纠正对哥德尔定理的几个误解[1]

唐芳芳[2]

（清华大学人文学院哲学系，北京，100084）

摘要：首先，哥德尔的完全性定理和不完全性定理中的“完全性”是两回事。完全性定理是说一阶逻辑对推理的语法和语义刻画重合的；不完全性定理是说如果足够丰富的形式系统是和谐的，那么存在可以形式表述的真命题不可在系统中证明。接着要纠正对哥德尔定理的误解，指出哥德尔语句不是悖论，哥德尔定理并不导致不可知，没有否认数学是和谐的，没有直接表明人心胜于机器，没有动摇逻辑基础，没有否定形式化方法，并且第二不完全性定理显示了形式化方法强大的表达能力推理能力。

关键词：完全性；形式证明；真；形式化方法

中图分类号： **B81** **文献标识码**： **A**

哥德尔定理对 20 世纪有深刻的影响，但目前对哥德尔定理本身及其定理涉及的逻辑、形式化方法等存在误解。有的并没有弄清哥德尔定理中的基本概念，甚至没有意识到哥德尔完全性定理和不完全性定理中的“完全性”是两回事，就轻率地否定数学的和谐性，否定逻辑，否定形式化方法，甚至否定人的认识能力，把哥德尔不完全性定理作为他们否定性观点的证据。这些误解有的影响很大，有的相当普遍，我们有必要对它们进行纠正和讨论，澄清定理涉及的重要概念，力求正确理解哥德尔定理的意义。

1 哥德尔完全性定理

哥德尔完全性定理(Completeness Theorem)：在一阶语言中，对任何有限的闭公式（不含自由变元的公式，或称为句子）的集合 Γ（Γ 也可以看作有限多个非逻辑公理），对于任意公式 φ，

$$\Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

特别地，$\varnothing \vDash \varphi \Leftrightarrow \varnothing \vdash \varphi$ （Ø 表示空集）

其中，“$\Gamma \vDash \varphi$”表示 φ 是 Γ 的语义结论(semantical consequence)，即对任何结构$\mathcal{M} \equiv (M, I)$，如果 Γ 在$\mathcal{M}$中为真（记为$\mathcal{M} \vDash \Gamma$），那么 φ 在$\mathcal{M}$中也为真（记为$\mathcal{M} \vDash \varphi$）。“⊢”表示“在带等词的一阶逻辑中可证（可推出）(derivability)”，“$\Gamma \vdash \varphi$” 表示存在一个由 Γ 关于 φ 的推演过程（或者说 φ 由 Γ 可证），即存在这样一个有限公式序列$\langle A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n \rangle$ $(n \in N)$，其中 A_1 是一阶逻辑的公理或者 $A_1 \in \Gamma$，A_n 是结论 φ，任一 $A_i (1 \le i \le n)$要么是公理，要么是对本序列中 A_i 前面的公式运用逻辑规则得到的。

哥德尔完全性定理和以下定理是等价的：

[1] **收稿日期**：2005-5-21
[2] **作者简介**：唐芳芳(1979-)，女（壮族），广西武鸣人，清华大学哲学系硕士研究生。

哥德尔－马尔科夫定理（Godel-Malcev theorem）：Γ 是和谐的$\Leftrightarrow$ Γ 是可满足的。

我们称公式集 Γ 是和谐的(consistent)，或者说 Γ 是无矛盾的，当且仅当不存在公式 φ，$\Gamma \vdash \varphi$ 并且 $\Gamma \vdash \neg\varphi$. 我们称公式集 Γ 是可满足的，当且仅当存在一个满足以下要求的赋值结构(M, v)，对任何 $\varphi \in \Gamma$ 都有$(M, v) \vDash \varphi$.

哥德尔完全性定理表明一阶逻辑是完全的，即对任何一阶语言的公式 φ，φ 由 Γ“可证”和 φ 是 Γ 的“语义结论”是重合的。特别地，一阶逻辑的定理集和有效式集是重合的。

2 哥德尔不完全性定理

哥德尔不完全性定理(Incompleteness theorem)：形式算术 PA 在下述意义下是不完全：如果 PA 是和谐的，那么有一个一阶语句 θ，θ 和$\neg\theta$ 在该系统中不可证（不可由前提集 PA 推出），即

(*) PA$\nvdash\theta$ 并且 PA$\nvdash\neg\theta$

形式算术 PA 是以一阶逻辑的形式语言陈述皮亚诺公理而得到的形式系统，它是针对算术标准模型$\boldsymbol{U} = <N, +, \cdot, O, S>$ 建立的。因为 θ 和$\neg\theta$ 都是是闭公式，所以二者之中必有其一 $\boldsymbol{U}$ 中为真，于是(*)就等于说：

存在一个真的一阶语句（取 θ）在系统 PA 中不可证，即存在 θ

$\boldsymbol{U} \vDash \theta$ 并且 PA$\nvdash\theta$

实际上，在不完全性定理的原证明中，哥德尔巧妙地构造了一个可以形式表达的算术命题 G，它是真的但不可证明，G 也被称为哥德尔语句。

然而，哥德尔不完全性定理还有更一般的意义，因为它适用的范围远比 PA 要宽得多：如果一阶理论足够丰富，那么该一阶理论就一定是不完全的。例如，ZFC 也是一个不完全的理论。

第一不完全性定理有一个重要的推论，也称为哥德尔第二不完全性定理：

如果 PA 是和谐的，那么 PA 的和谐性是 PA 本身不能证明的。

进一步，包括形式算术在内的数学形式系统都不能证明自身的和谐性。

3 两种“完全性”的重要区别

也许人们会困惑，为什么哥德尔先证明了完全性定理，后来又反过来证明不完全性定理呢？实际上，这两个定理中的“完全性”的意思是很不一样的。完全性定理的“完全性”是指逻辑的性质。

定义 1：我们称逻辑是完全的，当且仅当对任意闭公式集合 Γ，

$$\Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

而不完全性定理的“完全性”是一阶理论的性质。一阶理论（简称理论）是指和谐的、对演算封闭的闭公式的集合。对演算封闭，即对任一公式 φ，$T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$。

定义 2：我们称一个理论 T 是完全的，当且仅当对任何一阶句子 φ，以下两种情况必居其一：

情况 1：$T \vdash \varphi$

情况 2：T ⊢¬φ

理论总是针对某个特定模型而建立的，例如形式算术就是针对算术的标准模型$\mathcal{U}$= $<N,+,\cdot,O,$S $>$而建立的。定义 2 还有一个与模型有关的等价表述：

推论 1：在理论 T 的某个特定模型中$\mathcal{U}$为真的句子都是由 T 可证的，即

$\mathcal{U} \vDash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

比较逻辑的“完全性”和理论的“完全性”的定义可以看出，它们是两个不同的概念，它们的重要区别是：

第一, 逻辑的完全性只要求在所有模型中都为真的句子可证，而理论的完全性要求在某个特定的模型中为真的句子可证。逻辑的完全性不依赖于任何特定模型的特征，而理论的完全性依赖于某个特定模型的特征。

第二, 理论的完全性要求有“算法”确定任给句子 A 是不是理论 T 的定理。“算法”，直观地说是关于计算过程的一串有限的、确定的指令。而逻辑的完全性要求 T 的语义结论集和 T 的语法结论集（定理）重合, 但是这不等于有算法来确定 T 的定理，因为并没有算法来确定某一阶句子是不是 T 的语义结论。

第三, 逻辑的完全性讨论的“⊢”与“⊨”的关系, 是从语法和语义两方面刻画推理，不依赖于任何特定前提集 Γ 或特定的模型：“⊢”表示前提和结论之间的“可推出”关系，是对推理的语法刻画；而“⊨”表示前提是真的结论也一定是真的，即推理的有效性，是对推理的语义刻画。而理论的完全性讨论的是该理论的有限前提集 T 的性质，讨论由 T 是否可以推出某个特定模型的所有真命题，它依赖于特定的前提集和模型。

由以上区别可知，哥德尔的完全性定理和不完全性定理中的“完全性”是两回事：完全性定理是说一阶逻辑在下述意义上是完全的，即一阶逻辑的语法结论关系“⊢”与语义结论关系“⊨”是重合的。不完全性定理是说算术的形式化在下述意义上是不完全的，即存在可以形式表述的算术的真命题不可在算术形式系统中证明。哥德尔完全性定理揭示一阶逻辑对推理的语法刻画和语义刻画是重合的，从而我们可以放心地使用一阶逻辑；而不完全性定理揭示了形式系统的局限性，它表明任何包括算术的和谐理论，它不可能既是完全的，同时又有机械的证明验证。

4 对几种错误观点的反驳与商榷

哥德尔定理由于其否定的结论具有特殊的魅力, 人们从数学、哲学、人工智能等各方面探讨它的意义。但由于对定理中的“完全性”、“可证”等基本概念的混淆，以及对逻辑和形式化方法的误解，产生了如下的错误观点：哥德尔定理是悖论，毁灭了数学的确定性，动摇了逻辑基础，否定了形式化方法。我们从对一些的基本概念和定理证明的分析着手，对这些观点进行反驳与商榷。

反驳论点一：“哥德尔语句是悖论”

在证明不完全性定理时，哥德尔造了一个自我指涉的哥德尔语句 G。直观地说，哥德尔语句的意思是：“这个语句不可证”。由经典逻辑的二值原则，任何语句要么真，要么假，哥德尔语句也不例外，以下两种情况中二者必居其一：

情况 1：如果这个语句是假的，即“这个语句不可证”是假的，则这个语句可证。又由于已知形式系统是可靠的（即只有真的命题是可证的），这个语句既然是可证的，就是真的。

矛盾。因此这种情况不成立。

情况 2：如果这个语句是真的，即“这个语句不可证”是真的，则这个语句不可证。

这看似悖论：以上推理已经证明了这个语句是真的，但同时又得出这个语句不可证，难道不是悖论吗？其实，这个误解的关键在于混淆了两个不同的“证明”概念。数学的逻辑的重要目标是为了得到精确的“证明”——“形式证明”(formal proof)。要注意的是，“形式证明”概念不是绝对意义上的，是相对某个系统而言的，“形式证明”只是“在给定的系统中的证明”。对任给的形式系统 S，可以严格地定义“形式证明”概念。我们应哥德尔语句的意思说得更清楚些：

(G)“这个语句在系统 S 中不可证”或“这个语句不是形式可证明的”

严格定义了“形式证明”，悖论就消失了。因为我们以上推理并不是“形式证明”，这种非形式的推理和“在系统 S 中的证明”不是一回事。所以说，可以通过非形式推出(G)是真的，同时(G)又不是“形式可证明”的，二者并不矛盾。

反驳论点二：“哥德尔定理证明存在我们无法证明的数学真命题”

谈到形式算术中悬而未决的问题，比如说费尔马大定理时，人们常引用哥德尔不完全性定理来暗示，这个悬而未决的问题或许恰好是一个“不能证明的真命题”，这是出于对“证明”概念的混淆。哥德尔不完全性定理中的“证明”是指“形式证明”，并不是广义的证明，因此它仅仅表明存在算术真命题不能在形式系统中证明，不排除可以用其他（形式系统之外）的方法来证明。

哥德尔定理只是表明，如果要求对“证明”能够进行机械地验证，那么我们就不能“证明”所有的算术真命题。能够机械地验证是“形式证明”的特征，要求有算法能够识别公理和推理规则。形式证明体现的是“能行”的思想，即每一步都按照明确的指令操作，并能够在有限步骤内结束。但数学的证明方法并不仅限于有穷的证明，数学家们可以用非形式化的、非有穷的方法来进行证明。

还要注意，如果我们能够给出命题的形式证明，就可以肯定该命题是（在系统中）可证的；但是，如果我们证不出来，却不能断定命题在系统中不可证。哥德尔定理表明，对于形式算术（含加法和乘法）的定理集，并没有算法可以判定。

有人甚至还认为哥德尔不完全性定理导致不可知。存在真命题在形式系统中不可证，并不等于没有其他方法可以知道它的“真”，也并不意味着人的理智不能认识它的“真”。如果命题是能够在形式算术系统中证明，那么就能肯定该命题是真的，因为形式算术系统是可靠的（其公理是算术真命题，且逻辑规则能保证推理的有效性，因此在系统中可证的一定是真的）。但如果命题不能在系统中证明，却不能就此确定该命题不可能是公理的逻辑结论。哥德尔定理表明，有加法和乘法的算术是不可判定的，即对算术形式语言的所有表达式的真假，并没有算法能够判定。但这并不排除在一个更小的系统内有算法来判定命题的真假的可能性。实际上，1930 年有人证明没有乘法的算术是可判定的，即有算法来判定每个“无乘法”算术语言表达式的真假。另外，没有算法来判定命题的真假，也不等于说人的理智不能判定命题的真假。因此，哥德尔不完全性定理并不能作为不可知论的证据，把不可知的情绪归罪于哥德尔定理是不合适的。

反驳论点三：“哥德尔定理证明数学形式系统是不和谐的”

《数学：确定性的丧失》一书中，作者把哥德尔不完全性定理作为数学不确定的证据，

为不存在对数学的和谐性的证明而遗憾。但他可能没有意识到，不存在对数学和谐性的“证明”（形式证明）并不等于说数学是不和谐的。“系统的和谐性不能形式证明”不等于说“系统是不和谐的”。

假设某个丰富的系统能证明自身是和谐的，那么我们能相信该系统是和谐的吗？当然不能。哥德尔第二不完全性定理的证明过程告诉我们，如果丰富的形式系统能证明自身是和谐的，那么该系统就是不和谐的。我们来看看这个证明的概要：首先，“该系统是和谐”可以用算术的一阶句子表达，记为 Consis，从而“Consis → G”也是算术的一阶句子，其中 G 为哥德尔语句。接着，由哥德尔第一不完全定理，“Consis → G”为真。进一步，“Consis → G”能形式证明（在形式系统中可证），这是哥德尔第二不完全性定理证明中最关键的一步。假设系统能证明自身是和谐的，即 Consis 能形式证明。于是可以对“Consis → G”和“Consis”运用分离规则(MP)得出 G，从而 G 可形式证明。但是哥德尔第一不完全定理告诉我们，如果 G 可形式证明，那么形式算术不和谐。因此，如果形式算术系统是和谐的，那么 Consis 不可形式证明，即系统不能证明自身是和谐的；反之，如果系统能证明自身是和谐的，即 Consis 可形式证明，那么系统是不和谐的。

实际上，如果一个系统是不和谐的，那么系统能证明所有的一阶句子，包括“0＝1”，也包括“Consis”，这就是说不和谐的系统一定能证明自身是和谐的。同样，如果数学是不和谐的，那么任何命题都可以被“证明”，“数学是和谐的”这一命题当然也不例外。哥德尔第二不完全性定理只是表明丰富的形式系统（包括形式算术的形式系统）的和谐性不能在系统自身内证明，并不等于说系统是不和谐的。“系统是和谐的”和“系统能证明自身是和谐的”是两回事。我们不能因为系统不能证明自身是和谐的就断定系统是不和谐的，断定系统是否是和谐的需要其他的根据。实际上，形式算术的和谐性虽然在形式系统内不能证明，但还有其他方法可以证明。例如，1936 年甘岑用超限归纳法证明了形式算术是和谐的。1940 年阿克曼也用超限归纳法给出算术和谐性的另一证明，随后还有一些逻辑学家用其他方法证明了形式算术是和谐的。这些证明方法的共同特征是：使用了形式算术中不能形式化的证明，都不是形式证明。这些例子表明，系统的和谐性不能形式证明，不等于说不能用其他方法证明。

反驳论点四：“哥德尔定理表明存在哥德尔语句G不可证，但我们可以知道G是真的，因此人心胜于机器”

这是 Lucas 和 Penrose 的著名论证，这个论证是不充分的。“人心胜于机器”的观点颇有启发性，但姑且不论人心是否胜于机器，只看以上的论证有什么问题。这个论点把哥德尔定理作为人心胜于机器的论据，理由是：设想有一台机器可以一一打印形式算术系统的定理。根据哥德尔不完全性定理，如果系统是和谐的，那么存在一个哥德尔语句 G 不可证，从而不能由机器产生。但人站在形式系统之外，用人的理智可以知道 G 是真的，于是人心胜于机器。

Lucas 和 Penrose 以上论证的关键前提是“人心能知道 G 是真的”，但这一前提说得不太清楚。首先，我们知道 G 是真的也是有条件的，哥德尔第一不完全性定理的断言是“如果形式算术系统是和谐的，那么 G 是真的”。其次，在第一不完全性定理中，这个断言是通过非形式的方法论证的，因而人可以站在形式系统之外得到这一断言。但如果要论证人心胜于机器，还必须有以下前提：机器不能得到这一断言。但事实是否如此呢？不是。第二不完全性定理证明，这一断言可以用形式语言表达，即“Consis → G”，因为可用一阶语句 Consis 表示“系统是和谐的”，由“→”的定义，一阶语句“Consis → G”表示“如果 Consis 为真，那么 G 为真”，这就是说“如果系统是和谐的，那么 G 为真”。并且，更关键的一

点是：第二完全性定理还表明“Consis → G”在形式算术中可证，这等于说以上断言是可以形式证明的，是可以用机器证明的。总之，对人心能够知道的“如果系统是和谐的，那么 G 为真”这个断定不仅能用形式语言表达出来，而且可以有机器产生。因而，不能仅凭以上论点把哥德尔（第一）不完全性定理作为“人心胜于机器”的论据。对哥德尔第二不完全性定理的忽视是这种误解的主要原因。

“人心胜于机器”是个很有意思的问题，史料表明哥德尔本人也对这一问题作了哲学的思考，人们对“心－脑－计算机－哥德尔定理”这一问题曾展开大讨论。但我们在讨论中不能忽视第二不完全性定理，不能忽视“Consis → G”在形式算术中可证这一事实。

反驳论点五：“哥德尔的理论动摇了逻辑基础”

这一论点是不正确的。首先，我们不能把哥德尔不完全性定理误解为了悖论。我们知道，理论中如果出现悖论，就会动摇理论的基础。因为理论中如果出现悖论，该理论就是不和谐的，可以得到任何命题，包括“0=1”这样的假命题，从而导致理论坍塌。哥德尔不完全性定理并不是悖论，它断定存在真算术真命题不可“证明”，这里的“证明”指的是形式证明，即从公理出发，用纯形式化的方法进行推演，并且有算法可以检验推演过程的正确性。把精确的“形式证明”概念和一般的证明概念混为一谈容易把不完全性定理误以为是悖论。

其次，哥德尔完全性定理解决了逻辑基础的问题，保证一阶逻辑中没有矛盾。完全性定理表明一阶逻辑的定理集和有效式集是重合的，从而一阶逻辑的定理在所有模型中都为真，或者说所有模型都是一阶逻辑的模型。又因为有模型的公式集就是和谐的，所以一阶逻辑的定理集是和谐的，这就是说一阶逻辑不可能出现悖论，它不会得到“0＝1”这样的假命题，我们完全可以放心地使用一阶逻辑作为推理工具。

再次，不完全性定理揭示的是形式系统的局限性，而不是逻辑的局限性。我们已经区分了理论的完全性和逻辑的完全性。哥德尔不完全性定理考察的是理论的完全性，具体地说，是算术理论的完全性，即要求所有算术标准模型中为真的命题可证。不完全性定理得出了否定结论，即任何算术理论不可能既具有完全性，又是一个形式系统（有机械的证明验证），或者说，任何形式系统都不能把握所有的算术真命题，揭示了形式系统的根本局限性。

最后，哥德尔定理实际上推动了现代逻辑的发展。不完全性定理的论文摘要对塔斯基语义学有一定影响；不完全性定理中的元数学算术化的方法被克林采用，从而得到递归论的一批奠基性的成果，并发展出可计算性理论；哥德尔证明的一阶逻辑的完全性定理隐含着模型论的重要结论——紧致性定理。

总之，哥德尔的定理并没有动摇逻辑的基础。恰恰相反，它们是现代逻辑重要成果：完全性定理使一阶逻辑理论成熟，而不完全性定理揭示了形式系统的一种内在局限性。进一步，它还带来了现代逻辑中的丰富成果，促进了现代逻辑的发展。

反驳论点六：“哥德尔定理否定了形式化方法”

虽然哥德尔不完全性定理揭示形式化方法具有根本的局限性，但是这并不等于说哥德尔定理否定了形式化方法，相反，它发展了形式化的方法。

首先，哥德尔定理中的证明技巧显示了形式语言的强大的表达能力。在第一不完全性定理的证明发现了元数学算术化的技巧，把关于系统的元数学谓词（例如“形式可证明”）变为相应的对象语言中的算术谓词，并且，还在形式语言中表达构造了一个自我指涉的形式表达式。在第二不完全性定理的证明中，把“系统是不和谐的”这样的关于系统本身性质的元

数学命题转换为形式语言的表达式“consis”，方法如下：取系统中某个可否证的句子 f，例如取“0=1”。如果系统可以证明 f，那么系统是不和谐的。反之，如果系统不和谐，那么系统可以证明 f，因为不和谐的系统可以证明任何命题。所以，f 不可证，当且仅当系统和谐。又因为有谓词 P 满足以下条件：P(x)为真，当且仅当 x 可证（第一不完全性定理），进而算术句子¬P(f)为真，当且仅当 f 不可证，所以¬P(f)为真，当且仅当系统是和谐的。这就是说¬P(f)表达系统的和谐性，不妨把这个公式记为 Consis。这样，就可以用一个算术句子 Consis 表达算术系统的和谐性。在对象语言中能表达出关于该系统的元理论的命题，把形式化提高到一个新水平。

其次，哥德尔定理显示了形式系统强大的推理能力。在第二不完全性定理的证明中，把“如果系统是和谐的，那么哥德尔语句 G 是真的（不可证）”这样的关于系统的断定句转换为形式语言表达式“Consis → G”，并且给出了“Consis → G”的形式证明。这表明某些关于系统自身性质的表达式能够在形式系统中证明，显示了形式系统强大的推理能力。

总之，哥德尔定理既揭示了形式化方法的局限性，又显示了形式化的方法的表达和推理能力，是关于形式系统的元理论的重要成果，促进了形式化方法的发展。我们不能因为形式化方法有局限性就否定它。认清形式化方法的能力，我们就不必用它来做实际上做不到的事情，可以集中精力做它该做的事。

5 结论

本文通过澄清“完全性”、“形式证明”等概念，指出哥德尔语句不是悖论，哥德尔定理并不导致不可知，没有否认数学是和谐的，没有直接表明人心胜于机器，没有动摇逻辑基础，揭示的是形式系统的局限性而不是逻辑的局限性，没有否定形式化方法。讨论哥德尔定理的证明技巧发展了形式化方法时，我们不仅要注意第一完全性定理的元数学算术化的方法，而且要注意第二不完全性定理所显示的形式化方法强大的表达能力推理能力。

参考文献:

[1]. 张清宇，郭世铭，李小五. 哲学逻辑研究[M]. 北京：社会科学文献出版社，1997

[2]. 张家龙. 数理逻辑发展史[M]. 北京：社会科学文献出版社，1993

[3]. 汪芳庭. 数理逻辑[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，1990

[4]. 王路. 逻辑基础[M]. 北京：人民出版社，2004

[5]. 李娜. 现代逻辑若干问题研究[M]. 开封：河南大学出版社，2000

[6]. 王浩. 哥德尔[M].上海：上海世纪出版集团、上海译文出版社，1997

[7]. 克莱因. 数学：确定性的丧失.长沙[M]：湖南科学技术出版社，1997

[8]. Goldstern, M. and Judah, H. The Incompleteness Phenomenon[M], Wellesley, 1995

[9]. Smullyan,R. Godel’s Incompleteness theorems, The Blackwell Guide to Philosophical Logic[C], Goble, L(ed.), Blackwell, 2001

[10]. Jacquette, D. A companion to philosophical logic[C]. Blackwell, 2002

[11]. Sangalli, A. 算术的不完全性[J].数学译林，1993，(2):134-138

Correct some mistake about Godel’s Theorem

Tang Fang-fang

(Department of Philosophy, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: First, “completeness” in Completeness theorem is distinct from that one in Incompleteness theorems. Godel’s completeness shows that in the case of the first order logic the syntactical and semantical characters of reasoning coincide. Incompleteness theorem show that if a strong formal system is consistent, there is a sentence which is true but nor provable.

Second, to correct some misunderstandings, we show that Godel’s sentence is not a paradox, Godel’s theorems are not skeptical conclusion of human understanding, mean not that one can never know that mathematics is consistent, mean not that the mind is superior to the machine, undermine not logic, refute not formal method, and the Second Incompleteness theorem demonstrate the strong capabilities of expressing and reasoning within formal method.

Key words: completeness; formal proof ; truth ; formal method