(中央财经大学, 北京 100081)

摘要: 金融资产收益率实际分布和相关性的度量对于资产组合风险度量具有重要的意义。Markowitz 的资产组合理论采用方差 (或标准差) 度量风险和 Pearson 的线性相关反映金融资产收益的相关性存在不足。为此, 本文主要根据 Copula 函数的反映随机变量相关性方面具有的优点, 同时结合金融资产收益率分布函数的“厚尾”与非对称, 均值与方差的时变特征, 以 VaR 和 CVaR 作为计算风险的指标, 建立一种基于 Copula 函数的资产组合动态风险度量方法。最后根据中国证券市场的实际数据, 用所建立的模型进行实证研究。

关键词: 资产组合; Copula 函数; 厚尾分布; 极值相关; Value at Risk; Conditional Value at Risk; GARCH; 动态风险度

中图分类号: F224.0 **文献标识码:** A

1 引言

在 Markowitz (1952, 1959) 的均值—方差资产组合选择模型中, 风险被定义为资产组合期望收益的可能变化, 一般用方差或标准差表示。Markowitz 的资产组合理论忽略了金融市场的实证特征。用方差或标准差度量风险隐含的假设是投资者对负的损失和正的收益赋予相同的权重, 对待二者的态度是相同的。将收益的方差或标准差等同于风险只有在投资者具有二次效用函数或资产收益率呈正态分布时才是可行的。另外, Markowitz 的资产组合选择模型采用 Pearson 的线性相关系数来反映金融资产收益的相关性。Pearson 的线性相关只适用于椭圆分布, 要求金融资产风险程度适中, 只能度量随机变量之间的线性关系。由于 Pearson 的线性相关不是根据随机变量联合分布度量随机变量相关性的方法, 它具有一些缺陷, 常常导致错误的结论。在现实中, 金融资产的收益率明显具有非正态分布特征和非线性相关, 这时必须采用合理的方法度量收益率的实际分布和相关性。本文主要通过 copula 函数得到资产组合资产收益率的联合分布函数, 在此基础上研究根据 VaR 和 CVaR 度量资产组合的风险。

2 金融资产收益率的实际分布及相关性分析

在现实金融市场中, 金融资产收益率的联合分布中存在两种非对称现象。第一种非对称指单个股票收益率偏度不等于零, 具有非对称分布, 表现为“尖峰”和“厚尾”特征。第二种非对称是金融资产收益率之间相关的非对称: 这种非对称相关表现为, 在市场处于下降的趋势时 (熊市), 尤其是极端下降时, 金融资产收益率之间的相关性比正常时或上升时 (牛市) 的相关性大。最近 Ang, Chen (2001) 和 Claude, Campbell, Longin 和 Solnik (2001) 等学者的研究文献中报道了股票之间这种非对称相关现象。刘志东 (2003, 2004) 通过对中国股票收益相关性的研究, 发现中国股票收益存在尾部极值相关¹。由于存在非对称相关性和尾部极值相关, 在熊市时, 分散化投资降低资产组合风险的效果就会减弱, 资产组合的风险将会增加。Breyman, Dias 和 Embrechts (2003)、Mashal 和 Zeevi (2002) 对外汇资产和股票资产收益率的相关性研究的结果表明, 金融资产收益率在尾部具有更强的相关性, 并且这种相关性的大小与金融资产收益率的频率有关, 高频数据比低频数据

具有更强的相关性。忽略金融资产收益率的尾部相关性将会导致在市场趋于下降时过高估计资产组合分散化投资降低风险的作用。

3 Copula 函数及其在反映随机变量相关性上的优势

为了有效地度量金融资产收益的真实分布与相关性，需要多元分布函数理论。多元分布函数是描述随机变量相关性的最根本的方法。但传统的多元分布函数在实际应用中存在一些缺陷。传统的多元分布函数在变量较多时解析式很难处理，并且存在一系列约束条件，不仅要求各个边缘分布函数类型与多元分布函数类型一样，而且各个边缘分布必须完全相同。资产组合尤其是含有不同种类资产的资产组合（股票和外汇），各种金融资产边缘分布函数通常不符合同一类型的分布函数，这种情况使得多元分布函数很难在资产组合管理中得到应用。而通过Copula函数技术可以构造灵活的多元分布函数，掌握资产组合内各金融资产收益的真实分布与相关关系。

Copula一词原意是交换、连接的意思。在数学中，它是指把多个变量的联合分布与它们的边缘分布连接在一起的函数。如果 F_1, \dots, F_d 是一元分布函数， $u_i = F_i(x_i)$ ， $i=1, \dots, d$ ，则 $C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ 是具有边缘分布函数 F_1, \dots, F_d 的多元分布函数。d维Copula函数C是把多个随机变量 ζ_1, \dots, ζ_d 的联合分布与它们各自的边缘分布连接在一起的函数。Copula函数对于构造和模拟多元分布函数具有重要的意义。根据关于Copula函数最重要的Sklar定理，令F是具有边缘分布函数 F_1, \dots, F_d 的d维分布函数（不一定是同一类型），若边缘分布函数 F_1, \dots, F_d 连续，则存在一个唯一满足 $F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ 关系的连接函数C。对于多元连续分布函数，一元边缘分布函数和多元分布函数相关结构能够被分离，多元变量之间的相关结构可以用适当的Copula函数表示。Copula函数与多元分布函数一样，包含随机变量之间的所有相关信息。

4 根据 Copula 构建反映金融资产收益率实际分布和相关性的联合分布函数

在通过 Copula 函数技术构造多元分布函数时需要两个步骤：第一，构建各个变量的边缘分布函数；第二，选择合适的 Copula 函数。下面是根据 Copula 构建反映金融资产收益率实际分布和相关性联合分布函数的具体步骤。

4.1 资产组合中各资产收益率随机扰动项边缘分布函数的构建

通常情况下，金融资产收益率不服从正态分布，呈现出一定的“尖峰”和“厚尾”特征。极值理论可以直接研究金融资产收益率分布的上下尾部，能够描述金融资产收益率的“厚尾”特征，但它忽略了金融资产收益率分布是时变的，假设资产收益率是独立同分布的。ARMA和GARCH模型虽然可以描述时间序列的条件均值和条件方差，但其假设随机扰动项服从正态分布和t分布，并关注整个分布，而不是直接对风险管理所关心分布的尾部进行建模。

由于金融资产收益率一般呈非对称分布，具有“杠杆效应”。正态分布和t分布假设与此特征不符，不能预测金融资产收益率的极端变化情况。McNeil(1999)、McNeil 和Frey (2000)、Byström Diebold et al. (1999)、封建强 (2002) 等学者探讨了把极值理论和GARCH进行组合的可能性。本文在遵循上述学者的研究思路基础上，把POT极值理论和ARMA、GARCH模型进行适当的组合。文献研究表明，可以用AR(1) 度量金融资产收益率的条件均值，GARCH(1,1) 度量金融资产收益率的条件方差。

对于金融资产 i ， $i=1, \dots, d$ ，直接根据最近n期历史收益率数据 $(R_{i,t-n+1}, \dots, R_{i,t-1}, R_{i,t})$ 运用AR(1)

和GARCH(1,1)模型建模，在采用伪极大似然（QML）方法估计出模型参数基础上，可以得到最近n期的条件均值 $(\hat{\mu}_{i,t-n+1}, \dots, \hat{\mu}_{i,t-1}, \hat{\mu}_{i,t})$ 和条件方差 $(\hat{\sigma}_{i,t-n+1}, \dots, \hat{\sigma}_{i,t-1}, \hat{\sigma}_{i,t})$ 。最近n期的随机扰动项序列Z为：

$$(Z_{i,t-n+1}, \dots, Z_{i,t}) = \left(\frac{R_{i,t-n+1} - \hat{\mu}_{i,t-n+1}}{\hat{\sigma}_{i,t-n+1}}, \dots, \frac{R_{i,t} - \hat{\mu}_{i,t}}{\hat{\sigma}_{i,t}} \right) \quad (1)$$

通常随机扰动项Z满足独立同分布，但并不一定是正态分布或t分布的假设条件。因此，可以采用一元极值理论中的GPD（帕累托）分布函数对随机扰动项Z的上下尾部分布分别进行建模。由于极值分布只描述样本的上下尾部分布，用到的很小一部分样本信息，为了使所有样本反映的信息得到充分的运用，对于在处于上下尾部阈值之间的随机扰动项Z，采用正态分布（或经验分布）方法估计分布函数。这样资产组合中每种金融资产收益率随机扰动项Z的边缘分布为：

$$F_i(Z_i) = \begin{cases} \frac{N_{u_i}^L}{N} \left(1 + \zeta_i^L \frac{|Z_i - u_i^L|}{\beta_i^L} \right) & Z_i < u_i^L \\ \Phi_i(x) & u_i^L \leq Z_i \leq u_i^R \quad i=1, \dots, d \\ 1 - \frac{N_{u_i}^R}{N} \left(1 + \zeta_i^L \frac{(Z_i - u_i^R)}{\beta_i^L} \right) & Z_i \geq u_i^R \end{cases} \quad (2)$$

其中， $\Phi_i(x)$ 为标准正态分布函数。 u_i^R 、 u_i^L 分别表示随机扰动项 Z_i 的上下尾部阈值。 N 表示随机扰动项 Z_i 的样本数。 $N_{u_i}^R$ 表示高于上尾部阈值 u_i^R 的随机扰动项个数， $N_{u_i}^L$ 表示低于下尾部阈值 u_i^L 的随机扰动项个数。

在运用广义帕累托分布极值理论时，样本阈值u的选取至关重要。如果u选取的太大，超过u的样本数会很少，参数估计的误差较大。如果u选取的太小，极值理论的条件不成立，导致参数估计是有偏的。本文实证研究发现，u选取范围是使大于上尾部阈值或小于下尾部阈值的样本的数量占样本总数的8-10%左右。有关u选取的文章参见Neftci(2000)、Danielsson et al.(2001)、Matthys, Beirlant(2000)。

以上这种分段求分布函数的方法，既能通过极值分布考虑到样本分布的厚尾特性，又能通过正态分布使处于上下尾部之间的样本数据得到充分的运用，反映真实的信息。在此特别指出的是：马超群等(2001)、Liu(2001, 2002)、Di Clemente(2002, 2003)在计算VaR时，也采用分段求分布函数的方法，但均存在一定的不足。通常金融资产收益率原始序列不符合独立分布的假设条件，马超群等(2001)、Liu(2001, 2002)直接运用极值理论对原始数据建模与极值理论关于极值是独立分布的假设不符。Di Clemente(2002)假设收益率的均值为零，取权重衰减因子 λ 等于0.94，采用EWMA（指数移动平均）模拟资产收益率的方差方法也不合理。

4.2 选择合适的Copula函数度量金融资产收益的相关性

根据以上对现实金融资产收益率相关性的分析，本文准备采用Copula来度量资产组合资产收益率的相关性。Copulas函数的类型很多，总体可以分为椭圆类分布函数连接函数和阿基米德连接函数（Archimedean copulas），而每一类又分为许多具体的连接函数。在资产组合风险管理中，选择那一种连接函数要考虑到两方面的影响因素。第一：看这种Copula函数的特征是否与现实金融市场

中金融资产收益率之间的相关性相符合。第二；看这种 Copula 函数在实际应用中的可行性，是否存在计算技术上的难题。

在现实的金融市场中，各种金融资产的收益率并不符合正态分布的假设条件，通常表现为“尖峰”和“厚尾”的特征。与此同时，各种金融资产的收益率之间也不符合多元正态分布的假设，呈现出尾部极值相关性。符合此特征的分布函数主要有 t-Copula 连接函数和阿基米德连接函数中的 Clayton 类连接函数。在 Clayton 类连接函数中，一般的 Clayton 连接函数只能度量单侧极值相关，只有 Joe-Clayton 连接函数在分布的上下尾部均具有相关性，而且这种相关性是非对称的。从理论上讲它比 t-Copula 连接函数更完美。Patton(2001, 20002)用 Joe-Clayton 连接函数对外汇资产风险进行的研究，证明了其良好的特性。但是目前 Joe-Clayton 连接函数只能是限于二维的情况，在维数增加时，其计算任务是复杂和繁琐的，实际中很难运用。因此，综合考虑到以上两种约束条件，本论文只研究用高斯连接函数、t-Copula 连接函数度量金融资产收益的相关性。t 连接函数能够反映尾部相关性，而高斯连接函数不等反映尾部相关性。当自由度 $\nu \rightarrow \infty$ ，除非在 $\rho = 1$ ，否则尾部相关系数将变为零，此时，t 连接函数与 Gauss 连接函数相同。因此，t 连接函数比 Gauss 连接函数应用更广泛。

4.3 Copula 函数参数估计

通常采用极大似然估计 (ML) 方法估计 Copula 函数的参数。高斯连接函数中的参数是相关系数矩阵 R，t-Copula 函数的参数包括相关系数矩阵 R 和自由度 ν 。对于 t-Copula 函数理想的参数估计方法应该是根据 EML (exact likelihood method) 对相关系数矩阵 R 和自由度 ν 进行同时估计。但这种同时估计几个参数的方法在计算上相当困难。为此，Bouye (2000) 和 Romano (2002b) 给出了以下相关系数矩阵 R 的 IFM (inference function for marginal) 估计方法。其算法如下：

(1) 把原始数据转化成符合高斯分布的数据。

首先通过经验分布或边缘分布函数把金融资产收益率转化成符合 [0, 1] 均匀分布的数据，然后通过标准正态分布的反函数，把这些 [0, 1] 均匀分布的数据转化成符合高斯分布的数据。

$$\zeta_t = (\Phi^{-1}(u_1^t), \dots, \Phi^{-1}(u_n^t), \dots, \Phi^{-1}(u_N^t)) \quad (3)$$

(2) 根据转化的高斯分布数据，相关系数矩阵 R 的 CML 估计为：

$$\hat{R}_{IFM} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t' \zeta_t \quad (4)$$

对于 t-Copula 函数，R 可以通过以下几个步骤估计。

(1) 令 R_0 是通过上面方法得出的高斯连接函数相关系数矩阵 R。

(2) 通过下面的方程计算 \hat{R}_{m+1} 。

$$\hat{R}_{m+1} = \frac{1}{T} \left(\frac{\nu+n}{\nu} \right) \cdot \sum_{t=1}^T \frac{\zeta_t' \zeta_t}{1 + \frac{1}{\nu} \zeta_t' \hat{R}_m^{-1} \zeta_t}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

这里 $\zeta_t = (t_\nu^{-1}(\hat{\mu}_1^t), \dots, t_\nu^{-1}(\hat{\mu}_n^t))$ 。

(3) 重复上述计算过程直到 $\hat{R}_{m+1} = \hat{R}_m$ 。此时 t-Copula 函数参数 R 的 IFM 估计为 $\hat{R}_{IFM} = \hat{R}_\infty$ 。

以上循环计算相关系数矩阵 R 的方法容易理解，但是其计算任务繁重，并且在 R^{-1} 接近奇异矩阵时，模拟的数据缺乏稳定性。另外根据前面的分析，传统的线性相关也存在一些缺陷。为此必须采用一种新的方法估计相关系数矩阵 R 。Lindskog(2000,2001)证明对于“厚尾”分布的数据，传统的线性相关估计方法缺乏稳定性，并建议用 Kendall 的 τ 相关系数矩阵估计线性相关矩阵 R 。对于椭圆分布有：

$$R = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau\right) \quad (6)$$

根据本文实证的经验，用这种方法计算得到的相关系数矩阵 R 与 Bouye (2000) 通过循环计算得到的相关系数矩阵 R 基本相等。这种方法的优点是基于秩相关，克服了传统的线性相关的不足，在估计矩阵 R 时不涉及到自由度的信息。在估计出 R 以后，在采用极大似然方法估计自由度 ν 。整个算法如下：

(1) 用经验分布或上面的边缘分布函数对金融资产收益率的随机扰动项进行概率转化²。

$$F(Z_{ij}) = u_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, d \quad (7)$$

(2) 根据 $R = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau\right)$ ，利用 Kendall 的 τ 来估计随机扰动项的相关系数矩阵 \hat{R} 。

$$\hat{R}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \hat{\tau}_{ij}\right) \quad (8)$$

(3) 运用极大似然方法，估计自由度参数 ν 。

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in (2, \infty]} \left[\sum_{i=1}^n \log(c(\hat{U}_i; \nu, \hat{R})) \right] \quad (9)$$

其中：

$$\hat{U}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{id}) ;$$

$$c(u_1, u_2, \dots, u_d; R; \nu) = |R|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\nu+d)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \right)^d \frac{(1 + \frac{1}{\nu} \zeta' R^{-1} \zeta)^{-\frac{\nu+N}{2}}}{\prod_{j=1}^d (1 + \frac{\zeta_j^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}} ;$$

$$\zeta = (T_\nu^{-1}(u_1), \dots, T_\nu^{-1}(u_d))。$$

5 用蒙特卡落方法模拟资产组合资产的收益率

首先根据 Embrechts(2001)关于利用高斯 Copula 函数和 t-Copula 函数模拟随机变量的方法，多次模拟资产组合资产收益率的随机扰动项。

(1) 基于高斯 Copula 函数的随机扰动项模拟方法

计算随机扰动项的相关系数矩阵 R 的 Cholesky 分解矩阵 A 。如果相关系数矩阵 R 是正定的，则存在 $d \times d$ 矩阵，使得 $R = AA^T$ 。

根据标准正态分布，模拟 d 个分量相互独立的随机向量 $y = (y_1, \dots, y_d)^T$ 。

令 $x = Ay$ 。

令 $u_i = \varphi(x_i), i = 1, \dots, d$, 则 $(u_1, \dots, u_d) \sim C_{R,}^{Ga}$ 。

根据 $(Z_1, \dots, Z_d) = (F_1^{-1}(u_1), \dots, F_N^{-1}(u_d))$, 得到联合分布为 $F(Z_1, \dots, Z_d)$, 连接函数为 $C_{R,}^{Ga}$ 的 d 维随机扰动项 (Z_1, \dots, Z_d) 。

(2) 基于 t-Copula 函数的随机扰动项模拟方法

为了模拟基于 t 分布连接函数的随机向量 , 可以采用以下计算程序 :

计算随机扰动项的相关系数矩阵 R 的 Cholesky 分解矩阵 A 。如果 R 是正定的 , 则存在 $n \times n$ 矩阵 , 使得 $R = AA^T$ 。

根据标准正态分布 , 模拟 d 个相互独立的随机变量 $y = (y_1, \dots, y_d)^T$

根据 χ_v^2 分布 , 模拟独立于 y 的随机变量 s 。

$$\text{令 } w = Ay \text{ , } X = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{s}} w \text{。}$$

令 $u_i = t_v(x_i)$, $i = 1, \dots, d$, 则 $(u_1, \dots, u_d) \sim C_{v,R}^t$

根据 $(Z_1, \dots, Z_d) = (F_1^{-1}(u_1), \dots, F_N^{-1}(u_d))$, 得到联合分布为 $F(Z_1, \dots, Z_d)$, 连接函数为 $C_{v,R}^t$ 的 d 维随机扰动项 (Z_1, \dots, Z_d) 。

(3) 资产组合资产收益率的模拟

在 (1) (2) 的基础上 , 根据金融资产收益率的随机波动方程 $R_{i,t} = \mu_{i,t} + \sigma_{i,t} Z_i$, $i = 1, \dots, d$ 。用 AR (1) 模型模拟金融资产收益率的条件均值 $\mu_{i,t}$, $i = 1, \dots, d$; 用 GARCH (1, 1) 模拟金融资产收益率的条件方差 $\sigma_{i,t}$, $i = 1, \dots, d$ 。于是得到资产组合资产的收益率向量 $(R_{1,t}, \dots, R_{d,t})$ 。

6 计算资产组合的风险

在时期 t , 以上 4 中的蒙特卡落方法对资产组合资产的收益率向量进行多次重复模拟 , 这样可以得到不同情景下的资产组合资产收益率 , 从而可以计算出资产组合在 $t+1$ 时期的 VaR 和 CVaR。则资产组合的 $VaR_{1-\alpha}$ 、 $CVaR_{1-\alpha}$ 分别为 :

$$VaR_{1-\alpha}(x) = -\inf\{x \mid P[\tilde{r}_p(x, r) < x] > \alpha\} \quad (10)$$

$$CVaR_{1-\alpha}(x) = E\left[-\tilde{r}_p(x, r) \mid -\tilde{r}_p(x, r) \geq VaR_{1-\alpha}(X)\right]$$

$$= VaR_{1-\alpha}(X) + \frac{1}{\alpha} \int [-\tilde{r}(x, r) - VaR_{1-\alpha}]^+ p(y) dy \quad (11)$$

对于离散分布， $CVaR_{1-\alpha}$ 可以用以下公式表示。

$$CVaR_{1-\alpha}(x) = VaR_{1-\alpha}(x) + \frac{1}{\alpha \cdot S} \sum_{k=1}^S [-r(x, r_k) - VaR_{1-\alpha}(x)]^+ \quad (12)$$

$$\delta_p = \sqrt{E[(\tilde{r}(x, \tilde{r}) - E(\tilde{r}(x, \tilde{r})))^2]} \quad (13)$$

7 实证研究：Copula 函数在我国证券资产组合风险度量中的应用

7.1 资产组合的设计与数据的说明

在本文，我们将利用中国证券市场的实际数据对本文的资产组合风险度量模型进行验证。根据一些学者研究的结果和经验，在中国股票市场的发展中，大盘股与小盘股所表现出来的风险和收益特性不同。因此我们构建 A、B 两组资产组合，在构建资产组合时，考虑的影响因素是各只股票上市的时间和流通股本的大小。A 组资产组合的流通股本相对较小，B 组资产组合流通股本相对较大。根据顾岚等学者对中国资产组合规模的研究结果，资产组合规模在 5-10 之间比较好。本文 A、B 资产组合各由 10 只股票组成³。为了使资产组合内各只股票的时间具有可比性，资产组合 A 中各只股票样本期为 1994 年 2 月 1 日—2001 年 12 月 31 日。资产组合 B 中各只股票样本期为 1994 年 3 月 14 日—2001 年 12 月 31 日。

7.2 计算过程的描述

为了对各种资产组合风险度量模型的实际效果进行比较，分别采用下列几种方法计算资产组合的 VaR 和 CVaR。

(1) 用 RiskMetrics 的条件正态分布模型计算资产组合的 VaR 和 CVaR。

RiskMetrics 的条件正态分布模型首先也是对组合资产的收益率进行模拟，然后在计算资产组合的 VaR 和 CVaR。RiskMetrics 的条件正态分布模型采用下面的方法模拟组合资产的收益率。

RiskMetrics 的条件正态分布模型假设资产组合中各种金融资产收益率服从条件正态分布 $N(\mu_{t+1}, \Sigma_{t+1})$ ，采用指数移动平均方法 (EWMA) 计算方差和协方差矩阵 $\Sigma_{t+1}, \Sigma_{t+1} = (\sigma_{ij,t+1})$ 。

$$\sigma_{i,t+1|t}^2 = (1-\lambda) \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^{\tau-1} r_{i,t-\tau}^2, \quad i=1, \dots, d \quad (14)$$

$$\sigma_{ij,t+1|t}^2 = (1-\lambda) \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^{\tau-1} r_{i,t-\tau} r_{j,t-\tau}, \quad i, j=1, \dots, d \quad (15)$$

根据 Σ_{t+1} 得到相关系数矩阵 R_{t+1} ⁴，并计算金融资产收益率相关系数矩阵 R_{t+1} 的 Cholesky 分解矩阵 A。如果相关系数矩阵 R_{t+1} 是正定的，则存在 $d \times d$ 矩阵，使得 $R_{t+1} = AA^T$ 。

根据标准正态分布，模拟 d 个分量相互独立的随机向量 $y = (y_1, \dots, y_d)^T$ 。

令 $x = Ay$ 。

$$\text{令 } (R_{1,t+1}, \dots, R_{d,t+1}) = (x_1 \cdot \sigma_{1,t+1}, \dots, x_d \cdot \sigma_{d,t+1})。$$

在时期 t ，根据上述算法的 对资产组合资产的收益率向量进行多次重复模拟，这样可以得到不同情景下的资产组合资产收益率，计算出资产组合在 $t+1$ 时期的 VaR 和 CVaR。

(2) 假设随机扰动项服从正态分布，然后根据高斯分布连接函数对资产组合各金融资产收益率的随机扰动项进行多次模拟。用 AR (1) 模型模拟金融资产收益率的条件均值 $\mu_{i,t}$ ， $i=1, \dots, d$ 。用 GARCH (1, 1) 模拟金融资产收益率的条件方差 $\sigma_{i,t}$ ， $i=1, \dots, d$ 。然后根据随机波动方程 $R_{i,t} = \mu_{i,t} + \sigma_{i,t} Z_i$ ， $i=1, \dots, d$ ，得到不同情景下资产组合资产收益率向量 $(R_{1,t}, \dots, R_{d,t})$ 。

(3) 假设随机扰动项尾部服从极值分布 (本文前面建立的边缘分布)，然后根据高斯分布连接函数对资产组合中各金融资产收益率的随机扰动项进行模拟。用 AR (1) 模型模拟金融资产收益率的条件均值 $\mu_{i,t}$ ， $i=1, \dots, d$ 。用 GARCH (1, 1) 模拟金融资产收益率的条件方差 $\sigma_{i,t}$ ， $i=1, \dots, d$ 。然后根据随机波动方程 $R_{i,t} = \mu_{i,t} + \sigma_{i,t} Z_i$ ， $i=1, \dots, d$ ，得到不同情景下资产组合资产收益率向量 $(R_{1,t}, \dots, R_{d,t})$ 。

(4) 假设随机扰动项尾部服从极值分布 (本文前面建立的边缘分布)，然后根据 t 分布连接函数对资产组合中各资产收益率的随机扰动项进行模拟。用 AR (1) 模型模拟金融资产收益率的条件均值 $\mu_{i,t}$ ， $i=1, \dots, d$ 。用 GARCH (1, 1) 模拟金融资产收益率的条件方差 $\sigma_{i,t}$ ， $i=1, \dots, d$ 。然后根据随机波动方程 $R_{i,t} = \mu_{i,t} + \sigma_{i,t} Z_i$ ， $i=1, \dots, d$ ，得到不同情景下资产组合资产收益率向量 $(R_{1,t}, \dots, R_{d,t})$ 。

在实证分析中，可以把 (1) 中 RiskMetrics 风险度量方法作为基准，用 (2) (3) (4) 的方法和其比较。由于第 (2) 种方法和第 (3) 种方法连接函数相同，只是边缘分布函数不同，通过第 (2) 种方法和第 (3) 种方法对比可以检验不同的 GARCH 模型对资产组合风险度量的影响。第 (3) 种方法和第 (4) 种方法的边缘分布函数相同，只是连接函数不同，通过第 (3) 种方法和第 (4) 种方法对比可以检验不同的 Copula 函数对资产组合风险度量的影响。

对于以上 (1) (2) (3) (4) 模型，本文简称为：RiskMetrics 条件正态分布模型、Gauss-Copula+正态 Garch 模型、Gauss-Copula+Garch-EVT 模型、t-Copula+Garch-EVT 模型表示。在不影响实证分析的前提下，为了计算的方便，假设在资产组合中对各只股票投资的权重相等。在时间 t 时，资产组合的市场价值为：

$$P_t = \sum_{i=1}^d P_{i,t} \quad (16)$$

这里 $d = 10$ ， $P_{i,t}$ 为各只股票的每日收盘价格。

假设在 t 时刻，分别采用上述方法对每只股票在 $[t, t+1]$ 时期的对数收益率 $R_{ij,t+1}$ ($i = 1, \dots, 10$, $j = 1, \dots, 15000$) 模拟 15000 次。根据模拟的对数收益率，计算 $t+1$ 时刻各种情景下的资产组合市场价值。

$$P_{j,t+1} = \sum_{i=1}^d P_{i,t} \exp(R_{ij,t+1}), j = 1, \dots, 15000 \quad (17)$$

每一种情景下资产组合的价值损失为：

$$L_j = P_t - P_{j,t+1} = \sum_{i=1}^d [P_{i,t} - P_{i,t} \exp(R_{ij,t+1})] = \sum_{i=1}^d P_{i,t} (1 - \exp(R_{ij,t+1})), j = 1, \dots, 15000 \quad (18)$$

因此，可以得到资产组合价值损益的分布，计算各种置信水平下的 VaR 和 CVaR。

7.3 资产组合风险的计算

(1) 随机扰动项的 kendall 相关系数矩阵

分别计算资产组合 A 和资产组合 B 各股票收益率随机扰动项的 kendall 相关系数矩阵。由于篇幅有限，这里对计算出的关 kendall 相关系数矩阵省略。

(2) t-Copula 函数自由度的计算

对于资产组合 A 和资产组合 B，分别计算 t-Copula 连接函数的自由度，检验资产组合内金融资产收益率是否具有尾部极值相关性。如果自由度很小，说明金融资产收益率具有尾部极值相关性，采用 t-Copula 函数计算资产组合风险。当自由度很大时（大于 100 时），说明金融资产收益率不具有尾部极值相关性，采用 Gauss-Copula 函数计算资产组合风险。

表 1 表示根据 (9) 式计算的 A、B 资产组合内资产收益率随机扰动项的 t-Copula 函数极大似然估计值与自由度 ν 之间的关系。从表中数据可知资产组合 A 的自由度为无穷大，资产组合 B 的自由度为 12。说明 Gauss-Copula 函数适合资产组合 A，t-Copula 函数适合资产组合 B。

表 1 资产组合 A、B：t-Copula 函数极大似然估计值与自由度 ν 之间的关系

自由度	3	10	12	17	24	31	38	50	100
资产组合 A	-19189	-8993	-8301	-7301	-6619	-6257	-6035	-5808	正无穷大
资产组合 B	-39659	-31361	-31274	-31668	-32649	-33665	-34601	-35982	负无穷大

(3) 资产组合中各资产收益率随机扰动项尾部极值分布的参数估计

根据极值分布参数估计的极大似然估计方法，对资产组合 A、B 中各种资产收益率随机扰动项极值分布的参数估计值。由于篇幅限制这里对计算结果省略。

(4) 资产组合风险的计算

随着置信水平的增加，每一种模型计算的组合 VaR 和 CVaR 值也逐渐增大。另外，在实际计算中发现，在同一置信水平，对于相同的风险度量模型，A 组资产组合的 VaR 和 CVaR 要大于 B 组资

产组合相对应的 VaR 和 CVaR，这说明 A 组资产组合风险较 B 组资产组合风险大。这与业界所说的小盘股票具有较大风险说法相吻合。当然，这与 A 组资产组合的资产收益率不存在尾部相关，B 组资产组合的资产收益率存在尾部极值相关并不矛盾。

7.4 模型的准确性检验——运用返回测试检验模型的实际效果

为了能够对本文的资产组合风险度量模型进行评价，分别在 97.5%、99%和 99.5%置信水平下，采用 RiskMetrics 条件正态分布模型、Gauss-Copula+正态 GARCH 模型、Gauss-Copula+GARCH-EVT 模型和 t-Copula+GARCH-EVT 模型，计算资产组合在未来一期的价值损失 VaR，并采用返回测试评价不同资产组合风险度量模型的实际预测效果。返回测试的时间为：A 组合从第 512 期观测值（1998 年 2 月 12 日）开始，直到 2001 年 12 月 31 日，总共 1400 期；B 组合从第 535 期（1996 年 5 月 2 日）开始，直到 2001 年 12 月 31 日，总共 1400 期。每次返回测试根据最近的 512（A 组合）、535（B 组合）期历史数据，对下一天资产组合价值损益的 VaR 进行滚动预测。对每期预测的 VaR 与该期资产组合价值实际发生的损失进行比较，记录实际的损失大于 VaR 预测值的次数，即风险度量模型预测失败的次数。由于在返回测试中，需要对模型的参数进行多次估计计算资产组合的风险，计算量非常大。为此，本文采用 MATLAB6.5 编程实现了上述算法。由于篇幅有限，本文正文只给出了 A 资产组合和 B 返回测试的结果统计（表 2），以及在 97.5%置信水平时的 VaR 的返回测试曲线图（图 1、图 2）。由于本文采用负的对数收益率，所以图中正值代表损失。

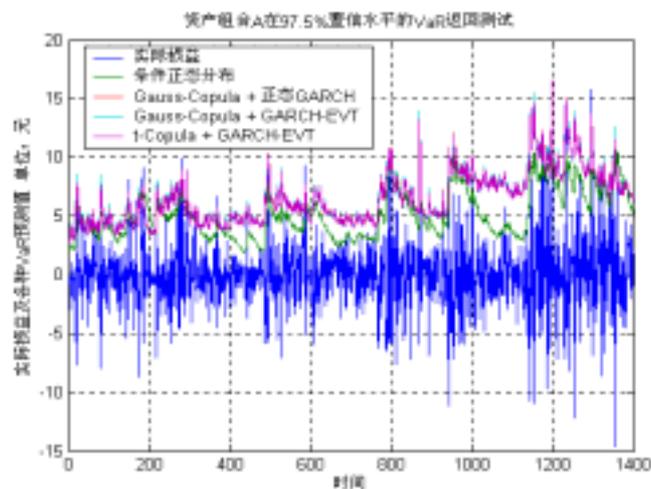


图 1 资产组合 A 在 97.5%置信水平下的 VaR 返回测试

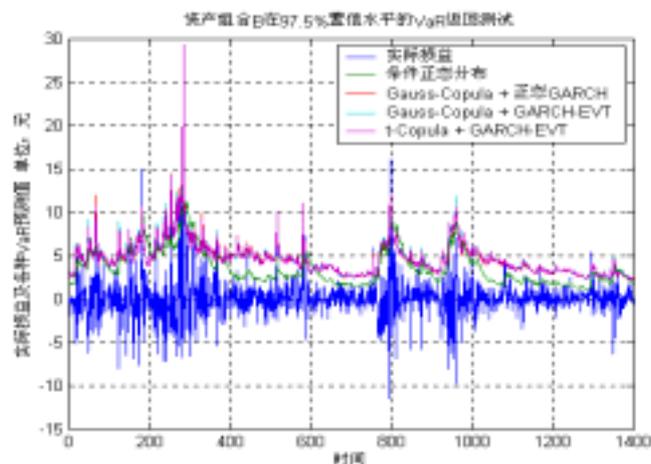


图 2 资产组合 B 在 97.5%置信水平下的 VaR 返回测试

表 2 资产组合风险度量模型的 VaR 返回测试结果 (1400 次)

模 型	测试结果	资产组合 A			资产组合 B		
		置信水平%			置信水平%		
		97.50	99.00	99.50	97.50	99.00	99.50
RiskMetrics	VaR 失败次数	36	15	9	55	38	26
条件正态分布	失败次数所占的比率%	2.57	1.07	0.64	3.93	2.71	1.86
Gauss-Copula +	VaR 失败次数	14	7	0	21	6	4
正态 GARCH	失败次数所占的比率%	1	0.5	0	1.5	0.43	0.29
Gauss-Copula +	VaR 失败次数	11	4	0	16	3	2
GARCH-EVT	失败次数所占的比率%	0.79	0.29	0	1.14	0.21	0.14
t-Copula +	VaR 失败次数	11	1	0	12	2	1
GARCH-EVT	失败次数所占的比率%	0.79	0.07	0	0.86	0.14	0.07

7.5 实证结果分析

从以上实证的结果可以得到以下几个结论：

(1) RiskMetrics 条件正态分布模型对资产组合 A、B 风险预测失败次数的比率均大于相应置信水平下的概率，说明条件正态分布模型低估了 A、B 资产组合的风险。

(2) 与 RiskMetric 条件正态模型相比，基于 Gauss-Copula + 正态 GARCH 的资产组合风险度量模型对风险预测失败次数的比率均小于相应置信水平下的概率，这表明 Gauss-Copula + 正态 GARCH 风险度量模型比 RiskMetrics 条件正态风险度量模型要精确。这是因为 GARCH 模型比 EWMA 方法更能反映金融资产收益率的动态变化特征，能部分解释金融资产收益率的厚尾性分布。

(3) 与 Gauss-Copula + 正态 GARCH 模型相比，Gauss-Copula + GARCH-EVT 资产组合风险度量模型对风险预测失败的比率均低于 Gauss-Copula + 正态 GARCH 模型对风险预测失败的比率。这是由于 Gauss-Copula + GARCH-EVT 模型度量了金融资产收益率的厚尾分布，采用了更符合各只股票实际的边缘分布。表明在 Copula 函数相同时，边缘分布的类型会影响到资产组合风险度量的效果。

(4) 与 Gauss-Copula + GARCH-EVT 模型相比，t-Copula + GARCH-EVT 资产组合风险度量模型对风险预测失败的比率均低于 Gauss-Copula + GARCH-EVT 模型对风险预测失败的比率。这是由于 t-Copula 函数比 Gauss-Copula 函数更能反映资产组合内各种金融资产的相关关系。

因此，本文实证表明，基于 Copula 函数的资产组合风险度量方法较 J P 的 RiskMetrics 基于条件正态分布的风险度量方法要精确。其中，基于 t-Copula 函数和 EVT-GARCH 的资产组合风险度量方法最精确。

8 结 论

本文首先对 Copula 函数的有关定理和性质进行了研究，指出 Copula 函数在构建多元分布函数方面以及度量随机变量相关性上的优势。然后根据现实金融资产收益相关性的实际特征，发现在金融市场中，资产组合内资产收益存在非对称相关与尾部极值相关。由于度量这种相关性对于风险管理中具有重要的意义，本文综合考虑各种 Copula 函数的特征和计算上约束条件，采用 t-Copula 函数度量金融资产收益的尾部极值相关。在此基础上，建立了基于 t-Copula 和 Gauss-Copula 函数的资产组合风险度量模型。最后通过实证研究证明本文基于 Copula 函数的资产组合风险度量模型较 J P 的 RiskMetrics 基于条件正态分布的风险度量模型要精确。其中，t-Copula 函数+EVT-GARCH 的资产组合风险度量模型的最精确，效率最高。这些表明如何度量资产收益率的实际分布和相关性对

于资产组合风险度量有明显的影响。

参考文献

- [1] Markowitz, H.. Portfolio selection [J]. Journal of Finance, 1952,(7): 71-93.
- [2] Markowitz, H.. Portfolio selection: Efficient Diversification of Investment [J]. New York: John Wiley&sons, 1959.
- [3] Ang, A., and Chen, J.. Asymmetric correlation of equity portfolio [J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63(3): 443-494.
- [4] Erb, Claude B., Harvey, Campbell R., and Viskanta, Tadas E.. Forecasting international equity correlation [J]. Financial Analysis Journal, 1994, 50:32-45.
- [5] Login, F., and Solnik, B.. Extreme correlation of international equity markets [J]. Journal of Finance, 2001, 56(2): 649-676.
- [6] Zhidong L. A Study of Portfolio selection and risk measurement [J]. A paper submitted to China University of Mining and Technology for PhD degree, 2003.
- [7] 刘志东. Copula 函数与金融资产收益的相关性研究 [C]. 中央财经大学工作论文,2004.
- [8] Breymann, W., Dias A., and Embrechts P.. Dependence structure for multivariate high-frequency data in finance [C]. Working paper, Department of Mathematics, ETH Zurich, 2003.
- [9] Mashal, R. and Zeevi A.. Comparing the dependence structure of equity and asset returns [C]. Working paper, Columbia University, New York, 2002.
- [10] Mashal, R. and Zeevi A.. Beyond correlation: extreme co-movements between financial assets [C]. Working paper, Columbia University, New York, 2002.
- [11] Sklar, A.. Random variables, distribution function, and copulas-a personal look backward and forward [A]. In Distribution with Fixed Marginal and Related Topics [C], edited by L. Riischendorff, B.Schweizer, and M.Taylor, pp, 1-14.Institute of Mathematical Statistics, Harvard, CA, 1996.
- [12] 朱国庆, 张维, 程博. 关于上海股市收益厚尾性的实证研究 [J].系统工程理论与实践, 2001, (4):70-75.
- [13] Harris R.D.F., Küçüközmen. Liner and nonlinear dependence in Turkish equity returns and its consequence for financial risk management [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134:481-482.
- [14] 李亚静, 朱宏泉. 沪深股市收益率分布的时变性 [J].数学的实践与认识, 2003, 32(2): 228-233.
- [15] Black, F.. Studies of stock market volatility changes [A]. Proceeding of the American Statistical Association . Business and Economic Statistics Sectio , 1976:177-181.
- [16] Campbell, J.Y. and Hentschel, L.. No News is Good news:An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns [J]. Journal of Financial Economics, 1992, 31(6): 281-318.
- [17] 陈学华, 杨辉耀. VaR-APARCH 模型与证券投资风险量化分析 [J].中国管理科学, 2003, 11(1): 2-27.
- [18] 王玉荣. 中国股票市场波动性研究—ARCH 模型族的应用 [J].河南管理干部学院学报, 2002, 107(5):36-37.
- [19] McNeil, A.J.. Extreme value for risk managers [J]. ETH Zurich Department of Mathematics, preprint, 1999.
- [20] McNeil, A.J. and Frey. R.. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach [J]. Journal of Empirical Finance, 2000, (7): 271-300.

- [21] Diebold, F., Schuermann, T., and Strouhair J.. Pitfalls and opportunities in the use of extreme value theory in risk management [J]. *Journal of Risk Finance*, 2000, 1(Winter): 30-36.
- [22] Byström, H.NE. Management extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory [J]. Department of Economics, Lund University, 2001.
- [23] 封建强. 沪、深股市收益率风险的极值 VaR 测度研究 [J]. *统计研究*, 2002, (4): 34-38.
- [24] Box G.E.P, Jenkins G., M 顾岚译. 时间序列分析预测与控制 [M]. 中国统计出版社, 1997.
- [25] 顾岚. 时间序列分析在经济分析中的应用 [M]. 中国统计出版社, 1994.
- [26] 罗伯特 S . 平狄克, 丹尼尔 L . , 鲁宾费尔德. 计量经济模型与经济预测 [M]. 机械工业出版社, 1999.
- [27] Neftci, S.. Value-at-risk calculations, extreme events, and tail estimation [J]. *Journal of Derivatives* 2000, spring: 23–38.
- [28] Danielsson, J., de Haan, L., Peng, L. and De Vries, C.G.. Using bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation [J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2001, 76:226-248.
- [29] Mattys, G., Beirlant, J.. Adaptive threshold selection in the tail index estimation: In: Embrechts, P. (Ed), *Extremes and Integrated Risk Management*, Risk book in association with UBS Warburg, 2000: 3-19.
- [30] 马超群, 李红权, 徐山鹰, 杨晓光, 李晖. 风险价值的完全参数方法及其在金融市场风险管理中的应用 [J]. *系统工程理论与实践*, 2001, (4): 74-90.
- [31] 马超群, 李红权, 张银旗. 风险价值方法在金融风险度量中的应用 [J]. *预测*, 2001, 20(2): 34-37.
- [32] Liu, W.H., Miller, D.. *Portfolio value at Risk—Modeling, estimation, and implications* [J]. West Lafayette, Indiana, USA: Purdue University, 2002.
- [33] Liu, W.H., Miller, D.. *Optimal hedging in an emerging market with a copula model of heavy-tailed log-returns* [J]. West Lafayette, Indiana, USA: Purdue University, 2001.
- [34] Di Clemente, A. and Romano, C.. *Measure and optimization portfolio credit risk: a copula approach* [C]. Working paper, Department of Economic Theory and Quantitative Methods for the Political Choices, University of Rome, 2003b.
- [35] Di Clemente, A. and Romano, C.. *Measuring portfolio value-at-risk by a copula-evt based approach* [C]. Working paper, Department of Economic Theory and Quantitative Methods for the Political Choices, University of Rome, 2003.
- [36] Durrleman, V., Nikeghbali, A. and Roncalli, T.. *Which copula is the right ones?* [C]. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, and Crédit Lyonnais, 2000.
- [37] Patton, Andrew J. *Skewness, asymmetric dependence and portfolios* [J]. Working paper, Department of Economics, University of California, San Diego, 2002.
- [38] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. and Roncalli, T.. *Copulas for Finance – a reading guide and some applications* [C]. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, and Crédit Lyonnais, 2000.
- [39] Romano, C.. *Calibrating and simulating copula functions: an application to the Italian stock market* [C]. Working paper, CIDEM, 2002b.
- [40] Lindskog, F.. *Linear correlation estimation* [C]. Working paper, RiskLab, ETH Zurich, 2000.

[41] Lindskog F., McNeil, A. J., Schmock U.. Kendall's tau for elliptical distribution [C]. Working paper, RiskLab, ETH Zurich, 2001.

[42] 顾岚, 薛继锐, 罗立禹, 徐悦. 中国股市的投资组合分析 [J]. 数理统计与管理, 2001,20(5): 56-60.

A Dynamic Measure of Portfolio Risk Based on Copula

LIU Zhi-dong

(The Central University of Finance and Economics, Beijing 100081)

Abstract: It is of great importance for portfolio risk measurement to grasp the actual distribution and dependence of financial asset returns. There are some drawbacks in Markowitz's portfolio theory, which reflects the risk and the dependence of financial assets returns by means of variance and Pearson's linear correlation. Basely on the virtues of copula in reflecting the dependence of random variables, and connected with the fat tail, no-asymmetry characters of the distribution of the financial assets returns, and the time-varying mean and variance, the paper constructed a dynamic measure of portfolio risk based on copula, which selected value at risk and conditional value at risk as the indexes of computation. Finally, according to the data from China security market, the paper did empirical research with the constructed models.

Key words: portfolio; copula; fat tail distribution; extreme value correlation; Value at Risk; Conditional Value at Risk; GARCH ; dynamic measure of risk

收稿日期：2004-12-10

作者简介：刘志东，男，(1973-)，中央财经大学讲师，管理科学与工程博士，研究方向：金融工程与风险管理。

¹ 尾部相关或尾部极值相关指两个或多个随机变量同时为极值的关联程度。

² 需要特别指出的是，本文并不直接求金融资产收益率的 Copula 函数，而是求其随机扰动项的 Copula 函数，根据文献中关于 Copula 函数的推论 2 可知二者相等。但是通过求其随机扰动项的 Copula 函数，可以在边缘分布函数中利用 GARCH 模型反映资产收益率的动态变化。

³ 数据来源：北京大学色诺芬金融数据服务公司，并且采用负对数收益率。两组资产组合的构成为：A 资产组合包括轻工机械、第一铅笔、永生股份、胶带股份、联华合纤、冰箱压缩、轮胎橡胶、交大南洋、新宇软件、宏盛科技。B 资产组合包括真空电子、原水股份、华晨集团、上海石化、济南轻骑、悦达投资、马钢股份、华北制药、东方明珠、四川长虹。

⁴ RiskMetrics 的相关系数矩阵 R 是一种线性相关矩阵。