我知道你－－知道主体的逻辑*

李小五
(中山大学逻辑与认知研究所，中山大学哲学系，广东 广州 510275)

摘要：首先，我们构造知道主体的系统 **KA**，给出它的一些证明论结果。其次，我们引入关系语义，给出描述 **KA** 的特征公理的框架条件，证明 **KA** 相对这个框架条件是框架可靠的。最后，我们证明 **KA** 相对这个框架条件也是框架完全的。

关键词：知道主体的系统；关系语义；框架可靠性；框架完全性

中国分类号： B81 文献标识码： A

通常的动态逻辑在语形方面（相对公理化系统）没有独立刻画活动的逻辑性质（在语义方面，通常的动态逻辑用通达关系来表示活动，我们姑且算是独立刻画了活动）。例如，没有刻画像“我吃了”那样的句子。也就是说，相对活动α，它们只刻画了形如$[\alpha]\varphi$的句子，而这样的句子没有独立刻画活动α。至于像“我吃了”那样的句子（概括为“主体 A 做完活动α”，符号化为 $A\alpha$）有什么逻辑性质，这些逻辑没有揭示。而在我们看来，这是一类很重要的句子。

所以本文我们首先刻画 $A\alpha$的逻辑性质。同时我们还保留关于$[\alpha]\varphi$的逻辑性质，只不过我们把$[\alpha]\varphi$分解为当前所有主体 A 产生的$[\alpha_A]\varphi$的合取（$[\alpha_A]\varphi$直观表示“主体 A 做完活动α后产生结果φ”），从而在某种意义上更精细地描述$[\alpha]\varphi$的语义，因为通常动态逻辑对$[\alpha]\varphi$的解释在我们看来是含混的，毕竟活动总是某个主体（充其量是某类主体）做的，而通常的动态逻辑对$[\alpha]\varphi$的语义刻画并没有揭示到底是哪些主体做了α。

本文主要解决的问题是如何刻画一个主体知道另一个主体。我们经常对别人说：“我知道你”。这句话是什么意思？我们理解为：我知道你的所作所为。所以，这里的“我知道你”有“我了解你”的含义。

你的所作所为如何从逻辑上刻画？我们的方案是把<u>作为</u>理解为<u>活动</u>，因此：

（%） “我知道你”，当且仅当，“我知道你做过的所有活动”。

根据这样的理解，我们把<u>知道主体</u>和<u>主体做完活动</u>这两个概念联系起来。用后者来定义前者。

据（%），我们理解的<u>知道主体</u>的“知道”的意义相当强，有浓厚的理想色彩，因为它要求知道对方做过的**所有**活动。

1 形式系统及其证明论

本文提到但未定义的概念和记号，请参见后面的参考文献［1］。

收稿日期：2005-5-16；
基金项目：本文得到教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目 (04JZD0006) 资助；
作者简介：李小五(1955-)，男，河北涞水人，中山大学教授，博士生导师，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员。

定义 1.1　公式的形成规则

（1）本文我们总用 Agent＝$\{A_1, \ldots, A_n\}$表示有穷个主体的集合。

（2）总用 Act＝$\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$表示可数无穷多个活动的集合。

（3）总用 At 表示可数无穷多个原子公式的集合。

（4）我们总用φ, ψ和θ（加或不加下标）表示公式，其形成规则如下：

$$p \mid \neg\varphi \mid (\varphi\wedge\psi) \mid [\alpha_A]\varphi \mid A\alpha \mid [\alpha]\varphi \mid G\alpha \mid K_A\varphi \mid K_AB \mid K_AG,$$

其中 p 是 At 中任意元素，A 和 B 是 Agent 中任意元素，α是 Act 中任意元素，G 是 Agent 的任意子集。

（5）所有公式的集合记为 Form。┤

说明：

$[\alpha_A]\varphi$的直观意义是：“‘A 做完α后φ真’是必然的”（It is necessary that A after executing α, φ is true，见参考文献［2］第 166 页），或者“任何 A 做完α后都使φ成立”（φ holds after any A execution of action α）。

$A\alpha$的直观意义是：　“主体 A 做完活动α”（The agent A has executed an action α）。

$G\alpha$的直观意义是：　“一群主体 G 做完活动α”。

$K_A\varphi$直观意义是：　“主体 A 知道命题φ”。

K_AB 直观意义是：　“主体 A 知道主体 B”。

K_AG 直观意义是：　“主体 A 知道主体群 G”。

规定与缩写 1.2

（1）联结符$\vee$，$\rightarrow$和$\leftrightarrow$的缩写定义如通常给出。另外，缩写定义

$\langle\alpha_A\rangle\varphi ::= \neg[\alpha_A]\neg\varphi$，

$\bigwedge_{x\in X} x ::= \bigwedge\{x: x\in X\}$（即把所有 x 使得 $x\in X$ 按任意固定次序合取起来）。

（2）为了叙述方便，我们规定**联结符的结合力**从左到右依次减弱：

$\neg$，$[\alpha_A]$，A，K_A，$[\alpha]$，G，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。

（3）$\top$ 定义为 $p_1\vee\neg p_1$，$\bot$ 定义为$\neg\top$。

（4）我们常用符号$\Leftrightarrow$表示“当且仅当”，用$\Rightarrow$表示“若…，则…”，用～表示“并非”。┤

为了简洁和突出主题，下面我们引入一个较小的系统，保留进一步扩充的可能。

定义 1.3

知道主体的系统 KA 定义如下：对所有$\alpha\in$Act，$\varphi, \psi\in$Form，$A\in$Agent 和 $G\subseteq$Agent，

公理（模式）：

（TA）　所有重言式的代入特例，

（$K_{\alpha A}$）　$[\alpha_A](\varphi\rightarrow\psi)\wedge[\alpha_A]\varphi\rightarrow[\alpha_A]\psi$，

（K_A）　$K_A(\varphi\rightarrow\psi)\wedge K_A\varphi\rightarrow K_A\psi$，

（T_A）　$K_A\varphi\rightarrow\varphi$，

（A1）　$A\alpha\rightarrow([\alpha_A]\varphi\rightarrow\varphi)$，

（A2）　$[\alpha_A]A\alpha$，

（A3）　$[\alpha]\varphi\leftrightarrow\bigwedge_{A\in \mathrm{Agent}}[\alpha_A]\varphi$，

（A4）　$G\alpha\leftrightarrow\bigwedge_{A\in G}A\alpha$，

（A5）　$K_AB\rightarrow(B\alpha\rightarrow K_AB\alpha)$，

（A6）　$K_AB\alpha_0\rightarrow K_AB$，

（A7）　$\neg B\alpha_0 \to K_A B$，

（A8）　$K_A G \leftrightarrow \bigwedge_{B\in G} K_A B$。

推理规则：

（MP）　$\varphi, \varphi\to\psi / \psi$，

（$RN_{\alpha A}$）　$\varphi / [\alpha_A]\varphi$，

（RN_A）　$\varphi / K_A\varphi$。┤

说明：

A1 和 A2 从直观上说应该是比较自然的。

A3 表示（通常动态逻辑表述的）$[\alpha]\varphi$恰是相对所有主体的集体活动的产物。

A4 表示独立的集体活动的含义，这个公理也比较自然。

A5 表示：若 A 知道 B，则对所有活动α，只要 B 做了，则 A 知道 B 做了。后面我们在语义中更进一步说明：

（＃）A 知道 B，当且仅当，对所有活动α，只要 B 做了，则 A 知道 B 做了。

显然，（＃）是对本文开头的（%）的重述。

公理 A6 和 A7 可以用下列公理等价替换：

（A67）$(B\alpha_0 \to K_A B\alpha_0) \to K_A B$。

A67 的直观意义似乎比 A6 和 A7 更清楚些：若 A 知道 B 做了α_0，则 A 知道 B。

（＃）是我们对<u>知道主体</u>的解释，那么，我知道你做了一个什么活动，我就知道你呢？从直观上说，α_0 可以理解为“诚真公布自己的所作所为”。[1] 这样说来，A67，从而 A6 和 A7，还是比较自然的。但问题是，A6 和 A7（或者 A67）并没有说明α_0 就是“诚真公布自己的所作所为”，它完全可以理解为其他活动。这说明我们的形式系统还存在不完全匹配直观的地方，这不能不说是一个比较严重的缺点。

那么，删去公理 A6 和 A7 行不行呢？直观上说更好。我们引入这两个公理只是为了后面证明完全性定理的需要。如果不用这两条公理，也能证明完全性定理，[2] 则可能是一条更好的出路。

T_K，A1，A5 和 A6 称为 **KA** 的**特征公理**。这样称谓是因为我们在后面将看到，需要一定的语义条件（框架条件）才能保证它有效。

定义 1.4

（1）我们用 $\vdash\varphi$ 表示φ是 **KA** 的**内定理**：φ在 **KA** 中有一个形式证明。

（2）**KA** 的全体内定理的集合记为 Th(**KA**)。

（3）我们也用 $\nvdash\varphi$ 表示$\varphi\notin$ Th(**KA**)。┤

引理 1.5

下面是 **KA** 的导出规则和内定理：

（1）$\varphi\to\psi / [\alpha_A]\varphi\to[\alpha_A]\psi$，

$\varphi\to\psi / \langle\alpha_A\rangle\varphi\to\langle\alpha_A\rangle\psi$；

（2）$[\alpha_A]\varphi\leftrightarrow\neg\langle\alpha_A\rangle\neg\varphi$；

（3）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi / [\alpha_A]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha_A]\varphi_n\to[\alpha_A]\varphi$，

（4）$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi / K_A\varphi_1\wedge\ldots\wedge K_A\varphi_n\to K_A\varphi$；

（5）$\neg(\langle\alpha_A\rangle\varphi_1\wedge\ldots\wedge\langle\alpha_A\rangle\varphi_n)\to\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\neg A\alpha$；

1　公布（public announcement）也是一种活动，请参见参考文献［3］。

2　例如，像刘壮虎和李小五的文章［4］那样。

（6）φ／$[\alpha]\varphi$；
（7）$[\alpha](\varphi\rightarrow\psi)\wedge[\alpha]\varphi\rightarrow[\alpha]\psi$；
（8）$G\alpha\rightarrow A\alpha$， 对每一 $A\in G$；
（9）$Agent\alpha\rightarrow A\alpha$；
（10）$K_AG\rightarrow K_AB$， 对每一 $B\in G$；
（11）$K_AAgent\rightarrow K_AB$。

证明：

我们只给出形式证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。
（1）－（3）据 $K_{\alpha A}$ 和 $RN_{\alpha A}$ 如通常所证。
（4）据 K_A 和 RN_A 如通常所证。
（5）

①	$<\alpha_A>(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\rightarrow<\alpha_A>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha_A>\varphi_n$	（1）
②	$A\alpha\rightarrow([\alpha_A]\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\rightarrow\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n))$	A1
③	$A\alpha\rightarrow(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow<\alpha_A>(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n))$	②，缩写定义
④	$A\alpha\rightarrow(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow<\alpha_A>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha_A>\varphi_n)$	③，①
⑤	$\neg(<\alpha_A>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha_A>\varphi_n)\rightarrow(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\neg A\alpha)$。	④

（6）据 $RN_{\alpha A}$ 和 A3。
（7）据 $K_{\alpha A}$，$RN_{\alpha A}$ 和 A3。
（8）据 A4。
（9）是（8）的特例。
（10）据 A8。
（11）是（10）的特例。┤

说明：

从（6）和（7），我们可以看到，我们的系统是通常动态逻辑的扩充。

下面我们要证明 **KA** 可以协调地退化为经典认知系统 T。

定义 1.6

（1）定义从 Form 到不含模态算子的子语言 $Form_0\subseteq Form$ 的**翻译映射** t 如下：

$t(p)=p$， 对所有原子公式 $p\in At$；
$t(\neg\varphi)=\neg t(\varphi)$；
$t(\varphi\wedge\psi)=t(\varphi)\wedge t(\psi)$；
$t([\alpha_A]\varphi)=t([\alpha]\varphi)=t(\varphi)$；
$t(A\alpha)=t(G\alpha)=t(K_A\varphi)=t(K_AB)=t(K_AG)=t(\top)$。

（2）对每一公式 $\varphi\in Form$，我们称 $t(\varphi)$ 是 φ 的 **t-翻译**。┤

定义 1.7

令 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 是任意两个公理化系统。
我们称 $\mathbf{S}_1$ 能 **t-退化**为 $\mathbf{S}_2$，当且仅当 $\mathbf{S}_1$ 的所有内定理的 t-翻译是 $\mathbf{S}_2$ 的内定理。┤

令系统 **T** 由 **KA** 中的 TA，K_A，T_A 和 RN_A 构成（使得表述 **T** 的语言中的模态算子只有 K_A）。

翻译定理 1.8

KA 能 t-退化为 **T**。

证明：

据上面的定义，证明显然。┤

定义 1.9

称公理化系统 **S** 是**协调系统**，当且仅当不存在φ使得φ和¬φ都是 **S** 的内定理。┤

定理 1.10

KA 是协调的。

证明：

假设 **KA** 不协调，则存在φ使得φ和¬φ都是 **KA** 的内定理。据上面的翻译定理，t(φ)和¬t(φ)都是系统 **T** 的内定理，矛盾于 **T** 的协调性。┤

2　关系语义和可靠性定理

定义 2.1

（1）称 F＝⟨W, R⟩是**关系框架**，当且仅当

① W 是非空集，

② R 是定义域为(Act×Agent)∪Agent 的映射，使得

对每一<α, A>∈Act×Agent，R(α, A)是 W 上的二元通达关系；　且

对每一 A∈Agent，R(A)也是 W 上的二元通达关系。

（2）称 M＝⟨W, R, [ ]⟩是**关系模型**，当且仅当⟨W, R⟩是关系框架且

③ [ ]是从全体原子公式 At 到 W 的幂集 P(W)中的指派映射。

（3）[ ]也称为框架 F 上的指派映射。┤

说明：

为了简洁和符合书写习惯，以后我们用 $R_{\alpha A}$ 缩写 R(α, A)且用 R_A 缩写 R(A)，即

$R_{\alpha A}$∷＝R(α, A)，　R_A∷＝R(A)。

定义 2.2

令⟨W, R⟩是关系框架。

（1）任给 w∈W，A∈Agent 和α∈Act，

$R_{\alpha A}(w)$∷＝{u∈W：$wR_{\alpha A}u$}，

$R_A(w)$∷＝{u∈W：wR_Au}。

（2）R_α∷＝∪{$R_{\alpha A}$：A∈Agent}。┤

定义 2.3　真值集定义

令 M＝⟨W, R, [ ]⟩是关系模型。

对每一复合公式φ，定义φ相对 M 的**真值集**[φ]如下：任给 w∈W，A∈Agent，α∈Act 和 G⊆Agent，

（1）$w\in[\neg\varphi] \Leftrightarrow w\notin[\varphi]$，

（2）$w\in[\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow w\in[\varphi]$且 $w\in[\psi]$，

（3）$w\in[[\alpha_A]\varphi] \Leftrightarrow R_{\alpha A}(w)\subseteq[\varphi]$，

（4）$w\in[A\alpha] \Leftrightarrow \exists u\in W(uR_{\alpha A}w)$，

（5）$w\in[[\alpha]\varphi] \Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq[\varphi]$， （6）$w\in[G\alpha] \Leftrightarrow \forall A\in G(w\in[A\alpha])$，

（7）$w\in[K_A\varphi] \Leftrightarrow R_A(w)\subseteq[\varphi]$，

（8）$w\in[K_AB] \Leftrightarrow \forall\alpha\in Act(w\in[B\alpha\rightarrow K_AB\alpha])$，

（9）$w\in[K_AG] \Leftrightarrow \forall B\in G(w\in[K_AB])$。┤

说明：

联结符$\vee$，$\rightarrow$和$\leftrightarrow$的真值集定义如通常。

下面我们对(4)的直观意义做一些说明。考虑 W 的任意两个可能世界 w 和 u。任给$\alpha\in Act$和 $A\in Agent$，我们称从 u 到 w 有α-A-指向，当且仅当 $uR_{\alpha A}w$。这样，从 u 到 w 所有的α-A-指向构成一个簇。我们认为恰是这个簇使得 u 改变为 w。换句话说，u 之所以变成 w 是因为某群主体在 u 中做完上述簇表示的全部活动使得 u 变成 w，所以

$A\alpha$在 w 中真 $\Leftrightarrow$ 存在 u 使得 u 到 w 有α- A-指向。

任给关系 R_X，以后我们用$\exists uR_Xw$ 表示$\exists u\in W(uR_Xw)$。

定义 2.4

（1）称关系框架 $F=\langle W, R\rangle$是**刻画知道活动的框架**，简称 F 是 **ka-框架**，当且仅当下列**框架条件**成立：对任意 $w\in W$，$A, B\in Agent$ 和$\alpha\in Act$，

(tk) wR_Aw，

(a1) $\exists uR_{\alpha A}w \Rightarrow wR_{\alpha A}w$，

(a6) $\forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists vR_{\alpha_0B}u) \Rightarrow \forall\alpha\in Act(\exists u_0R_{\alpha B}w \Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists v_0R_{\alpha B}u))$，

(a7) $\sim\exists uR_{\alpha_0B}w \Rightarrow \forall\alpha\in Act(\exists u_0R_{\alpha B}w \Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists v_0R_{\alpha B}u))$。

（2）所有的 **ka**-框架的类记作 Frame(**ka**)。┤

说明：

这里的框架条件的名称对应相应特征公理的名称。

易见(a1)描述了一种相对自返性。

定义 2.5　有效性定义

令 $F=\langle W, R\rangle$是关系框架，$M=\langle W, R, [\ ]\rangle$是关系模型。

（1）我们称φ在 M 中**有效**，记为 $M\vDash\varphi$，当且仅当$[\varphi]=W$；否则称φ在 M 中**不有效**，记为 $M\nvDash\varphi$。

（2）称φ在 F 中**有效**，记为 $F\vDash\varphi$，当且仅当，对 F 上的任意指派映射[ ]，有$[\varphi]=W$；否则称φ在 F 中**不有效**，记为 $F\nvDash\varphi$。

（3）称规则$\varphi_1,\ldots,\varphi_n/\psi$相对 M **保持有效性**，当且仅当，若$[\varphi_1]=\ldots=[\varphi_n]=W$，则$[\psi]=W$。┤

引理 2.6

令 $M=\langle W, R, [\ ]\rangle$是关系模型。则

（1）$[\neg\varphi]=W-[\varphi]$，

$[\varphi\wedge\psi]=[\varphi]\cap[\psi]$，

$[\varphi\vee\psi]=[\varphi]\cup[\psi]$，

$[\bot]=\varnothing$，$[\top]=W$。

（2）$[\varphi]\cap[\varphi\rightarrow\psi]\subseteq[\psi]$。

（3）$[\varphi\rightarrow\psi]=W \Leftrightarrow [\varphi]\subseteq[\psi]$。

（4）$[\varphi\leftrightarrow\psi]=W \Leftrightarrow [\varphi]=[\psi]$。┤

定义 2.7

（1）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架可靠系统**，当且仅当，**S** 的内定理在 ***C*** 的所有框架中有效。

（2）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架完全系统**，当且仅当，在 ***C*** 的所有框架中有效的公式是 **S** 的内定理。┤

定理 2.8　框架可靠性定理

KA 相对框架类 Frame(**ka**)是可靠的。

证明：

任给 **ka**-框架 F＝⟨W, R⟩和 F 上赋值[ ]。

下面验证 **KA** 的公理相对 M＝<F, [ ]>有效且 **KA** 的推理规则相对 M 保持有效性。

公理 TA，$K_{\alpha A}$ 和 K_A，规则 MP，$RN_{\alpha A}$ 和 RN_A 的验证如通常。

验证公理 T_A：任给 $w\in[K_A\varphi]$。据 2.3（7），$R_A(w)\subseteq[\varphi]$，据(tk)，有 $w\in R_A(w)$，所以 $w\in[\varphi]$。

验证公理 A1：任给 $w\in[A\alpha]$。据 2.3（4），有

$$\exists uR_{\alpha A}w。$$

据(a1)，有

（%）$w\in R_{\alpha A}(w)$。

任给公式φ使得 $w\in[[\alpha_A]\varphi]$，据 2.3（3），有

$$R_{\alpha A}(w)\subseteq[\varphi]。$$

再据（%），有 $w\in[\varphi]$。

验证公理 A2：假设$[\alpha_A]A\alpha$在 M 中不有效，则存在 $w\in W$ 使得 $w\notin[[\alpha_A]A\alpha]$。据 2.3（3），

$$R_{\alpha A}(w)\nsubseteq[A\alpha],$$

所以存在 $v\in W$ 使得

① $wR_{\alpha A}v$，　且

② $v\notin[A\alpha]$。

据②和 2.3（4），我们有

$$\sim\exists uR_{\alpha A}v,$$

矛盾于①。

验证公理 A3：先证

（＃）$R_\alpha(w)=\cup\{R_{\alpha A}(w):A\in Agent\}$。

任给 $u\in W$，易见

$u\in R_\alpha(w)\Leftrightarrow u\in(\cup\{R_{\alpha A}:A\in Agent\})(w)$　　据 2.2（2）

$\Leftrightarrow\exists A\in Agent(u\in R_{\alpha A}(w))$　　据集合论的基本知识

$\Leftrightarrow u\in\cup\{R_{\alpha A}(w):A\in Agent\}$。　　据集合论的基本知识

下面验证公理 A3：任给 $w\in W$，我们有

$w\in[[\alpha]\varphi]\Leftrightarrow R_\alpha(w)\subseteq[\varphi]$　　据 2.3（5）

$\Leftrightarrow\cup\{R_{\alpha A}(w):A\in Agent\}\subseteq[\varphi]$　　据（＃）

$\Leftrightarrow\forall A\in Agent(R_{\alpha A}(w)\subseteq[\varphi])$　　据集合论的基本知识

$\Leftrightarrow\forall A\in Agent(w\in[[\alpha_A]\varphi])$　　据 2.3（3）

$\Leftrightarrow w\in[\wedge_{A\in Agent}[\alpha_A]\varphi]$。　　据 2.3（2）

验证公理 A4：任给 $w\in W$，$\alpha\in Act$ 和 $G\subseteq Agent$，我们有

$w\in[G\alpha]\Leftrightarrow\forall A\in G(w\in[A\alpha])$　　据 2.3（6）

$\Leftrightarrow w\in[\bigwedge_{A\in G} A\alpha]$。 据 2.3（2）

验证公理 A5：任给 $w\in[K_AB]$和$\alpha\in Act$，据 2.3（8），有

$w\in[B\alpha\rightarrow K_AB\alpha]$。

验证公理 A6：任给 $w\in[K_AB\alpha_0]$。据 2.3（7），有

$\forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in[B\alpha_0])$，

据 2.3（4），有

$\forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists vR_{\alpha_0 B}u)$。

据(a6)，有

（%） $\forall\alpha\in Act(\exists u_0R_{\alpha B}w \Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists v_0R_{\alpha B}u))$。

据 2.3（4），有

$\forall\alpha\in Act(w\in[B\alpha] \Rightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in[B\alpha]))$。

据 2.3（7），有

$\forall\alpha\in Act(w\in[B\alpha] \Rightarrow w\in[K_AB\alpha])$。

据 2.3（8），有

$w\in[K_AB]$。

验证公理 A7：任给 $w\in[\neg B\alpha_0]$。据 2.3（4），有

$\sim\exists uR_{\alpha_0 B}w$，

据(a7)，有（%），再刚刚证明的结果，有 $w\in[K_AB]$。

验证公理 A8：任给 $w\in W$，$A\in Agent$ 和 $G\subseteq Agent$，我们有

$w\in[K_AG] \Leftrightarrow \forall B\in G(w\in[K_AB])$ 据 2.3（9）

$\Leftrightarrow w\in[\bigwedge_{B\in G} K_AB]$。 据 2.3（2）⊣

假设 $B\alpha_0$ 是内定理。则据公理 A5 和 A6，下列公式是内定理

$K_AB\leftrightarrow K_AB\alpha_0$。

下面我们来证明 $B\alpha_0$ 不可能是内定理。

反例 2.9

构造关系框架 $F=\langle W, R\rangle$如下：

① $W=\{w\}$，

② 定义 R 是定义域为$(Act\times Agent)\cup Agent$ 的映射，使得

对每一$<\alpha, A>\in Act\times Agent$，$R_{\alpha A}=\varnothing$； 且

对每一 $A\in Agent$，$R_A=\{<w, w>\}$。

易见

（1）F 满足 2.4 的 4 个框架条件，所以 F 是 **ka**-框架。

（2）$F\nvDash B\alpha_0$。

假如 $B\alpha_0$ 是内定理。则据（1）和上面的可靠性定理，$B\alpha_0$ 在 F 中有效，矛盾于（2）。⊣

3 完全性定理

定义 3.1

令 w 是公式集。

（1）称 w 是**一致集**，当且仅当对所有有穷公式序列$\varphi_1,\ldots, \varphi_n\in w$，有

$\nvdash \neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$。

（2）称 w 是**极大集**，当且仅当对所有$\varphi\in Form$，有$\varphi\in w$ 或$\neg\varphi\in w$。

（3）称 w 是**极大一致集**，当且仅当 w 既是一致的又是极大的。

（4）称 **KA** 是**一致系统**，当且仅当 Th(**KA**)是一致的。┤

引理 3.2

KA 是一致的。

证明：

假设 **KA** 不一致。则 Th(**KA**)不一致，所以存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in$ Th(**KA**)使得

$$\vdash \neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)。$$

另一方面，因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in$ Th(**KA**)，所以易证

$$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n。$$

据定义 1.9，**KA** 不协调，矛盾于定理 1.10。┤

因为 **KA** 是 **PC** 的扩充，所以如通常证明，我们可以得到下面几个结果。

Lindenbaum-引理 3.3

令 w 是一致的公式集。则存在极大一致集 u 使得 $w\subseteq u$。┤

引理 3.4

（1）令 w 是极大一致集。则

$\neg\varphi\in w \Leftrightarrow \varphi\notin w$，

$\varphi\wedge\psi\in w \Leftrightarrow \varphi\in w$ 且$\psi\in w$，

$\varphi\vee\psi\in w \Leftrightarrow \varphi\in w$ 或$\psi\in w$，

$\varphi\in w$ 且$\vdash \varphi\to\psi \Rightarrow \psi\in w$，

$\varphi\in w$ 且$\varphi\to\psi\in w \Rightarrow \psi\in w$，

$(\varphi\in w \Rightarrow \psi\in w) \Leftrightarrow \varphi\to\psi\in w$，

$(\varphi\in w \Leftrightarrow \psi\in w) \Leftrightarrow \varphi\leftrightarrow\psi\in w$。

（2）令 w 是极大一致集。则 Th(**KA**)$\subseteq$w。

（3）φ属于每一以 w 为子集的极大一致集，当且仅当，存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w$ 使得

$$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi。$$

（4）若$\nvdash \varphi$，则存在极大一致集 w 使得$\varphi\notin w$。┤

定义 3.5

$|\varphi|$∷＝{w：w 是极大一致集使得$\varphi\in w$}。┤

引理 3.6

令 W 是所有极大一致集的集合。

（1）$|\neg\varphi|=W-|\varphi|$，

$|\varphi\wedge\psi|=|\varphi|\cap|\psi|$，

$|\varphi\vee\psi|=|\varphi|\cup|\psi|$，

$|\bot|=\varnothing$，$|\top|=W$。

（2）$|\varphi|\cap|\varphi\to\psi|\subseteq|\psi|$。

（3）$|\varphi\to\psi|=W \Leftrightarrow |\varphi|\subseteq|\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi\to\psi$。

（4）$|\varphi\leftrightarrow\psi|=W \Leftrightarrow |\varphi|=|\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi\leftrightarrow\psi$。┤

定义 3.7

令 w 是公式集。

$w^{-[\alpha_A]}$∷＝{φ：$[\alpha_A]\varphi\in w$}，

$w^{+<\alpha_A>}$∷＝{<α>φ：$\varphi\in w$}，

w^{-K_A}∷＝{φ：$K_A\varphi\in w$}。┤

引理 3.8

令 W 是所有极大一致集的集合，令 $w\in W$。则

（1）$[\alpha_A]\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-[\alpha_A]}\subseteq u \Rightarrow \varphi\in u)$。

（2）$w^{-[\alpha_A]}\subseteq u \Leftrightarrow u^{+<\alpha_A>}\subseteq w$， 对所有 $u\in W$。

（3）$K_A\varphi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-K_A}\subseteq u \Rightarrow \varphi\in u)$。

证明：

（1）

"⇒"：设$[\alpha]\varphi\in w$。任给 $u\in W$ 使得 $w^{-[\alpha_A]}\subseteq u$。因为$[\alpha]\varphi\in w$，所以$\varphi\in u$。

"⇐"：设

① 任给 $u\in W$，若 $w^{-[\alpha_A]}\subseteq u$，则$\varphi\in u$。

这意味φ属于每一以 $w^{-[\alpha_A]}$为子集的极大一致集。据引理 3.4（3），存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-[\alpha_A]}$使得

② $\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\varphi$。

据 1.5（3），我们有

③ $\vdash [\alpha_A]\varphi_1\wedge\ldots\wedge[\alpha_A]\varphi_n\rightarrow[\alpha_A]\varphi$。

因为$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in w^{-[\alpha_A]}$，所以$[\alpha_A]\varphi_1,\ldots,[\alpha_A]\varphi_n\in w$，所以据③和 3.4（1），有$[\alpha_A]\varphi\in w$。

（2）

"⇒"：任给 $u\in W$ 使得 $w^{-[\alpha_A]}\subseteq u$。任给$<\alpha_A>\varphi\in u^{+<\alpha_A>}$，则$\varphi\in u$，所以$\neg\varphi\notin u$。再据给定 $w^{-[\alpha_A]}\subseteq u$，有$\neg\varphi\notin w^{-[\alpha_A]}$，所以$[\alpha_A]\neg\varphi\notin w$，所以$\neg[\alpha_A]\neg\varphi\in w$，因此据缩写定义，有$<\alpha_A>\varphi\in w$。

"⇐"：任给 $u\in W$ 使得 $u^{+<\alpha_A>}\subseteq w$。任给$\varphi\in w^{-[\alpha_A]}$，则$[\alpha_A]\varphi\in w$，所以据 1.5（2），有 $\neg<\alpha_A>\neg\varphi\in w$，因此$<\alpha_A>\neg\varphi\notin w$。再据 $u^{+<\alpha_A>}\subseteq w$，有$<\alpha_A>\neg\varphi\notin u^{+<\alpha_A>}$，所以$\neg\varphi\notin u$，因此$\varphi\in u$。

（3）的证明类似（1）的证明，只是用到 1.5（4）。┤

定义 3.9

（1）定义 **KA** 的**典范框架** F＝<W, R>如下：

① W＝{w：w 是极大一致集}，

② R＝{$R_{\alpha A}$：$<\alpha, A>\in Act\times Agent$}∪{$R_A$：$A\in Act$}，使得

$R_{\alpha A}=\{<w, u>\in W^2$：$w^{-[\alpha_A]}\subseteq u\}$，　对每一$<\alpha, A>\in Act\times Agent$；

$R_A=\{<w, u>\in W^2$：$w^{-K_A}\subseteq u\}$，　对每一 $A\in Agent$。

（2）定义 **KA** 的**典范模型** M＝<W, R, [ ]>如下：<W, R>是 **KA** 的典范框架，且

③　[p]＝|p|，　对每一原子公式 p。┤

说明：

据引理 3.2，**KA** 一致，所以 W 非空，因此 F 和 M 是良定义的。

典范框架主引理 3.10

令<W, R>是 **KA** 的典范框架，且令 $w\in W$。则

（1）$A\alpha\in w \Leftrightarrow \exists uR_{\alpha A}w$。

（2）$K_AB\in w \Leftrightarrow \forall\alpha\in Act(B\alpha\rightarrow K_AB\alpha\in w)$。

证明：

（1）

"⇒"：设 $A\alpha\in w$。先证

①　$w^{+<\alpha_A>}$是一致的。

假设①不成立，则存在$<\alpha_A>\varphi_1, \ldots, <\alpha_A>\varphi_n\in w^{+<\alpha_A>}$使得

②　$\vdash\neg(<\alpha_A>\varphi_1\wedge\ldots\wedge<\alpha_A>\varphi_n)$。

据 1.5（5），有

③　$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\neg A\alpha$。

因为$<\alpha_A>\varphi_1, \ldots, <\alpha_A>\varphi_n\in w^{+<\alpha_A>}$，所以$\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in w$，因此$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\in w$，再据③，有$\neg A\alpha\in w$，矛盾于设定。所以①成立。

据①和 Lindenbaum-引理，

$\exists u\in W(w^{+<\alpha_A>}\subseteq u)$，

再据 3.8（2），我们证明了

④　$\exists u\in W(u^{-[\alpha_A]}\subseteq w)$，

所以有

⑤　$\exists uR_{\alpha A}w$。

"⇐"：设 $A\alpha\notin w$。只须证：

⑥　$\sim\exists uR_{\alpha A}w$。

假设⑥不成立，则有⑤，所以有④。因为 $A\alpha\notin w$，所以据④，$A\alpha\notin u^{-[\alpha_A]}$，因此$[\alpha_A]A\alpha\notin u$。而据 3.4（2），公理$[\alpha_A]A\alpha$属于 u。矛盾。

（2）

"⇒"：设 $K_AB\in w$。据公理 A5，显然有

$\forall\alpha\in Act(B\alpha\rightarrow K_AB\alpha\in w)$。

"⇐"：设 $K_AB\notin w$。只须证：

①　$\exists\alpha\in Act(B\alpha\in w$ 但 $K_AB\alpha\notin w)$。

再据 3.8（3），只须证：

② $\exists\alpha\in Act(B\alpha\in w$ 但$\exists u\in W$ 使得 wR_Au 且 $B\alpha\notin u)$。

我们先证

③ $w^{-K_A}\cup\{\neg B\alpha_0\}$是一致的。

假设③不成立，则存在$\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in w^{-K_A}$使得

$\vdash \varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow B\alpha_0$。

再据 1.5（4），有

④ $\vdash K_A\varphi_1\wedge\ldots\wedge K_A\varphi_n\rightarrow K_AB\alpha_0$。

因为$\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in w^{-K_A}$，所以 $K_A\varphi_1, \ldots, K_A\varphi_n\in w$，再据④，易证 $K_AB\alpha_0\in w$，再据公理 A6，有 $K_AB\in w$，矛盾于设定。所以③成立。

据③和 Lindenbaum-引理，我们有

⑤ $\exists u\in W$ 使得 wR_Au 且 $B\alpha_0\notin u$。

另一方面，因为 $K_AB\notin w$，所以$\neg K_AB\in w$，据公理 A7，有 $B\alpha_0\in w$。再加上⑤，我们最终有②。⊣

定理 3.11　典范模型基本定理

令 $M=<W, R, [\ ]>$是 **KA** 的典范模型。

（1）$\varphi\in w \Leftrightarrow w\in[\varphi]$，　对每一 $w\in W$ 和公式φ。

（2）$|\varphi|=[\varphi]$，　对每一公式φ。

证明：

（2）从（1）易得。所以我们只须证（1）。

施归纳于φ的结构。

情况 1　φ是原子公式：据定义 3.9 的③。

情况 2　$\varphi=\neg\psi$：如通常所证。

情况 3　$\varphi=\psi\wedge\theta$：如通常所证。

情况 4　$\varphi=[\alpha_A]\psi$：易见

$[\alpha_A]\psi\in w \Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-[\alpha_A]}\subseteq u \Rightarrow \psi\in u)$　　据 3.8（1）

$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow u\in|\psi|)$　　据定义 3.9 的②和 3.5

$\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_{\alpha A}u \Rightarrow u\in[\psi])$　　据归纳假设

$\Leftrightarrow w\in[[\alpha_A]\psi]$。　　据 2.3 的（3）

情况 5　$\varphi=A\alpha$：我们有

$A\alpha\in w \Leftrightarrow \exists uR_{\alpha A}w$　　据上一引理（1）

$\Leftrightarrow w\in[A\alpha]$。　　据 2.3 的（4）

情况 6　$\varphi=[\alpha]\psi$：我们有

$[\alpha]\psi\in w \Leftrightarrow \bigwedge_{A\in Agent}[\alpha_A]\varphi\in w$　　据公理 A3 和 3.4（1）

$\Leftrightarrow \forall A\in Agent([\alpha_A]\varphi\in w)$　　据 3.4（1）

$\Leftrightarrow \forall A\in Agent(w\in[[\alpha_A]\varphi])$　　据情况 4 的证明

$\Leftrightarrow w\in[\bigwedge_{A\in Agent}[\alpha_A]\varphi]$　　据 2.3（2）

$\Leftrightarrow w\in[[\alpha]\psi]$。　　据 2.8 的证明中对 A3 验证的最后部分

情况 7　$\varphi=G\alpha$：我们有

$G\alpha\in w \Leftrightarrow \bigwedge_{A\in G}A\alpha\in w$　　据公理 A4 和 3.4（1）

$\Leftrightarrow \forall A\in G(A\alpha\in w)$　　据 3.4（1）

$\Leftrightarrow \forall A\in G(w\in[A\alpha])$　　据情况 5 的证明

$\Leftrightarrow w\in[G\alpha]$　　据 2.3（6）

情况 8　$\varphi = K_A\psi$：易见

$$
\begin{aligned}
K_A\psi\in w &\Leftrightarrow \forall u\in W(w^{-K_A}\subseteq u \Rightarrow \psi\in u) && \text{据 3.8（3）}\\
&\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in|\psi|) && \text{据定义 3.9 的②和 3.5}\\
&\Leftrightarrow \forall u\in W(wR_Au \Rightarrow u\in[\psi]) && \text{据归纳假设}\\
&\Leftrightarrow w\in[K_A\psi]。 && \text{据 2.3 的（7）}
\end{aligned}
$$

情况 9　$\varphi = K_AB$：我们有

$$
\begin{aligned}
K_AB\in w &\Leftrightarrow \forall\alpha\in Act(B\alpha\to K_AB\alpha\in w) && \text{据上一引理（2）}\\
&\Leftrightarrow \forall\alpha\in Act(w\in|B\alpha| \Rightarrow w\in|K_AB\alpha|) && \text{据 3.5}\\
&\Leftrightarrow \forall\alpha\in Act(w\in[B\alpha] \Rightarrow w\in[K_AB\alpha]) && \text{据情况 5 和情况 8 的证明}\\
&\Leftrightarrow w\in[K_AB]。 && \text{据 2.3 的（7）}
\end{aligned}
$$

情况 10　$\varphi = K_AG$：我们有

$$
\begin{aligned}
K_AG\in w &\Leftrightarrow \textstyle\bigwedge_{B\in G} K_AB\in w && \text{据公理 A8 和 3.4（1）}\\
&\Leftrightarrow \forall B\in G(K_AB\in w) && \text{据 3.4（1）}\\
&\Leftrightarrow \forall B\in G(w\in[K_AB]) && \text{据情况 9 的证明}\\
&\Leftrightarrow w\in[K_AG]。 && \text{据 2.3（9）}\dashv
\end{aligned}
$$

定理 3.12

令 M 是 **KA** 的典范模型。则对每一公式φ，

$$M\vDash\varphi \Leftrightarrow \vdash\varphi。$$

证明：

$$
\begin{aligned}
\vdash\varphi &\Leftrightarrow |\varphi| = W && \text{据引理 3.4（2）和（4）}\\
&\Leftrightarrow [\varphi] = W && \text{据上一定理}\\
&\Leftrightarrow M\vDash\varphi && \text{据有效性定义 2.5。}\dashv
\end{aligned}
$$

引理 3.13

KA 的典范框架是 **KA**-框架。

证明：

令 F＝<W, R>是 **KA** 的典范框架。下面我们来验证 F 满足定义 2.4 给出的框架条件。

验证(tk)：任给 $w\in W$。据公理 T_A，有

$$K_A\varphi\to\varphi\in w，\quad 对所有公式\varphi。$$

由此易证 $w^{-K_A}\subseteq w$。所以 wR_Kw。

验证(a1)：设$\exists uR_{\alpha A}w$。据 3.10（1），有 $A\alpha\in w$。据公理 A1，有

$$[\alpha_A]\varphi\to\varphi\in w，\quad 对所有\varphi\in Form。$$

所以

$$[\alpha_A]\varphi\in w \Rightarrow \varphi\in w。$$

因此易证 $wR_{\alpha A}w$。

验证(a6)：设

$$\forall u\in W(wR_Au \Rightarrow \exists vR_{\alpha_0 B}u)。$$

据 3.10（1），有

$$\forall u\in W(wR_Au \Rightarrow B\alpha_0\in u)。$$

据 3.8（3），有 $K_AB\alpha_0\in w$。据公理 A6，有 $K_AB\in w$。再据 3.10（2），有

$$\forall\alpha\in Act(B\alpha\to K_AB\alpha\in w)。$$

所以

$$\forall\alpha\in Act(B\alpha\in w \Rightarrow K_AB\alpha\in w)。$$

因此再据 3.10（1）和 3.8（3），有

（%）$\forall\alpha\in Act(\exists u_0 R_{\alpha B} w \Rightarrow \forall u\in W(wR_A u \Rightarrow \exists v_0 R_{\alpha B} u))$。

验证(a7)：设

$\sim\exists u R_{\alpha_0 B} w$。

据 3.10（1），有$\neg B\alpha_0\in w$。据公理 A7，有 $K_A B\in w$。剩下验证如上。┤

定理 3.14 框架完全性定理

KA 相对框架类 Frame(**ka**)是完全的。

证明：

只须证：

(%) 若φ不是 **KA** 的内定理，则φ在某个 **ka**-框架中不有效。

设φ不是 **KA** 的内定理。令 M＝<W, R, [ ]>是 **KA** 的典范模型。据设定和定理 3.12，有 M$\nvDash$φ，所以<W, R>$\nvDash$φ。再据上一引理，<W, R>是 **ka**-框架，所以(%)成立。┤

上述逻辑表达了我们对知道主体的理解：

“我知道你”，当且仅当，“我知道你做过的所有活动”。

这样的“知道”的意义确实太强。在日常生活中，我们说“我知道你”应该采用更弱的表达：

“我知道你”，当且仅当，“我知道你做过的所有典型的活动”。

这里的典型活动不应该包括当前所有主体都做过的活动、或者你做过的无足轻重的活动。

典型活动指什么？我们还需要进一步研究。

参考文献:

[1] 李小五. 模态逻辑讲义. 中山大学出版社, 2005.9.

[2] D. Harel, D. Kozen, J. Tiuryn. Dynamic Logic[M]. The MIT Press, 2000.

[3] A. Baltag, L. S. Mose and S. Solecki. The Logic of Public Announcement，2003. 网上下载。

[4] 刘壮虎，李小五. 对动作的认知[J]. 湖南科技大学学报，社会科学版, 2005, (3).

I know you——Logic of knowing agents

LI Xiao-wu

(Institute of Logic and Cognition of Zhongshan University 510275, Guangdong, China)

Abstract: Firstly, we construct the system **KA** of knowing agents, give some results of its proof theory. Secondly, we introduce the relation semantics, give the frame conditions of the character axioms of **KA**, prove the frame soundness of **KA** with respect to the frame conditions. Finally, we prove the frame completeness of **KA** with respect to the frame conditions as well.

Key words: system **KA** of knowing agents; relation semantics; frame soundness; frame completeness