模态系统的归约度*

蔡魏峰[1] 王景周[2]

(1. , 2. 中山大学逻辑与认知研究所，广东 广州 510275)

摘要: 本论文试图从“度”这个概念入手，在考察已有 n 度系统概念的基础上，提出 n^+度系统和 n.m 度系统的定义，探讨模态系统中模态符串和公式相对于上述定义的可归约性，分别讨论了 n 度系统、n^+度系统和 n.m 度系统的特征，分析他们的区别和联系，并揭示了研究这些度的概念的意义。

关键词: 模态系统; 归约度; 模态符串

中国分类号: B81 文献标识码: A

本文研究的是模态系统的归约度。一个模态系统中模态符串的可归约性对于这个系统来说是一个比较重要的性质。由可归约性引出的关于模态符串与模态系统的度的研究引起我的重视，因为它可以从语法角度来加深我对模态系统的认识和了解，进一步把握各种模态系统的特征。

1 公式和模态符串的度

在这一部分，我们先给出模态公式与模态符串的度的定义，然后给出本文重点要讨论的模态系统的模态度以及与其相关的概念的定义，并加以解释说明。

定义 1.1

公式 A 的**模态度** Deg(A)定义如下：

① $A\in$ At，则 Deg(A)＝0，即 Deg(p_n)＝0，其中 n<ω；

② 若 A＝¬B，则 Deg(A)＝Deg(B)；

③ 若 A＝$B\wedge C$，则 Deg(A)＝max{Deg(B), Deg(C)}；

④ 若 A＝OB，则 Deg(A)＝Deg(B)＋1，其中 O 表示模态算子□或者◇，下文出现的 O 均代表此含义。

另外，称 A 是 n 度公式 ⇔ Deg(A)＝n。

定义 1.2

称一个符号串 X 是**模态符串** ⇔ X 是由{Ω, ¬, □, ◇}中某些符号组成的有穷串，其中Ω表示空串；

称 X 是**纯模态符串** ⇔ X 是不含¬的模态符串。

约定：

Ω只能单独作为一个模态符串，即若一个模态符串中出现Ω，则这个模态符串只能是Ω。在下文不致混淆之处，若 X 是Ω，我们就把 Xp 写作 p，把 XY 写作 Y，其中 Y 是任一模态

收稿日期：2005-6-13；

作者简介：蔡魏峰(1981-)，男，浙江人，中山大学逻辑与认知研究所 03 级硕士；

王景周(1973-)，男，河南人，讲师，中山大学逻辑与认知研究所 04 级硕士生。

符串。

说明：

1. 模态符串也称作模态词[1]。

2. 公式与模态符串是有区别的。首先，模态符串中没有二元联结词，如→，而公式中可以有二元联结词；其次，模态符串中不会出现公式，但公式中可以有模态符串。

如□◇是模态符串，不是公式；□(p∨□q)是公式，但不是模态符串。

3. X 是模态符串，系统 **E** 和 **E** 的扩充系统都有这条规则[2]：

（LMI）A/B，

其中 B 是若干次据下列原则从 A 得到的公式：若 XC 是 A 的子公式，则把 X 中的¬向右（或左移），在越过□时把□变成◇，在越过◇时把◇变成□，在遇到¬时删去成对的¬。

定义 1.3

模态符串 X 的**模态度** Deg(X)定义如下：

① X＝Ω，则 Deg(X)＝0；

② 若 X＝¬Y，则 Deg(X)＝Deg(Y)；

③ 若 X＝OY，则 Deg(X)＝Deg(Y)＋1。

称 X 是 n 度模态符串 ⇔ Deg(X)＝n。

定义 1.4

模态符串 X 的**长度** log(X)定义如下：

① 若 X＝Ω，则 log(X)＝0；

② 若 X＝¬Y，则 log(X)＝log(Y)＋1；

③ 若 X＝OY，则 log(X)＝log(Y)＋1。

称 X 是长度为 n 的模态符串 ⇔ log(X)＝n。

说明：

1. 易见上述表示模态度和长度的 n 都是正整数。

2. 据定义，因为纯模态符串不含¬，所以它的长度就是它的模态度。换句话说，长度为 n 的纯模态符串的也就是模态度为 n 的纯模态符串。

3. 易见 0 度纯模态符串只有一个Ω，1 度纯模态符串只有□和◇，2 度纯模态符串只有□□，□◇，◇◇，◇□。

类似地，我们可以得到 n 度纯模态符串。它们实际上就是 n 个模态（□和◇）的全排列。由排列组合的基本知识，我们知道 n 度的纯模态符串恰有 2^n 个。

模态符串都是一些符号串，完全由符号的种类和排列顺序来决定，不同符号或不同排列就形成了不同的模态符串。例如，¬◇¬□和□□就是两个不同的模态符串。这种只从语言形式上考虑模态符串的相同与否，是一种绝对的相同性。两个形式上不同的模态符串在一定条件下又可以表现出某些相同性，或起到相同的作用。这是一种相对的相同性，主要根据相对相同性提出了模态符串的等价性问题。[3]在此基础上，我们再来看一些概念及相关定义。

定义 1.5 令 **S** 是模态系统。

(1) 令 X 和 Y 是两个纯模态符串。称 X **相对 S 可归约于 Y**，当且仅当 Xp↔Yp 是 **S** 的

[1] 见周北海著，《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年 6 月第一版，第 85 页。

[2] 见 Chellas, B.F.：Modal Logic: An Introduction. Cambridge，Cambridge University Press，1980.

[3] 见周北海著，《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年 6 月第一版，第 86 页。

内定理且 Deg(Y)<Deg(X)。

(2) 令 A 和 B 是两个公式。称 A **相对 S 可归约于 *B***，当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是 **S** 的内定理且 Deg(B)<Deg(A)。

(3) 称公式 A 相对 **S 可归约**，当且仅当存在公式 B，使得 $A\leftrightarrow B$ 是 **S** 的内定理且 Deg(B)<Deg(A)。

定义 1.6

在模态系统 **S** 内，称模态符串 X 和 Y **相对 S 等价**，当且仅当 Xp↔Yp 是 **S** 的内定理。[4]

说明：

1. 令 X、Y 和 Z 均为纯模态符串。

因为模态系统中有 US 规则，所以据 US，

$\vdash_S \mathrm{Xp}\leftrightarrow\mathrm{Yp} \Rightarrow \vdash_S \mathrm{XZp}\leftrightarrow\mathrm{YZp}$。

2. 令 A 是公式。若 A 相对 **S** 可归约于某一 0 度公式，那么称 A 在 **S** 中**可消模态**。

3. 若默认指的是系统 **S** 的内定理，那么可以将$\vdash_S A\leftrightarrow B$ 简写为 $A\leftrightarrow B$。

我们把降低模态符串的模态度称为模态符串的归约, 降低公式的模态度称为公式的归约。归约时所依据的公式我们称之为**归约公式**（reduction formula）。成为（**S**）内定理的归约公式也称为（**S**）**归约（元）定理**。根据有无归约定理或有什么样的归约定理，不同的系统不等价的模态符串也是不同的。

模态符串的等价性或不等价性是相对系统来说的，取决于系统的构造，因此也可以通过这些方面反过来对模态系统进行考察。

由于公式与模态符串的区别，下面大家目前认同的 n 度模态系统的定义不能刻画下面将要讨论的一些具有特殊归约性质的模态系统，因此我们在下面提出 n^+度模态系统的定义。

定义 1.7

(1) 称系统 **S** 是 **n^+度系统**，当且仅当任何长度大于 n 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 n 的纯模态符串。

(2) 称系统 **S** 是 **n 度系统**，当且仅当任何模态度大于 n 的公式相对 **S** 都可以归约为 m≤n 度公式。

(3) 称系统 **S** 是**∞度系统（无穷度系统）**，当且仅当对于任意的自然数 n，**S** 都不是 n 度系统。

(4) 称系统 **S** 是**∞^+度系统**，当且仅当对于任意的自然数 n，**S** 都不是 n^+度系统。

说明：

1. 注意定义(1)，其中要求的是纯模态符串，而不是公式。这点是 n^+度系统与 n 度系统的主要不同之处。

2. 目前逻辑学通用的关于 n 度系统的定义是这样的：

称系统 **S** 是 **n 度系统**，当且仅当任何公式相对 **S** 都可以归约为 m≤n 度公式。[5]

这个定义跟我们的定义是不矛盾的。因为要是 n 度系统如此定义的话，与此对应有如下的定义：

令 A 和 B 是两个公式。称 A **相对 S 可归约于 *B***，当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是 **S** 的内定理且 Deg(B)≤Deg(A)。

3. n^+度系统的概念似乎在模态逻辑的文献中不曾出现。我们认为这样的概念也从某个侧

[5] 见周北海著，《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年 6 月第一版，第 92 页。

面描述了模态系统的语法特征。

4. 从某种意义上说，n 度系统的归约性比 n^+ 度系统的归约性强，因为 n^+ 度系统只能归约模态度大于 n 的纯模态符串，而 n 度系统可以归约所有模态度大于 n 的公式。

5. 据定义，一个系统若是 n 度的，那么它就不是∞度系统。但是一个系统若是 n^+ 度系统，那么它并不一定就不是∞度系统，换句话说，它并不一定是 n 度系统。就比如 **S4**，文章下面会说明它是 3^+ 度系统，但是它却是∞度系统。

6. 根据邻域语义，易证系统 **E**，**M** 和 **R** 都是 ∞^+ 度系统。

2 n^+ 度系统

据定义 1.2.3，**S** 是 0^+ 度系统，当且仅当任何长度大于 0 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 0 的纯模态符串。据定义 1.1.4 后说明 2，0 度纯模态符串只有一个Ω。

定理 2.1 令 **S** 是模态系统。则下列命题等价：

（1）**S** 是 0^+ 度系统。

（2）任何长度大于 0 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为Ω。

（3）两个 1 度纯模态符串□和◇相对 **S** 都能归约为Ω。

证明：据定义，显然（1）等价（2）。

先证（2）⇒（3）：假设任何长度大于 0 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为Ω，显然我们有（3）。

再证（3）⇒（2）：假设（3）成立，即两个 1 度纯模态符串□和◇相对 **S** 都能归约为Ω。所以我们知 **S** 中有归约定理：

① Op↔p。

下面要证（2）成立，即要证任何长度 n 大于 0 的纯模态符串 X 都可以归约为Ω。我们对 n 进行归纳证明。

当 n＝1 时，据（3）立得。

假设当 n＝k 时（2）成立，即长度为 k 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为Ω。

当 n＝k＋1 时，此时 X 是由 k＋1 个模态（□和◇）组成的一个排列。不妨把 X 中除最左边的一个模态之外的 k 个模态看作一个整体 Y，显然 Y 是一个 k 度的纯模态符串。这样 X 就是 OY。

据①和 US，我们有

② OYp↔Yp。

因为 X＝OY，所以据②，我们有

③ Xp↔Yp。

据归纳假设，有

④ Yp↔p。

所以据③和④，有 Xp↔p。

至此归纳证明完毕，所以我们有（2）⇔（3）。

由上述定理，我们发现若要得到一个 0^+ 度系统，只需令两个 1 度纯模态符串□和◇相对 **S** 都能归约为 0 度纯态符串，而 0 度纯模态符串只有一个Ω，∴只需令□p↔p 和◇p↔p 为 **S** 中公理或内定理即可。不难发现此系统即为 **Tr**，这也恰恰告诉我们 0^+ 度系统只有一种，它们都是 **Tr** 的扩充。而其他三个退化系统均因不能满足定义而不能成为 0^+ 度系统，例如 **Com** 系统中，□就不能归约为Ω，它只能归约于¬，而¬并非纯模态符串。其实下文中我们

将会证明，四个退化系统都是 0 度系统。从这几个系统的例子，我们也可以明确看到 n 度系统跟 n^+系统的区别。

下面我们来具体考察 1^+度系统，这是重点，因为以后的 n^+度系统（$n\geq 2$）都是建立在这个理论基础之上。

类似定理 2.1 的证明，易见 **S** 是 1^+度系统，当且仅当 4 个 2 度的纯模态符串□□、◇◇、□◇和◇□能分别归约于 1 度模态符串□或◇。

2.2 对偶定义　设 A 是不含→和↔的任意公式。

称 A^d是 A 的对偶公式 ⇔ 下列条件满足：

（1）若 $A=p_n$，则 $A^d=p_n{}^d=\neg p_n$；

（2）若 $A=\neg B$，则 $A^d=(\neg B)^d=\neg B^d$；

（3）若 $A=B\wedge C$，则 $A^d=(B\wedge C)^d=B^d\vee C^d$；

（4）若 $A=B\vee C$，则 $A^d=(B\vee C)^d=B^d\wedge C^d$；

（5）若 $A=\Box B$，则 $A^d=(\Box B)^d=\Diamond B^d$；

（6）若 $A=\Diamond B$，则 $A^d=(\Diamond B)^d=\Box B^d$。

2.3 对偶符串定义　令 X 是模态符串。

称 X^d 是 X 的对偶符串 ⇔ X^d是把 X 中□和◇的每一出现都分别同时替换为◇和□得到的。

说明：若 X^d 是 X 的对偶符串，我们称 X^d 和 X 是一组对偶符串，简称为一组对偶。

易证系统 **E** 有如下的等价对偶符串定理：其中 X 和 Y 表示任意模态符串

$\vdash_S Xp\leftrightarrow Yp \Leftrightarrow \vdash_S X^dp\leftrightarrow Y^dp$。[6]

据定义可知，4 个 2 度纯模态符串共有这样 2 组对偶：

第一组：□□和◇◇；

第二组：□◇和◇□。

所以我们在系统 **E** 的基础上构造 1^+度系统时，每次只需引入两条公理。根据排列组合，共有下列四族 1^+度系统：

第一族：在系统 **E** 上至少增加两个公理：

□□p↔□p，□◇p↔◇p。

据等价对偶符串定理，我们有内定理◇◇p↔◇p 和◇□p↔□p，所以我们有下面的归约定理：

□□p↔□p，　◇◇p↔◇p，　□◇p↔◇p，　◇□p↔□p。

显然，由此系统扩充得到的系统都是 1^+度系统。

S5 中有以上 4 条归约定理[7]，因此，**S5** 是 1^+度系统。

这个族中比较自然的系统是 **E**＋□p→p＋◇p→□◇p。因为 **E**=⟨REP⟩[8], ∴ **S′=E**TE 也等价于系统 **PC**＋T＋E＋REP。下面我们就来证明

定理 2.4　**S′**为第一族 1^+度系统。

证明：要证 **S′**为第一族 1^+度系统，只须证

6 详细证明请见 B.F.切莱士著，《模态逻辑导论》，中山大学出版社，1989 年 5 月第一版，第 290 页。

7 详细证明请见弓肇祥著，《广义模态逻辑》，中国社会科学出版社，1993 年 4 月第一版，第 65-68 页。

8 详细证明请见 B.F.切莱士著，《模态逻辑导论》，中山大学出版社，1989 年 5 月第一版，第 290 页。

S′(1)： ◇p↔□◇p
S′(2)： □p↔◇□p
S′(3)： □p↔□□p
S′(4)： ◇p↔◇◇p

先证**S′**（1）：

①	◇p→□◇p	E
②	□◇p→◇p	T，US
③	◇p↔□◇p	①, ②, RPC

再据等价对偶符串定理，得到**S′**(2)。

接下先证 p→◇p （＝$T_◇$）

①	□p→p	T
②	¬p→¬□p	RPC
③	¬¬p→¬□¬p	US
④	p→◇p	REP，Df◇

再证**S′**(3)：

①	□p→◇□p	$T_◇$，US
②	◇□p→□◇□p	E，US
③	□p→□◇□p	①，②，RPC
④	□p→□□p	**S′**(2)，REP
⑤	□□p→□p	T，US
⑥	□p↔□□p	④，⑤，RPC

同样根据等价对偶符串定理，由**S′**(3)可以得到**S′**(4)。

从上面的证明可以看出，要证**S′**(1)、**S′**(2)、**S′**(3)和**S′**(4)，只须用到 **PC**、T 公理、E 公理和 REP。而 **E**⊂**R**⊂**K**[9]，且 **E**＝〈REP〉, ∴

〈T, E；REP〉⊂**K**+T+E，

即**S′**⊂**S5**，由此可以看出，它是 **S5** 的真子系统。

第二族：在系统 **E** 上至少增加两个公理：

□□p↔◇p，□◇p↔◇p。

据等价对偶符串定理，我们有内定理◇◇p↔□p 和◇□p↔□p，所以我们有下面的归约定理：

□□p↔◇p， ◇◇p↔□p， □◇p↔◇p， ◇□p↔□p。

显然，由此扩充得到的系统都是 1^+度系统。

定理 2.5 E 上第二族系统是不等价于 **S5** 的系统。

证明：若这族系统等价于 **S5**，则易得

① □p↔◇p，

且在 **S5** 中，据 T，

② □p→p，

据 B，有

③ p→□◇p，

但在 **S5** 中有

④ □◇p→◇p，

9 见 Chellas, B.F.：Modal Logic: An Introduction. Cambridge，Cambridge University Press，1980.

据③和④，得

⑤ p→◇p，

再据①和⑤，得

⑥ p→□p，

最后据②和⑥，有□p↔p，则 **S5** 为 **Tr**，因为 **S5** 不等价于 **Tr**，[10] ∴矛盾。所以此系统与 **S5** 不等价。

第三族：在系统 **E** 上至少增加两个公理：

□□p↔◇p，□◇p↔□p。

据等价对偶符串定理，我们有内定理◇◇p↔□p 和◇□p↔◇p，所以我们有下面的归约定理：

□□p↔◇p，　◇◇p↔□p，　□◇p↔□p，　◇□p↔◇p。

类似定理 2.2.4 证明，这一族系统也是不等价于 **S5** 的。

第四族：在系统 **E** 上至少增加两个公理：

□□p↔□p，□◇p↔□p。

据等价对偶符串定理，我们有内定理◇◇p↔◇p 和◇□p↔◇p，所以我们有下面的归约定理：

□□p↔□p，　◇◇p↔◇p，　□◇p↔□p，　◇□p↔◇p。

同样，这族系统也不等价于 **S5**。

以上就是从 **E** 出发扩充的四个 1^+度系统族。下面我们来证明从 **E** 扩充后的 1^+度系统只有以上不同的四族，其中我们规定□p↔◇p 在一般情况下不是内定理，除非事先有特殊约定。

为此，我们只须证明：

定理 2.6

① 以上四族两两都不可能等价。

证明：任取上述两族系统，若它们两个等价，则必有□p↔◇p，而这与我们先前的规定矛盾。

② 从 **E** 出发没有其他形式的 1^+度系统可能与上面的四族等价。

证明：据等价对偶符串定理，我们有

$\vdash_S$ □□p↔Xp ⇔ $\vdash_S$ ◇◇p↔X^dp，

$\vdash_S$ □◇p↔Yp ⇔ $\vdash_S$ ◇□p↔Y^dp，其中 X 和 Y 是纯模态符串。

∴只须确定□□和□◇归约到 1 度后的情况便能确定整个 1^+度系统的特征。而据排列组合基本原理，□□和□◇归约到 1 度后只有

{□□p↔□p，□◇p↔◇p}，{□□p↔◇p，□◇p↔◇p}，

{□□p↔◇p，□◇p↔□p}，{□□p↔□p，□◇p↔□p}。

据①，这四种情况互不等价，而且它们分别对应第一、第二、第三和第四族系统。所以不存在从 **E** 出发的其他族的 1^+度系统。

此外，须注意，以上是在我们令□p↔◇p 在不是系统内定理的前提下得到的结论。若允许□p↔◇p 是系统内定理，我们可以得到一类特殊的 1^+度系统。它们是这样一个系统的扩充，即在 **PC** 上增加公理：

□□p↔□p，□p↔◇p。

---

[10] 见周北海著，《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年 6 月第一版，3.8 的证明。

若□p↔◇p 是内定理，则我们没有必要对□和◇作任何区分。易见

PC＋□□p↔□p＋□p↔◇p＝**PC**＋□□p↔◇p＋□p↔◇p。

我们可以看到此系统是一致的，因此也具有一定的研究价值。这样特殊的一类系统，易见它也是个 1^+度系统。在这类系统中，所有的长度大于 1 的纯模态符串均可归约为 1 度算子 O。为与一般 1^+度系统做区别和方便以后一些相关问题的讨论，我把这类特殊的 1^+度系统称作绝对 1^+度系统，记作$\mathbf{[S]^{1+}}$。

基于上段分析，我们将$\mathbf{[S]^{1+}}$严格定义如下：

定义 2.7

称一个模态系统是绝对 1^+度系统，当且仅当□□p↔□p，□p↔◇p 是其内定理。

对于下面特殊的情况，我们再有这样的约定：

① 如果语言中没有缩写符号◇，那么称一个模态系统是绝对 1^+度系统当且仅当□□p↔□p 是其内定理；

② 如果语言中没有缩写符号□（这时◇是初始符号），那么称一个模态系统是绝对 1^+度系统当且仅当◇◇p↔◇p 是其内定理。

定理 2.8

如果语言中没有缩写符号◇（对有些语言是□），则用此语言表述的绝对 1^+度系统恰是 1^+度系统，即

（%）**S** 是 1^+度系统 ⇔ **S** 是绝对 1^+度系统。

证明：假设语言中没有缩写符号◇。我们证明（%）。

先证“⇒”：若 **S** 是 1^+度系统，据定义，任何长度大于 1 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 1 的纯模态符串。而在这样的语言中，长度为 1 的纯模态符串只有一个□。因此，**S** 中有内定理□□p↔□p，据定义，**S** 是绝对 1^+度系统。

再证“⇐”：若 **S** 是绝对 1^+度系统，据定义，它有内定理□□p↔□p，因此 **S** 中 2 度的纯模态符串□□能归约为 1 度的□。而 **S** 中 2 度的纯模态符串只有一个□□，∴据此，任何长度大于 1 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约到 1 度。再据定义，**S** 是 1^+度系统。

同理我们可以证明，对于没有缩写符号□的语言，我们也有同样的结论。

注意，我们换个角度看，若在 **E** 上定义绝对 1^+度系统，则绝对 1^+度系统其实也是以上四族 1^+系统的共同扩充，因为显然它可以推出上面所说的四个族。

另外，有这样一个有趣的事实：

定理 2.9

若在 **T** 上加上公理□p↔◇p，那么得到的新系统 **S** 是 0^+度系统。

证明：先证□p↔p 为其内定理。

①	□p↔◇p	公理
②	¬□p↔¬◇p	RPC
③	¬□p↔□¬p	LMI，REP
④	□p→p	T
⑤	¬p→¬□p	RPC
⑥	¬p→□¬p	③，⑤，RPC
⑦	¬¬p→□¬¬p	⑥，US
⑧	p→□p	REP

⑨　　□p↔p　　　　　④，⑧，RPC

据□p↔p 和□p↔◇p，易见◇p↔p 也为 **S** 中内定理。∴两个 1 度纯模态符串□和◇相对 **S** 都能归约为Ω。再据定理 2.1，**S** 为 0^+度系统。

如不在 **E** 的扩充系统上考虑问题，例如从 **PC** 出发，此时等价对偶符串定理不一定成立，我们还会有更细致的分类。

我们首先约定暂不考虑绝对 1^+度系统这种情况。根据排列组合，要使 4 个不同的 2 度模态符串□□，◇◇，□◇和◇□分别归约为 1 度模态符串□和◇，有且只有 2^4＝16 个不同的组合，其中每一个组合对应着一个 1^+度系统，因此共有 16 个基本系统。在每个基本系统上进行扩充都可以得到相应的一族，可以称它们为 **PC** 上的 1^+度 16 族。例如

Γ＝{□□p↔□p，◇◇p↔□p，□◇p↔◇p，◇□p↔◇p}

就是其中一种组合。据此组合，我们可以得到 **PC** 上的扩充系统 **S**＝**PC**＋Γ。

显然 **S** 也是 1^+度模态系统，但它不属于任何一个从 **E** 出发的四个族，从而不可能建立在 **E** 上；另一方面，易见 **E** 上四族也分别对应了 16 个 1^+度 **PC** 族中的四个。

易见此 16 个族系统均为一致的。而且它们也是两两不等价的，不妨以系统

PC＋Γ和

PC＋□□p↔□p＋◇◇p↔□p＋□◇p↔□p＋◇□p↔◇p

为例。假如它们等价，我们可以得到内定理□□p↔□p 和□p↔◇p，从而又回到绝对 1^+度系统，与事前约定矛盾。

据上两段的分析可知，在 **PC** 基础上，所有的 1^+度模态系统都是属于 16 族中之一，从这个意义上来说，此时的分类比 **E** 上四族的分类更具普遍性。

至此，1^+度模态系统的基本性质及分类已讨论完毕。

有了 0^+度和 1^+度模态系统的研究结果，现在我们来考察 2^+度模态系统的情况。

据定义，**S** 是 2^+度模态系统，当且仅当任何长度大于 2 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 2 的纯模态符串。

定理 2.10　下列命题等价：

（1）**S** 是 2^+度系统。

（2）长度为 3 的纯模态符串相对 **S** 可以归约为长度为 2 的纯模态符串。

证明：先证（1）⇒（2）：假设任何长度大于 2 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 2 的纯模态符串，显然我们有（2）。

再证（2）⇒（1）：假设（2）成立，即长度为 3 的纯模态符串相对 **S** 可以归约为长度为 2 的纯模态符串。

下面要证（1）成立，即要证任何长度 n 大于 2 的纯模态符串 X 相对 **S** 都可以归约为长度为 2 的纯模态符串。我们对 n 进行归纳证明。

当 n＝3 时，据（2）立得。

假设当 n＝k（k>2）时（1）成立，即长度为 k 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 2 的纯模态符串。

当 n＝k＋1 时，此时 X 是由 k＋1 个模态（□和◇）组成的一个排列。不妨把 X 中除最右边的一个模态之外的 k 个模态看作一个整体 Y，显然 Y 是一个 k 度的纯模态符串。这样 X 就是 YO。

据归纳假设知，Y 可以归约为长度为 2 的纯模态符串 O_1O_2，即

① Yp↔ O_1O_2p。

据①和 US，我们有

② $YOp\leftrightarrow O_1O_2Op$。

因为 X＝YO，所以据②，我们有

③ $Xp\leftrightarrow O_1O_2Op$。

据（2），有

④ $O_1O_2Op\leftrightarrow Wp$， 其中 W 是一个 2 度纯模态符串。

所以据③和④，有 $Xp\leftrightarrow Wp$。

至此归纳证明完毕，所以我们有（1）⇔（2）。

据上一定理，**S** 是 2^+度模态系统，当且仅当下面 8 个 3 度的纯模态符串

□□□，◇□□，□□◇，□◇□，◇◇□，◇□◇，□◇◇，◇◇◇

能分别归约为 2 度模态符串

□□，◇◇，□◇，◇□。

同样，先考虑系统 **E** 的扩充系统。据等价对偶符串定理，我们构造 2^+度模态系统时每次可以只引进 4 条公理（每次只需将□□□，◇□□，□□◇，□◇□归约到 2 度即可，其余四个据其对偶性即可归约）。根据排列组合，在系统 **E** 上有 4^4 族 2^+度系统。

它们可形式化为 **E**＋Γ，其中

Γ⊆{Xp↔Yp：X∈{□□□, ◇□□, □□◇, □◇□}，Y∈{□□, ◇◇, □◇, ◇□}}

使得│Γ│＝4，且Γ中的 X 恰好包含了以上四个 3 度纯模态符串。

每次增加的是 4 条不同的公理。易见其他所有 **E** 上的 2^+度系统都是以上 4^4 族系统的扩充。

如不在 **E** 的扩充系统上考虑问题，例如从 **PC** 或 **PC**＋RN（以下称此系统为 **N**）出发，此时等价对偶符串定理不一定成立。我们构造 2^+度模态系统时每次至少需要引进 8 条公理（8 条公理分别将 8 个 3 度的纯模态符串归约到 2 度模态符串）。据排列组合，共有 4^8 族这样的 2^+度系统。

它们可以形式化为 **PC**＋Γ（或 **N**＋Γ），其中

Γ⊆{Xp↔Yp：X∈{□□□, ◇□□, □□◇, □◇□, ◇◇□, ◇□◇, □◇◇, ◇◇◇}， Y∈{□□, ◇◇, □◇, ◇□}}使得│Γ│＝8，且Γ中的 X 恰好包含了所有的 3 度纯模态符串。

其中每个系统增加的都是 8 条不同的公理，分别反映了 8 个 3 度纯模态符串的归约情况。

同绝对 1^+度系统$[\mathbf{S}]^{1+}$，若 **S** 是 2^+度系统，且 4 个 2 度纯模态符串相对 **S** 两两等价，那么称这样的 **S** 为绝对 2^+度系统，记做$[\mathbf{S}]^{2+}$。严格定义如下：

定义 2.11

称一个系统是绝对 2^+度系统，当且仅当 **S** 是 2^+度系统，且

□□p↔◇◇p，◇◇p↔□◇p，□◇p↔◇□p

都是其内定理。

说明：在$[\mathbf{S}]^{2+}$中，所有长度大于 2 的纯模态符串均可归约为长度为 2 的□□（或◇◇，□◇和◇□其中的任何一个），因为它们相对$[\mathbf{S}]^{2+}$是等价的。易见从 **E** 或 **PC** 出发，$[\mathbf{S}]^{2+}$分别是 **E** 上 4^4 族 2^+度系统或 **PC** 上 4^8 族 2^+度系统的共同扩充，因为显然$[\mathbf{S}]^{2+}$可以推出上面所说的任何一族。

定理 2.12 **KE** 是 2^+度系统。

证明：易证它有如下 8 条内定理：

KE(1)：□□p↔□□□p

KE(2)：□□p↔□◇□p

KE(3)：◇□p↔◇□□p

KE(4)：◇□p↔◇◇□p

KE(5)：◇◇p↔◇◇◇p

KE(6)：◇◇p↔◇□◇p

KE(7)：□◇p↔□◇◇p

KE(8)：□◇p↔□□◇p

（这 8 条内定理可以用删略中间模态这句短语来概括）。

定理 2.13 下列命题等价：

（1）**S** 是 n^+度系统。

（2）长度为 n＋1 的纯模态符串相对 **S** 可以归约为长度为 n 的纯模态符串。

证明：先证（1）⇒（2)：假设任何长度大于 n 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 n 的纯模态符串，显然我们有（2）。

再证（2）⇒（1)：假设（2）成立，即长度为 n＋1 的纯模态符串相对 **S** 可以归约为长度为 n 的纯模态符串。

下面要证（1）成立，即要证任何长度为 t>n 的纯模态符串 X 相对 **S** 都可以归约为长度为 n 的纯模态符串。我们对 t 进行归纳证明。

当 t＝n＋1 时，据（2）立得。

假设当 t＝k（k>n）时（1）成立，即长度为 k 的纯模态符串相对 **S** 都可以归约为长度为 n 的纯模态符串。

当 t＝k＋1 时，此时 X 是由 k＋1 个模态（□和◇）组成的一个排列。不妨把 X 中除最右边的一个模态之外的 k 个模态看作一个整体 Y，显然 Y 是 k 度纯模态符串。这样 X 就是 YO。

据归纳假设，Y 可以归约为长度为 n 的纯模态符串 V，即

① Yp↔Vp。

据①和 US，我们有

② YOp↔VOp。

因为 X＝YO，所以据②，我们有

③ Xp↔VOp。

易见 VO 是 n＋1 度纯模态符串，据（2），有

④ VOp↔Wp， 其中 W 是 n 度纯模态符串。

所以据③和④，有 Xp↔Wp。

至此归纳证明完毕，所以我们有（1）⇔（2）。

如前所说，由排列组合的基本知识，我们知道 n＋1 度纯模态符串恰有 2^{n+1} 个。所以据上一定理，**S** 是 n^+度系统，当且仅当 2^{n+1} 个 n＋1 度的纯模态符串能分别归约于 n 度的纯模态符串，所以 n^+度系统是形如 **PC**＋Γ的系统的扩充，其中

Γ⊆{Xp↔Yp：X 是 n＋1 度的纯模态符串，Y 是 n 度的纯模态符串}使得│Γ│＝2^{n+1}。

因为有 2^{n+1} 个 n＋1 度纯模态符串和 2^n 个 n 度纯模态符串，因此每次增加的是 2^{n+1} 条不同的公理，所以给定 n，据排列组合，一共有

$$\underbrace{2^n\cdot\cdots\cdot 2^n}_{2^{n+1}\text{个}} = (2^n)^{2^{n+1}} = 2^{n\cdot 2^{n+1}}$$

族这样的系统。

若从 **E** 的扩充系统上考虑问题，因为它们有等价对偶符串定理，所以每族系统只需增加这样的公理，这些公理把两两不互为对偶的 2^n 个 n＋1 度的纯模态符串归约到 n 度纯模态符串。一共有

$2^n\cdot 2^n=2^{2n}$

条归约公式。在每族 n^+度系统中每次增加其中的 2^n 条作为公理，每一条公理描述一个 n＋1 度的纯模态符串归约到 n 度的纯模态符串的情况。据排列组合，共有

$$\underbrace{2^n\cdot\cdots\cdot 2^n}_{2^n\text{个}} = (2^n)^{2^n} = 2^{n\cdot 2^n}$$

族这样的系统。所以 **E** 的扩充系统上的 n^+度系统是形如 **E**＋Γ的系统的扩充，其中

Γ⊆{Xp↔Yp：X 是 n＋1 度的纯模态符串，Y 是 n 度的纯模态符串}使得│Γ│＝2^n。可见 X 取遍 2^n 个两两不互为对偶符串的 n＋1 度纯模态符串，Γ恰包含 2^n 条不同的公理。

定理 2.14　S4 是 3^+度系统。

证明：据定理 2.13，只需证 16 个 4 度的纯模态符串相对 **S4** 可以归约为长度为 3 的纯模态符串。

据 **S4** 中的内定理，[11] 易得以下归约定理：

□□□□p↔□□□p　　□□□◇p↔□□◇p
□□◇◇p↔□◇◇p　　□◇◇◇p↔□◇◇p
□◇□□p↔□◇□p　　□◇□◇p↔□□◇p
□□◇□p↔□◇□p　　□◇◇□p↔□◇□p

由此我们归约了 8 个 4 度的纯模态符串，其余 8 个根据等价对偶符串定理也可归约到 3 度。

由绝对 1^+度系统和绝对 2^+度系统，我们如下定义$[\mathbf{S}]^{n+}$：

定义 2.15

称 **S** 是绝对 n^+度系统（记作$[\mathbf{S}]^{n+}$），当且仅当 **S** 是 n^+度系统，且全部 2^n 个 n 度纯模态符串相对$[\mathbf{S}]^{n+}$两两等价。

说明：在$[\mathbf{S}]^{n+}$中，所有长度大于 n 的纯模态符串均可归约为长度为 n 的纯模态符串中的任何一个，因为它们相对$[\mathbf{S}]^{n+}$是等价的。易见从 **E** 或 **PC** 出发，$[\mathbf{S}]^{n+}$分别是 **E** 上$2^{n\cdot 2^n}$族 n^+度系统或 **PC** 上$2^{n\cdot 2^{n+1}}$族 n^+度系统的共同扩充，因为显然$[\mathbf{S}]^{n+}$可以推出上面所说的任何一族。

3　n 度系统和∞度系统

据定义，称系统 **S** 是 0 度系统，当且仅当任何模态度大于 0 的公式相对 **S** 都可以归约为 m 度公式使得 m≤0。显然 m 是正整数，所以 m＝0。也即在 0 度系统中，任何模态度大

[11] 详细证明请见弓肇祥，《广义模态逻辑》，中国社会科学出版社，1993 年 4 月第一版，第 63 页。

于 0 的公式都能归约为 0 度公式。因此，□p 也能归约到 0 度公式。另一方面，易见，只要在系统 **S** 中□p（或◇p）能归约到 0 度公式，那么根据 Df◇（若是◇初始符号，则根据 Df□[12]）和 US 规则，任意一个模态度大于 0 的公式在 **S** 中均可消模态。据此分析，我们有

定理 3.1

系统 **S** 是 0 度系统 $\Leftrightarrow$ □p（或◇p）在 **S** 中可消模态。

因为至少在 **PC** 上能分别增加无穷多个

$\Box p_1 \leftrightarrow p_1, \ldots, \Box p_n \leftrightarrow p_n, \ldots$

构成 0 度系统，所以 0 度系统至少有可数无穷多个。四个退化系统 **Tr**, **Com**, **Ver** 和 **Fal** 是我们最常见的 0 度系统。

在上述四个模态系统中，□p 相对 **S** 能分别归约到 0 度公式 p、¬p、¬⊥和⊥，□p（或◇p）在系统中均可消模态，因此它们都是 0 度系统。有关它们的其他特征和性质，可以参见文献。[13]

下面我们来重点考察 1 度系统。

我们都知道，**S5** 是 1 度系统，因为任何一个 n（n>1）度模态公式 *A* 相对 **S** 可归约于模态度小于等于 1 的公式。现在我们来回顾一下 **S5** 中的归约是如何进行的，通过描述依据等值变换进行归约的能行程序来证明 **S5** 的归约定理。

首先，我们知道

定理 3.2 **S5** 中有如下内定理和推理规则[14]：

1. LMI
2. $\Box(p\wedge q)\leftrightarrow\Box p\wedge\Box q$ （＝R）
3. $\Diamond(p\vee q)\leftrightarrow\Diamond p\vee\Diamond q$ （＝$R_\Diamond$）
4. $\Box\Box p\leftrightarrow\Box p$，$\Diamond\Diamond p\leftrightarrow\Diamond p$，$\Box\Diamond p\leftrightarrow\Diamond p$，$\Diamond\Box p\leftrightarrow\Box p$（这四条规则可以概括为一条综合规则：在任何一元模态算子系列中，我们可以删去除了最后一个之外的所有其他模态算子。）[15]
5. $\Box(p\vee\Box q)\leftrightarrow\Box p\vee\Box q$ （＝**S5**(4)）
6. $\Box(p\vee\Diamond q)\leftrightarrow\Box p\vee\Diamond q$ （＝**S5**(5)）
7. $\Diamond(p\wedge\Diamond q)\leftrightarrow\Diamond p\wedge\Diamond q$ （＝**S5**(6)）
8. $\Diamond(p\wedge\Box q)\leftrightarrow\Diamond p\wedge\Box q$ （＝**S5**(7)）

令 *A* 是模态度大于 1 的公式，我们用下列方法归约：

① 用缩写定义和 REP 消去→和↔；

② 用 LMI 把¬内移至句符前面；

③ 据上面第 4 条归约定理，把叠加模态符串归约为非叠加模态符串；

④ 若据上述步骤得到的公式 A_1 仍然不是 1 度公式，则再据下列步骤进行归约：

设 A_1 含子公式□*B* 或◇*B*。

情况 1 $B=C\wedge D$：对□*B*，据 R；对◇*B*，据 **S5**(6)和 **S5**(7)。

情况 2 $B=C\vee D$ 且 *C* 和 *D* 至少有一以□或◇开头：则

对□*B*，据 **S5**(4)和 **S5**(5)；对◇*B*，据 $R_\Diamond$，**S5**(7)和上面第四条归约定理；

情况 3 $B=C\vee D$ 且 *C* 和 *D* 都没有以□或◇开头：因为 A_1 的模态度大于 1，所以 *B* 的

[12] $\Box A =_{df} \neg\Diamond\neg A$。

[13] 如周北海著，《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年 6 月第一版，2.10。

[14] 证明详见弓肇祥著，《广义模态逻辑》，中国社会科学出版社，1993 年 4 月第一版，第 65 页。

[15] 见弓肇祥著，《广义模态逻辑》，中国社会科学出版社，1993 年 4 月第一版，第 68 页。

模态度大于 0，所以 C 的模态度大于 0 或 D 的模态度大于 0。

考虑□B：不妨设 $D=D_1\wedge D_2$，则据 R 易得内定理

$$\Box[C\vee(D_1\wedge D_2)]\leftrightarrow\Box(C\vee D_1)\wedge\Box(C\vee D_2)。$$

若 $\mathrm{Deg}(\Box(C\vee D_1))>1$ 或 $\mathrm{Deg}(\Box(C\vee D_2))>1$，则再如情况 2 和情况 3 进行归约总能使 B 前面的□被 B 中模态吸收。

考虑◇B：据 $\mathrm{R}_\Diamond$易得内定理

$$\Diamond(C\vee D)\leftrightarrow\Diamond C\vee\Diamond D。$$

若 $\mathrm{Deg}(\Diamond C)>1$ 或 $\mathrm{Deg}(\Diamond D)>1$，则再如情况 2 和情况 3 进行归约总能使 B 前面的◇被 B 中模态吸收。

重复上述步骤，我们就可以把任意度的公式相对 **S5** 归约为模态度小于等于 1 的公式。

在上述归约过程中，不难发现我们只用了定理 3.2 给出的 **S5** 的 8 条内定理和推理规则。易见只要一个系统具有这 8 条内定理和推理规则，都可以将任意一个模态度大于 1 的公式归约为模态度小于等于 1 的公式。换句话说，只要一个系统具有这 8 条内定理和推理规则，它就是一个 1 度系统。而第 1 条和第 4 条正是 **E** 上第一族 1^+度系统所具有的内定理，因此，我要构造 1 度系统，可以在 **E** 上四族 1^+度系统的扩充系统上进行。

据此思路，我们可以看到，只要在 **E** 上四族 1^+度系统中的任意一族中加上 3.2 中除第 1 条和第 4 条之外的其余 6 条便能构成一个 1 度系统，而易证 $\mathrm{R}_\Diamond$可以由 R 推出[16]，且 **S5**(5)、**S5**(6)和 **S5**(7)可以由 **S5**(4)和第 4 条归约定理推出[17]，因此我们在构造 1 度系统时，在 **E** 上四族 1^+度系统中的任意一族中加上

$\Box(p\wedge q)\leftrightarrow\Box p\wedge\Box q$　(＝R)，　和

$\Box(p\vee\Box q)\leftrightarrow\Box p\vee\Box q$　(＝**S5**(4))

就可以了。拿 **E** 上第三族 1^+度系统为例，

E＋$\Box\Box p\leftrightarrow\Diamond p$＋$\Box\Diamond p\leftrightarrow\Box p$＋$\Box(p\wedge q)\leftrightarrow\Box p\wedge\Box q$＋$\Box(p\vee\Box q)\leftrightarrow\Box p\vee\Box q$

就是 1 度系统。（因其归约方法类似 **S5** 中的归约，因此不再重复证明。）

易见上述系统的子系统

E＋$\Box\Box p\leftrightarrow\Diamond p$＋$\Box\Diamond p\leftrightarrow\Box p$

正是第三族 1^+度系统。在其余 2 族 1^+度系统上扩充得到的 1 度系统据此类推。易见 **E** 上每一族 1^+度系统对应一个 1 度系统，因此 **E** 上共有 4 族这样的 1 度系统。

据定义，易见下列命题等价：

（1）**S** 是 n 度系统。

（2）任何模态度 $k>n$ 的公式相对 **S** 都能归约到 $m\leq n$ 度公式。

因此，若从 **PC**（或 **N**）出发，n 度系统是形如 **PC**＋Γ（或 **N**＋Γ）的系统的扩充， 其中

$$\Gamma\subseteq\{A\leftrightarrow B: A \text{ 是模态度 } k>n \text{ 的公式}，B \text{ 是模态度 } m\leq n \text{ 的公式}\}$$

定理 3.3

E，**K**，**D**，**T**，**B** 都是∞度系统。

定理 3.4

S4 也是∞度系统。

[16] 证明详见弓肇祥著，《广义模态逻辑》，中国社会科学出版社，1993 年 4 月第一版，第 65 页。

[17] 证明详见弓肇祥著，《广义模态逻辑》，中国社会科学出版社，1993 年 4 月第一版，第 66-67 页。

对以上两个定理的证明及相关说明请参见周北海的《模态逻辑导论》。

我们知道，**S4** 是 3^+度系统，它有纯模态符串的归约公式。其系统中只有 7 个不可归约的纯模态符串，但是不能对所有的公式进行归约。例如：

形如□(*A*∨*B*)的公式在 **S4** 中就不一定可以归约。[18]

从 **S4** 这个典型例子，我们可以看到 n^+度系统和∞度系统也是有联系的。

n^+度系统与 n 度系统是相互独立的两个概念。有些系统是 n^+度系统，但是它们不是 n 度系统，比如 **S4**；有些系统是 n 度系统，但是它们不是 n^+度系统，比如 **Com**, **Ver** 和 **Fal**。两个概念从不同方面反映了两类具有特殊归约性质的模态系统，所以我们认为提出 n^+度系统的概念是有一定意义的。

4　n.m 度系统

定义 4.1

称系统 **S** 是 1.m 度系统（0≤m≤3），当且仅当恰有 m 个 2 度纯模态符串相对 **S** 不可归约为 1 度纯模态符串。

说明：因为 2 度纯模态符串共有 $2^{1+1}=4$ 个，所以我们将 m 限定在 $0\le m\le 2^{1+1}-1$，否则 1.m 度系统的定义无意义。

据定义，**S** 是 1.3 度系统，当且仅当{□□, □◇, ◇◇, ◇□}中恰有 3 个不可归约为 1 度的纯模态符串。

S 是 1.2 度系统，当且仅当{□□, □◇, ◇◇, ◇□}中恰有 2 个不可归约为 1 度的纯模态符串。

S 是 1.1 度系统，当且仅当{□□, □◇, ◇◇, ◇□}中恰有 1 个不可归约为 1 度的纯模态符串。

S 是 1.0 度系统，当且仅当{□□, □◇, ◇◇, ◇□}中恰有 0 个不可归约为 1 度的纯模态符串。

显然，1.0 度系统即为 1^+度系统，所以在此我们对于 1.0 度系统不再多加讨论。并且，我们给出的 1.m 度系统概念是 1^+度系统概念的概括推广，或者说，后者是前者的特例。

据定义，易见 1.3 度系统有形如 **PC**＋Γ_1 的子系统，其中

$\Gamma_1\subseteq\{XYp\leftrightarrow Zp$：X, Y, Z∈{□, ◇}}使得$|\Gamma_1|=1$。

注意：增加的是 1 条公理。因为 1.3 度系统中 4 个 2 度纯模态符串恰有 3 个不可归约为 1 度的纯模态符串，也就意味着只有 1 个 2 度纯模态符串能归约到 1 度模态符串。此系统中增加的这条公理反映的就是这个归约性质。因为 4 个 2 度模态符串归约到 1 度模态符串共有 8 条公式。在 **PC** 上只增加其中任意的一条都能构成 1.3 度系统，所以 1.3 度系统共有这样的 8 类。

1.2 度系统有形如 **PC**＋Γ_2 的子系统，其中

$\Gamma_2\subseteq\{XYp\leftrightarrow Zp$：X, Y, Z∈{□, ◇}}使得$|\Gamma_2|=2$，且$\Gamma_2$ 中不同公式中的 XY 是互不相同的。

[18] 证明从略，参见 Makinson, D., A normal modal calculus between T and S4 without the finite model property, the Journal of Symbolic Logic 34, 35-38, 340, 1969.

因为 1.2 度系统中 4 个 2 度纯模态符串恰有 2 个不可归约为 1 度的纯模态符串，也就意味着只有 2 个 2 度纯模态符串能归约到 1 度。此系统中增加的这 2 条公理反映的就是这种归约性质。因为从 4 个 2 度纯模态符串选 2 个作为一组共有 6 种方法，选出来的 2 个 2 度纯模态符串归约到 1 度共有 4 种方法，所以 1.2 度系统共有 6×4＝24 类。

1.1 度系统有形如 **PC**＋Γ_3的子系统，其中

Γ_3⊆{XYp↔Zp：X, Y, Z∈{□, ◇}}使得│Γ_3│＝3，且Γ_3中不同公式中的 XY 是互不相同的。

1.1 度系统中 4 个 2 度纯模态符串恰有 1 个不可归约为 1 度纯模态符串，这就意味着只有 3 个 2 度纯模态符串能归约到 1 度。此系统中增加的这 3 条公理反映的就是这个归约性质。因为从 4 个 2 度纯模态符串选 3 个作为一组共有 4 种方法，每种选出来的 3 个 2 度纯模态符串归约到 1 度共有 2^3＝8 种方法，所以 1. 1 度系统共有 4×8＝32 类。

若从 **E** 的扩充系统上考虑，这样的系统中不可能存在奇数个不可归约的 2 度纯模态符串。因为据等价对偶符串定理，若一个 2 度纯模态符串可归约到 1 度，那么其对偶符串必定也可归约，所以这样的归约必定是成对出现的。假若系统中存在奇数个不可归约的 2 度纯模态符串，因为总共有 4 个 2 度纯模态符串，所以必定也存在奇数个模态符串可归约，这跟归约成对出现矛盾。所以，在 **E** 的扩充系统上考虑 1.m 度系统，我们只能得到 1.0 度系统和 1.2 度系统。

考虑 **E** 的扩充系统上的 1.2 度系统，因为其中只有 2 个 2 度纯模态符串可归约到 1 度，所以这 2 个模态符串必定是互为对偶符串。否则，据等价对偶符串定理，4 个 2 度纯模态符串都可以归约到 1 度模态符串，这跟 1.2 度系统的定义矛盾。又因为 4 个 2 度纯模态符串只能组成 2 组对偶符串，每组归约到 1 度共有 2 种情况，所以 **E** 上的 1.2 度系统共有 2×2＝4 类。

定义 4.2

称系统 **S** 是 n.m 度系统，其中 $0\le m\le 2^{n+1}-1$，当且仅当，恰有 m 个 n＋1 度纯模态符串相对 **S** 不可归约为 n 度纯模态符串。

说明：因为 n＋1 度纯模态符串共有 2^{n+1} 个，所以我们将 m 限定在 $0\le m\le 2^{n+1}-1$，否则 n.m 度系统的定义无意义。

据定义，n.m 度系统有形如 **PC**＋Γ的子系统，其中

Γ⊆{Xp↔Yp：X 是 n＋1 度纯模态符串，Y 是 n 度纯模态符串}使得│Γ│＝$2^{n+1}-m$。

n.m 度系统中 2^{n+1} 个 n＋1 度纯模态符串恰有 m 个不可归约为 n 度纯模态符串，这就意味着只有 $2^{n+1}-m$ 个 n＋1 度纯模态符串能归约到 n 度。每个系统中增加的这 $2^{n+1}-m$ 条公理反映的就是这个归约性质。因为从 2^{n+1} 个 n＋1 度纯模态符串选 $2^{n+1}-m$ 个作为一组共有 $C_{2^{n+1}}^{m}$ 种方法，每种选出来的 $2^{n+1}-m$ 个 n＋1 度纯模态符串归约到 n 度共有 $2^{n(2^{n+1}-m)}$ 种方法，所以 **PC** 上的 n.m 度系统共有这样的 $C_{2^{n+1}}^{m}\cdot 2^{n(2^{n+1}-m)}$ 类。

若从 **E** 的扩充系统上考虑，必须注意等价对偶符串定理。因为可归约的纯模态符串必定两两成对出现，因此系统中不可能存在奇数个可归约的 n＋1 度纯模态符串。又因为 n＋1 度纯模态符串总共有 2^{n+1} 个，所以 m 必定为偶数，且可归约的那些 n＋1 度纯模态符串是以

$$\frac{1}{2}\times(2^{n+1}-m)=2^{n}-0.5m$$

组对偶符串的形式存在。∴在 **E** 的扩充系统上考虑 n.m 度系统，每个系统中增加 $2^n-0.5m$ 条公理，每条公理反映的是每一组对偶符串的归约情况。据排列组合，在 2^n 对 n＋1 度纯模态符串中选取 $2^n-0.5m$ 对共有 $C_{2^n}^{0.5m}$ 种方法，每种方法中选出的 $2^n-0.5m$ 组对偶符串归约到 n 度共有 $2^{n(2^n-0.5m)}$ 种方法，因此 **E** 上的 n.m 度系统共有这样的 $C_{2^n}^{0.5m}\cdot 2^{n(2^n-0.5m)}$ 类。

定理 4.3

S 是 n.0 度系统 ⇔ **S** 是 n^+度系统

证明："⇒"：设 **S** 是 n.0 度系统，据定义，恰有 0 个 n＋1 度纯模态符串相对 **S** 不可归约为 n 度纯模态符串，即所有的 n＋1 度纯模态符串相对 **S** 均可归约为 n 度纯模态符串。据定理 2.4.1，**S** 是 n^+度系统。

"⇐"：设 **S** 是 n^+度系统，据 2.4.1，所有的 n＋1 度纯模态符串相对 **S** 均可归约为 n 度纯模态符串，因此恰有 0 个 n＋1 度纯模态符串相对 **S** 不可归约为 n 度纯模态符串，再据定义，**S** 是 n.0 度系统。

上一定理说明 n.m 度系统概念是 n^+度系统概念的概括，或者说，后者是前者的特例。

推论 4.4：

KE 是 2.0 度系统。

证明：据定理 2.12，**K**E 是 2^+度系统，再据上一定理，所以它也是 2.0 度系统。

5 总结

本论文探讨了三大类具有特殊归约性质的模态系统，并且归纳了如下一些结论：

n^+度系统是形如 **PC**＋Γ的系统的扩充，其中

Γ⊆{Xp↔Yp：X 是 n＋1 度的纯模态符串，Y 是 n 度的纯模态符串}使得│Γ│＝2^{n+1}，且Γ中 X 恰好包含了所有的 n＋1 度纯模态符串。

因为有 2^{n+1} 个 n＋1 度纯模态符串和 2^n 个 n 度纯模态符串，每次增加的是 2^{n+1} 条不同的公理，所以给定 n，共有 $2^{n\cdot 2^{n+1}}$ 族 **PC** 上的 n^+度系统。

n 度系统是形如 **PC**＋Γ的系统的扩充，其中

Γ⊆{A↔B：A 是模态度 k>n 的公式，B 是模态度 m≤n 的公式}。

n.m 度系统有形如 **PC**＋Γ的子系统，其中

Γ⊆{Xp↔Yp：X 是 n＋1 度纯模态符串，Y 是 n 度纯模态符串}使得│Γ│＝$2^{n+1}-m$，且Γ中的 X 恰好包含了 $2^{n+1}-m$ 个不同的 n＋1 度纯模态符串。

每个系统要求增加恰是 $2^{n+1}-m$ 条不同的公理，分别反映了 $2^{n+1}-m$ 个 n＋1 度纯模态符串归约到 n 度的情况。

n^+度系统、n 度系统和 n.m 度系统三者之间既有明显的区别，又有非常密切的内在联系。

一方面，它们从不同角度反映了模态系统中模态符串和公式的可归约性。n^+度系统反映了模态系统中纯模态符串的可归约性，n 度系统反映了模态系统中公式的可归约性，而 n.m 度系统反映了模态系统中一些不可归约为 n 度纯模态符串的个数。所以这个更为概括的概念

既反映了度的概念又反映了个数的概念。

三类系统都具有特殊的归约性质。在 n.m 度系统中恰有 m 个 n+1 度纯模态符串不可归约为 n 度纯模态符串，n^+度系统将所有长度大于 n 的纯模态符串都归约到长度为 n 的纯模态符串，而 n 度系统将所有公式（不仅仅是纯模态符串）都归约到了 m≤n 度公式。从这个意义上说，从 n.m 度系统到 n^+度系统，再到 n 度系统，系统内模态符串和公式的归约性逐渐增强了。

另一方面，它们又有着相互密切的联系。据定理 4.3，n.0 度系统实际上就是 n^+度系统。某些特殊的系统可以既是 n^+度系统，又是 n 度系统。例如，**S5** 就是个典型的例子。它既是 1^+度系统，又是 1 度系统，也是 1.0 度系统。据 2.14 和 3.4，**S4** 既是 3^+度系统，又是∞度系统。从 **S4** 这个典型例子，我们可以看到 n^+度系统和∞度系统也是有联系的。

另外，我们提出 n^+度系统和 n.m 度系统的概念，比较通常的 n 度系统的概念，发现前两类系统比较清楚地刻画了纯模态符串的逻辑特性，而纯模态符串最能反映模态逻辑的本质。n^+度系统和 n.m 度系统在归约时虽然不具 n 度系统归约的那种一般性，但能更简洁更清楚地看出叠加模态的归约性质。

模态符串和公式的等价性建立在一定的条件上，这些条件在一定程度上表明了这种等价性的涵义与得失。例如：一个系统的归约定理在一定程度上表明了该系统关于必然性和可能性接受了什么观点，放弃了什么观点，或其对象是何种必然性与可能性（通常描述这样的系统的语义接受了什么框架条件[19]，放弃了什么框架条件；而这些框架条件是基于一定的观点的）。因此一系统有什么样的归约公式或没有什么样的归约公式，除了本身作为该系统的主要特征外，还具有一定的哲学意味，形式上的结果之一是不等价模态符串的个数可以作为区别不等价系统的一个标准。若两个系统不等价模态符串的个数不同，则他们一定是不等价的系统。但逆命题不能成立，**S4.1** 和 **S4.2** 就是一个例子[20]。

参考文献:

［**1**］李小五．模态逻辑．广州：中山大学逻辑与认知研究所，2004．

［**2**］Enderton, H.B., A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press, Inc., London, 1972.

［**3**］周北海．模态逻辑．北京：中国社会科学出版社，1996, 5．

［**4**］周北海．模态逻辑导论．北京：北京大学出版社，1997, 6．

［**5**］Chellas, B.F., Modal Logic: An Introduction, Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

［**6**］弓肇祥．广义模态逻辑．北京：中国社会科学出版社，1993, 4．

［**7**］Boolos, G., The Logic of Provability, Cambridge University Press, 1993.

［**8**］Chagrov，A. and Zakharyaschev, M., Modal Logic, Clarendon Press, Oxford, 1997.

［**9**］Cresswell, M.J., BSeg has the finite model property, Bulletin of the Section of Logic, Polish Academy of Science, vol.8, 1979: 154-160.

［**10**］B.F.切莱士，郑文辉、张宜生译，林铭钧校．模态逻辑导论．广州：中山大学出版社，1989, 5．

［**11**］Hansson, B. and Gardenfors, P., A guide to intensional semantics. In: Mondality, Morality, and Other Problems of Sence and Non-sence, CWK Gleerup, 1973: 151-167.

［**12**］Hughes, G.E. and Cresswell, M.J., A New Introduction to Modal Logic, London and New York, Routledge, 1996.

［**13**］Isard, S., A finite axiomatizable undecidable extension of K.Theoria, vol. 43, 1977: 195-202.

［**14**］ Konolige, K., On the relation between defalt and autoepistemic logic, Artificial Intelligence, vol. 35(3),

[19] 例如，T 公理在关系语义中对应的框架条件是自返性。

[20] 见周北海著，《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年 6 月第一版，第 90 页。

1988: 343-382.
［**15**］ Lemmon, E.J and scott, D.S., The “Lemmon Notes”: An Introduction to Modal Logic, by K. Segerberg (ed.), Oxford, Basil Blackwell, 1977.
［**16**］Popkorn, S., First Step in Modal Logic, Cambridge University Press, 1944.
［**17**］Segerberg, K., An Essay in Classical Modal Logic, (3 vols) Uppsala, Filosofiska studier, 1971.
［**18**］D. P. Snyder, Modal Logic and it’s Applicalions, Van Mostrand Reinhold Company, 1971.
［**19**］J. Jayzeman, Modal Logic, The lewis-modal system, Oxford University Press, 1973.
［**20**］G. H. Von Wright, An Essay in Modal Logic, North-Holland Publishing Company, 1951.
［**21**］I. Ruzsa, Modal Logic With Descriptions, Akademiai Kiado’Budapest, 1981.
［**22**］A qvist, L, Results concerning some modal system that contain S2, the Journal of Symbolic Logic, 1964.
［**23**］Parry, W.T., Modalities in the Survey system of strict implication, the Journal of Symbolic Logic, 1939.
［**24**］Van Benthem, J. F. A. K., A note on modal formulars and relation, the Journal of Symbolic Logic, 1975.
［**25**］Makinson, D.C., A normal modal calculus between **T** and **S4** without the finite model property, the Journal of Symbolic Logic, vol 34, 1969: 35-38, 340.
［**26**］Feys, Robert, Modal Logics (edited with some complements by Joseph Dopp), Louvain: E. Nauwelaerts, 1965.
［**27**］Fine, Kit, An incomplete logic containing **S4**, Theoria 60, 1974, 23-29.
［**28**］Gerson, Martin, The inadequacy of the neighbourhood semantics for modal logic, Fournal of symbolic logic 40, 1975, 141-48.
［**29**］Stoll, Robet R, Set theory and logic, San Francisco and London: W. H. Freeman and Company, 1963.
［**30**］Thomason, S. K., An incompleteness theorem in modal logic, Theoria 60, 1974, 30-34.

The Reduction Degree Of Modal Systems

CAI Wei-feng1,　WANG Jing-zhou2

(1、2. Institute of Logic and Cognition of Zhongshan University 510275, Guangdong, China)

Abstract： This article begins with the concept of the degree of modal systems, advancing the concepts of n^+ degree modal systems and n.m degree modal systems on the basis of the analysis of the concept of n degree modal systems, and studies the reducibility of modalities and formulas under modal systems in comparison to the concepts mentioned above, then discusses the characteristics of n degree modal systems, n^+ degree modal systems and n.m degree modal systems and analyzes the differences and similarities among them, and finally explains the significance of the study on the concepts of these degrees.

Key words： Modal System, Reduction Degree, Modal Operator