非欧几何发展中的若干认识论问题

冯　进
(常熟高等专科学校数学系,江苏 常熟 215500)

摘　要: 非欧几何在数学史上具有重要而特殊的地位. 本文从认识论的角度,论述非欧几何发展中第一次遇到的数学对象的存在性、数学理论的相容性、数学体系的和谐性以及数学结论的真理性等问题,从中折射出它对数学发展的巨大推动作用。

关键词: 非欧几何;认识论;存在性;相容性;和谐性;真理性
中图分类号:N033;N09　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1003 - 5680(2003)03 - 0057 - 06

19 世纪 30 年代非欧几何的诞生,标志着长达两千多年的关于欧氏几何第五公设问题探索取得了突破性进展,对现代数学及相对论的发展具有极其重大的推动作用。非欧几何思想的发展有众多论著专门论述,它在数学史及科学史上的意义几乎是其他数学知识所无法相比的,对此,美国著名数学史家 M·克莱因这样评述:"在 19 世纪所有复杂的技术创造中间,最深刻的一个,非 Euclid 几何学,在技术上是最简单的,这个创造引起数学的一些重要新分支,但它的最重要的影响是迫使数学家们从根本上改变对数学的性质的理解,以及它和物质世界的关系的理解,并引出关于数学基础的许多问题,这些问题在 20 世纪仍然在进行着争论。"[1]

数学知识的增长,包括数学概念的提出、数学命题的证明、数学理论的建立等,是数学发展的重要表现,同时,也是人们对数学的不断理解与认识的过程;反之,对数学的深入理解,以及对数学思想的透彻认识,同样也推动着数学的发展,有时甚至会产生革命性的变革。非欧几何的诞生正是具有这种意义,甚至"在整个思想史中,从来没有发生过具有如此强烈影响的事件"[2]。本文着重于认识的角度,从数学对象的存在性、数学理论的相容性、数学体系的和谐性、数学结论的真理性四个方面,论述非欧几何对数学发展的这种双重影响。这四个方面,是非欧几何产生后引起的数学上,更重要的是认识上的问题,也是有史以来(至 19 世纪初)数学界第一次遇到的关于数学的全新的认识论问题。

一　第五公设问题探索:二千年努力引来对数学及其性质看法的本质变化

经典数学几乎都是以现实世界为基本模型,数学结论总体上直接反映了客观事物的基本性质与运动规则,大量的生产、生活、天文观察实践,以及对这些实践的理性思考,使古代数学家确信宇宙万物是由数字构成的,甚至幻想整个世界就是数学,从毕达哥拉斯提出"万物皆数",到柏拉图的"理念世界",以及中世纪后的"上帝按数学方式设计宇宙",无一不是将数学作为是自然的本质。

坚持"自然的数学设计"信念的原因来自两大方面,一是古希腊人创立的逻辑推理方法,以及由此而产生的严谨的欧氏几何体系。逻辑思维方法的创立是古希腊人对人类文明的最大贡献,欧氏几何不仅是理性思维的经典蓝本,且它的不证自明的公理、及由此推出的一系列让人不得不接受的结论,为数学设计构建了坚实的基础;二是 18 世纪以前几乎所有的科学实践都佐证了"自然的数学设计"。毕达哥拉斯时代就已经精确地知道弦发出的声音与弦长的关系;开普勒坚信上帝按某个简单、优美的数学方案设计了世界,他的行星运动三定律将哥白尼的理论作了最大简化,准确地描述了行星运动规律;牛顿的万有引力及力学三定律则将数学设计的信念推崇之极点,他为自己的工作能揭示无所不在的上帝之秘密而倍感欣慰。所有这些实践,事实上都是以欧氏几何为基本空间框架构建的。因此,二千多年来的理性思维活动、科学研究实践以及传统习惯感受,都把欧几里得体系当作神圣不可侵犯的"圣书",以至于"神明"之士宁愿对着欧几里得定理发誓,而不愿对着"圣经"发誓。几乎所有的人都深信:欧氏几何就是真理。

然而,由于欧氏几何是建立在直观自明的公理基础上的,其"自明性"要求与古希腊人追求理性的一贯"天性",使

【收稿日期】 2002 - 08 - 08
【作者简介】 冯　进(1958 -),男,江苏常熟人,常熟高等专科学校数学系副教授,从事数学教育、数学思想史的学习与研究。

《几何原本》一问世就成为众多数学家、哲学家审视的对象。与《原本》整体的完美性相比,其中的一些错误和那么不直观的结论总让人忐忑不安,包括欧几里得在内的少数"神明"之士一开始就被公理系统中的二条公理(公设)所困惑:一是直线段的双向无限延长性;二是后被称为平行公理的第五公设,即若一直线与两直线相交,且若同侧所交两内角之和小于两直角,则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。欧氏有意识地避免使用"两直线无限延长后不相交"的词语。这两条公理都涉及无限,线段无限延长后是否一定"直",两平行的直线无限延长后是否一定不相交,都已无法被直接感受而自明。就直观而言,即使在有限范围内观察两平行直线,也会给人以透视效果而感觉是渐渐地靠近。为避免异议,欧氏自己也十分谨慎地使用它们,他基本上没有用到线段的无限延伸性,仅在需要时将线段延伸到适当的长度,对第五公设更是小心翼翼、极少使用,尽量推迟或避免,一直到命题 29 才用到第五公设。对《原本》的审视,最终聚焦于第五公设,原因在于:(1) 其表述繁琐,不像其他公理、公设简洁明了;(2)缺乏直观自明性;(3) 欧几里得自己也审慎应用。5 世纪评论家普洛克鲁斯(Proclus,公元 410 - 485,希腊) 在关于《原本》的《评注》中说:"它完全应该从全部公理中剔除出去,因为它是一个包含许多困难的定理"[3]。为了使《原本》更完美,数百名数学家为此做出了极大的努力,他们或是希望从其它公理推出它,从而真正将其踢出公理系统,或是试图找出更为简洁自明的公理替代它,以保持公理体系的"纯洁"。但长期的努力均以失败告终,直到 19 世纪它仍堂而皇之地占据着公理之席,成为数学史上历史最悠久的数学难题,这种状况曾被法国数学家达朗贝尔(J. R. D'Alembert,1717 - 1783) 称为是"几何原理中的家丑"(1759)。

解决第五公设问题期间,即非欧几何诞生前的两千多年中,尽管《原本》一直受到批评与怀疑,但它的简洁、完备、严密、统一等又受到极度的推崇,谁也不怀疑它是现实世界的唯一描述,即使对它的批评与怀疑,也完全是为了让它更加完美。哲学家大卫·休谟(D·Hume,1711 - 1776,苏格兰) 1739 年在《人性论》中否定因果关系,特别是欧氏几何定律未必是物理真理时,也只是极个别人的一种心理推断,缺乏牢靠的科学依据。欧氏几何的观念是根深蒂固的,这不仅是一种数学的,可以说是整个科学的甚至是社会的观念,以致当耶稣会牧师、帕维尔大学数学教师萨凯里(G·Saccheri,1667 - 1733,意大利)用"过直线外一点至少有二条直线与原直线平行"替代第五公设而获得许多令人惊异却并无矛盾的结果时,仍一味鼓吹《欧几里得无懈可击》(他写于 1733 年的一本书),甚至当高斯(Gauss,1777 - 1855,德国) 第一个真正明确到欧氏几何不是自然的唯一描述时,仍不敢轻易打破这种平衡。

事实上,第五公设问题不仅是纯粹的数学难题,也是关于物质空间的一个真正的、基本的物理问题,嗣后的发展表明,它不仅涉及数学的技术、方法及本性,甚至还涉及许多普遍的哲学问题,对数学、科学、哲学、宗教都产生了革命性的影响,革命性发展的第一步在于深刻地认识到第五公设的独立性,它不能由其他九条公理(公设) 推出。

二 数学对象的存在性:思维方式的转变是非欧几何产生的根本原因

数学对象的存在性应属于数学哲学的本体论问题。由于数学学科的特殊性,其研究对象不是直接的客观事物,而是离开具体事物的抽象的、形式化的内容,或者说是抽象地存在于事物之中的量的规定性(包括数与形的性质),这在数学成为一门系统的学科之前,古希腊著名哲学家亚里士多德(Aristotle,公元前 384 - 前 322) 就已对此有了明确的认识。换言之,数学的研究对象是一些思想材料。这就使得数学对象的存在性问题,长期以来一直作为数学本体论的一个主要问题而被关注并引起争论。争论的焦点在于,数学研究的对象是不是客观世界的真实存在? 实际上直到现在它仍是个没有完全解决的问题。这里,我们仅从非欧几何诞生过程中对新几何对象的认识,来论述思维方式及数学观念的变化对数学发展的影响。

17 世纪以前,经典数学研究的对象主要是以现实世界的具体事物为直接原型的数量关系与空间形式,就是到 17、18 世纪进入"变量"数学时期,解析几何与微积分仍然没有离开这一基本的"关系"与"形式"。因此可以说,19 世纪以前,数学的研究对象具有很强的"直观性",即数学研究的是"看得见"的数量关系与"摸得着"的空间形式。即使期间出现例外的对象,如无理数、负数、复数、无穷小量等,毕竟也是"偶尔"有之,并且不管它们如何不合"常规",至少仍然能满足"感觉得到"的关系或形式,如负数、复数是某些方程的解。一旦超越了这种"直观的感觉",其存在性问题就会显现,例如,涉及到无穷对象、非构造的存在性证明等,就无法"直接"感觉,从而会产生疑虑。那么这种由"逻辑"产生的数学对象算不算"存在",如何看待这种存在性,就成为数学本体论问题长期争论的一个重要问题。大多数数学家认为应该认可这种"存在性",但直觉主义数学家觉得,只有真正"拿得出",即在有限步之后能构造得出的数学对象,才能被接受。从这个意义上说,数学对象的存在性问题"归根到底是一个认识论问题,即如何看待逻辑推导出来的数学对象的问题"[4]。

在第五公设问题两千年的探索中,都以原有的数学框架与思维模式进行思考,希望从正面加以说明,以完善整个欧氏几何体系。这种努力可分为两类,一是试图用更自明的公理来替代它;二是用其他公理证明它,从而简化公理系统。结果发现,用来替换第五公设的命题,或其自明性也成问题,或者形式上比第五公设更加复杂。正面证明第五公设的努力从公元前就已开始,古希腊学者普赛德纽斯(Poseidonius,公元前 135 - 前 51)[5]是最早试图证明第五公设的人之一。之后,托勒密(Ptolemy,约 90 - 168,埃及)、普洛克鲁斯,及以后许多代有名望的数学家都为此而努力过,最终发现,他们要么无法证明,要么用了一些新的、有待证明的命题作为前提来证明第五公设,从而陷入循环论证。这过程中引出了许多这类命题,其中最著名、最简洁的一个就是:平面上过直线外一点只能引一条直线与已知直线不相交,它最早在普洛克

鲁斯的《评注》中,出现在对《原本》一个命题的注释里,普来费尔(J·Playfair,1748－1819,苏格兰)1795年把它作为一个公理给出。

从欧氏几何走向非欧几何的遥远路途中,萨凯里的思想可以说具有重要的里程碑作用。他将直线外一点处的平行线作了如下分类:过这点(a)恰好有一条直线与之平行;(b)没有直线与之平行;(c)至少有两条直线与之平行。他希望能用(b)、(c)代替第五公设后能推出矛盾,从而肯定只有(a)成立。他确实从(b)与其他公理出发导出了矛盾,对(c)虽然没有导出矛盾,但他不敢面对由此得到的稀奇古怪的结论,最后还是不了了之,以《欧几里得无懈可击》作为他对欧氏几何最终的忠实辩护。19世纪以前的许多数学家都与萨凯里一样,二千多年的思维习惯已将数学家应有的创造力与判断力降至最低。历史的发展表明,萨凯里对平行线的上述分类是完全的、和谐的,罗巴契夫斯基几何与黎曼几何以极其完美的形式证实了这种和谐性(需对两点决定一直线另作理解)。

萨凯里的思想又经过了近一百年的深刻认识,才逐渐为越来越多的数学家接受与发展。克吕格尔(G·S·Klügel,1739－1812,德国)、兰伯特(J·H·Lambert,1728－1777,瑞士)与施魏卡特(F·K·Schweikart,1780－1859,德国)等都已认识到非欧几何的存在性[6]。19世纪上半叶,是几何学革命的真正春天,高斯、罗巴切夫斯基(N·Lobatchev sky,1792－1856,俄国人)和鲍耶(J·Bolyai,1802－1860,匈牙利)几乎同时发现了非欧几何,尽管高斯最早发现了非欧几何,但他仍忧于欧氏几何的阴影未敢公开,直至他去世才被人们认识。罗巴契夫斯基与鲍耶虽以非凡的胆识,冲破传统的思维习惯,公开发表了他们的研究成果,但其重要性也在三十多年后才被慢慢认识。真正将非欧几何作为数学对象来肯定,还须从理论与实践两方面加以检验,至少应先从逻辑上论证它是一个无矛盾的数学体系。

三　数学理论的相容性:相对相容性的证明是非欧几何可接受的必要前提

相容性即无矛盾性。现代数学对公理系统的基本要求是:相容性、独立性与完备性。相容性是任何一个数学理论可接受的必要前提。欧氏几何两千多年的历史至少在下列两方面表明它是可信的,一是从它的公理出发从没有推出过矛盾的结论;二是现实世界的很多关系可以用欧氏几何加以直观描述,19世纪以前物理学的许多重要成果都是建立在欧氏几何框架之上。长期的考验,形成一种强烈的、几乎不可改变的信念,即现实世界或物理世界一定是欧氏几何的。直到19世纪末,非欧几何创立近六十年后,仍有人为这种信念辩护,F·克莱因(F·Klein,1849－1925,德国)和凯莱(A·Cayley,1821－1895,英国)都持这种观点,尽管他们本人也从事过非欧几何的研究。凯莱1883年在一次公开演讲中强调:第五公设“不需要证明,它是我们的空间概念的一部分。……,欧氏几何长期以来一直被当作是我们经验的物理空间,所以几何学的命题对于欧氏空间不仅仅是近似的真实,而且是绝对真实的”[7],这种信念与辩护在相对论以前似乎是无可非议的。

非欧几何的出现,从长期的经验来看,上述两方面是必须考虑的问题。首先,非欧几何是否是一个合理的、无矛盾的几何体系,这不是仅凭由它的公理出发没有推出矛盾可以简单地加以肯定的;其次,它在物理世界有无用处,这在19世纪以前的数学中是个非常现实与功利的问题。

非欧几何创立后,三位创立者高斯、罗巴契夫斯基、J·鲍耶从各自的角度出发,都考察过其合理性。高斯从应用的角度,希望通过测量来验证非欧几何,罗氏则从应用、教育、哲学等角度进行了分析,甚至还接近于获得后来被称为克莱因——贝尔特拉米模型的解释,J·鲍耶则从纯数学的角度作了思考,但他们都没能证明这种逻辑相容性。J·鲍耶为自己不能证明非欧几何的无矛盾性而十分苦恼。事实上,这种相容性的严格的考虑在数学史上还是第一次。在欧氏几何盛行的二千多年中,谁也没有对这种相容性作过仔细考虑,实际上这是一个深刻而复杂的问题,即使到现在仍只是直观地接受或相对地证明,而没有严格意义下的欧氏几何相容性的证明。

非欧几何由于背离直觉,要求考察其相容性也极其自然。通常为证得一命题的正确,可直接证明或用反证法排除其反面。然而,对第五公设既无法正面证明,又无法从反面推出矛盾。这样,非欧几何也就无法用传统方法来判断其真实性。数学的发展往往是各分支相互影响、相互促进的,正如W·鲍耶(J·鲍耶的父亲)所说:“春天一到,紫罗兰到处可见”,这不仅在非欧几何的发展中可见一斑,在整个数学发展中同样如此,在几何学突破传统空间观念后不久,算术领域也打破了原有的结构枷锁,哈密尔顿(W·Hamilton,1805－1865,英国)四元数的发明被称为“代数学的解放”。同样,当人们为证明非欧几何的相容性问题而烦恼时,高斯的曲面几何,它几乎与非欧几何是同时发展的,给解决相容性问题带来了希望。按照高斯的观点,曲面上几何的性质,不必用原有欧氏几何的性质去研究,而可将曲面自身看作是一个基本的空间,比如,曲面上两点间的距离是指贴着曲面的曲线中的最短线(也叫测地线),有时也将曲面上的几何叫内蕴几何。意大利几何学家贝尔特拉米(E·Beltrami,1835－1900)最早注意到高斯的观点,于1868年利用内蕴几何学构造了一个叫伪球面的旋转曲面,它由曳物线绕一轴旋转而成,罗氏几何恰好在这样的曲面上可以部分地满足,这样就在欧氏空间中构造出了第一个非欧几何的模型,让所有人第一次“看见”了非欧几何,为解决非欧几何的相容性开辟了一条新的途径,也为其他非欧几何相容性的证明提供了方法,这种方法最终发展成现代数学中一种重要的公理化方法——模型方法。

自贝尔特拉米发现第一个非欧几何模型后,相继有多种罗氏几何模型出现,如F·克莱因(1870)和庞加莱(1882)模型。克莱因的模型不仅比贝尔特拉米的简单,而且真正全部实现了罗氏几何的无矛盾性问题,他的模型是欧氏几何平面中的一个圆的内部,罗氏几何的定理与圆内欧氏几何的定理

完全可以相互翻译,从而将非欧几何的相容性与欧氏几何的相容性牢牢地捆绑在一起,这种相对相容性的解释使非欧几何成为不可否认的几何事实。值得指出的是,19 世纪非欧几何的相容性问题与 18 世纪分析严密化对 20 世纪数学发展产生了重大影响,元数学(证明论)、模型论、公理集合论等的发展都与这些相关,20 世纪初关于数学基础的论战,也与此不无关系。相对相容性的证明,不仅让非欧几何重现直观,使非欧几何的相容性问题得以相对解决,也使欧氏几何的真实性受到挑战,其相容性立即成为众所关注的目标,尽管它有良好的物质基础,但严格的逻辑性要求却不能使这种相容性成为公认的事实,希尔伯特将欧氏几何的相容性问题归结为自然数算术系统的相容性(高斯对这点也早有明确认识),自然数系统的相容性最终归结为集合论的相容性,遗憾的是,这种相容性至今仍然无法被证明,哥德尔(K·Gödel,1906 - 1978,奥地利)1930 年宣布的"不完备性定理"几乎就是对此的否定,这大大挫伤了数学家的信心,根岑(G·Gentzen,1909 - 1945,德国)1936 年放宽条件后(使用超穷归纳法)对纯数论系统(不使用无理数和无穷级数)相容性问题的证明曾给人一点希望,但相容性问题的证明仍未达到完满的目标。1963 年美国数学家科恩(P·J·Cohen,1934 - ?)证明了连续统假设与 ZF 公理系统彼此独立,实际上表明系统的相容性是无法在系统内部加以证明的。素以严密著称的数学居然无法证明自身的相容性,这被 M·克莱因戏称为"玷污了数学的思想"。欣慰的是,在上述"模型"的直观解释之下,非欧几何还是登上了数学的大雅之堂。

四　数学体系的和谐性:新几何学的产生是非欧几何重要性的间接证明

如果说非欧几何相对相容性的证明表明了其存在的合理性,那么,它与其他数学分支的联系则体现了非欧几何在数学内部的重要性,这种重要性促进了非欧几何自身及近代几何学的飞速发展。

非欧几何的产生令人极为震惊,居然可以存在局部相互矛盾的两种几何,这令数学家、物理学家感到疑惑,究竟哪个是物理世界的真正描述?高斯对此极为怀疑,黎曼(Riemann,1826 - 1855,德国)为获得哥廷根大学的教师资格,1854 年就高斯指定的几何基础问题作了一次公开演讲,并于1868 年以《关于几何基础的假设》为题正式发表,从而导致另一门非欧几何——黎曼几何的诞生,它不仅对罗氏非欧几何作了极好的补充,且进一步发展了高斯的内蕴几何学,给出了全新的黎曼流形、流形的曲率等概念,将物理空间看成是一种特殊的流形,并严格区分了无界与无限。黎曼几何创立不久,贝尔特拉米(1869)便找到了其欧氏几何模型,可将黎曼几何看成欧氏几何中球面上的二重椭圆几何,事实表明这是物理世界更好的描述。黎曼几何恰好是前面提到的萨凯里对平行线所作分类,即过直线外一点没有直线与已知直线平行的完整的补充,萨凯里与罗巴契夫斯基都由此推出矛盾的结论,使几何体系产生对称破缺,黎曼却在改变直线的无限延伸性后,使之重新恢复和谐,达到新的对称。这样,就萨凯里对直线外一点所作平行线分类而言,已经获得了一个完整的几何学分类,这彻底打破了欧氏空间唯一性的几何观念,为现代数学及物理学的发展奠定了坚实的基础。

非欧几何不仅在萨凯里平行线分类意义下是和谐的,而且也可从它与欧氏几何的关系中考察其和谐性。按高斯曲面几何学计算,若曲面上三条测地线围成的三角形内角为 α_1、α_2、α_3,则有如下著名的高斯公式:

$$\iint_A K dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

其中 K 为高斯曲率,A 为三测地线所围区域。当 A 为球面时,高斯曲率 K 为常数 $\frac{1}{R^2}$(R 为球半径),$\iint_A dA = \sigma$ 为测地三角形面积,从而

$$\frac{\sigma}{R^2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

当 A 为伪球面时,高斯曲率 $K = -\frac{1}{R^2}$。贝尔特拉米就利用伪球面于 1868 年证明了,伪球面上的内蕴几何学是罗巴切夫斯基的平面几何学。当 $R \to \infty$ 时,有

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

所以,如高斯指出,欧氏几何实际上就是在高斯内蕴几何条件下当常曲率圆半径 $R \to \infty$ 时的极限形式。通过这一解释,罗巴切夫斯基"想象的几何学"已不再停留在纯粹的想象之中,它能在现实世界的伪球面上找到落脚点,欧氏几何也仅是一种特殊的几何,非欧几何学终于得到了人们的普遍承认[8]。而按照黎曼一般微分几何理论,罗氏非欧几何、欧氏几何都是黎曼流形曲率意义下的常曲率几何,两者都是黎曼几何的特例,它们分别对应负常数曲率的弯曲空间和零常数曲率的平直空间,正常数曲率的弯曲空间几何为黎曼所创造的另一种非欧几何,即狭义的黎曼几何,欧氏几何为黎曼、罗氏非欧几何当黎曼曲率趋于零时的极限情形。从而,黎曼微分几何是一种更一般的几何,它也将萨凯里关于平行线的三种分类,用另一更为一般的概念——黎曼流形曲率,重新作出了和谐的分类。非欧几何与欧氏几何的这种和谐特性,从数学的角度更进一步表明它与欧氏几何一样具有存在的合理性。

此外,还发现表面上与非欧几何毫不相干的、肇始于文艺复兴时期绘画艺术的射影几何,居然也可与非欧几何相联系。射影几何在 1850 年前实际上是以欧氏几何为基本框架加以研究的,但从施陶特(Staudt,1798 - 1867,德国)引入交比开始,彻底摆脱欧氏几何的度量性质而建立了逻辑上先于欧氏几何的射影几何,这一点庞色列(Poncelet,1788 - 1867,法国)在 1822 年就意识到了。F·克莱因和英国数学家凯莱首先注意到这种逻辑次序的重要性,他们在射影几何概念基础上分别引入不同的度量性质而建立非欧几何与欧氏几何,这为克莱因《爱尔兰根纲领》的诞生奠定了基础。

空间唯一性观念打破后,各种几何应运而生,除罗氏、黎曼两种非欧几何外,又产生了各种各样的几何,如非阿基米德几何、非德沙格几何、非黎曼几何等,另外还有高维几何、射影几何、微分几何及拓扑学等,大部分非欧几何都在 19 世

纪得到了充分发展。19 世纪后半叶。随着代数中群概念的深入发展,F·克莱因更是创造性地用群的观点,将众多欧氏与非欧几何统一丑于群的旗帜之下,使非欧几何在几何大家族中的地位更为明确。他用变换群观点对几何学作了分类,每种几何都可用变换群来刻划,相应的几何只是考虑在这种变换下关于某种不变量的几何,这样他将几何分为:

- 射影几何
  - 仿射几何
    - 抛物几何(欧几里得几何)
    - 其他仿射几何
  - 椭圆几何
    - 单重椭圆几何(克莱因非欧几何)
    - 双重椭圆几何(黎曼非欧几何)
  - 双曲几何(罗巴契夫斯基非欧几何)

几何体系的这种和谐表明了数学内部体系的和谐性,康托(G·Cantor,1845 - 1918,德国)曾将数学理论的逻辑相容性及其与先前数学知识的和谐性作为数学内部真实性的具体表现。由非欧几何引起的这种数学理论的发展形式,对认识整个数学理论的发展具有重要的指导意义。

五　数学结论的真理性:科学实践的检验是非欧几何价值确认的最终标准

按通常哲学的论述,真理属于与谬误相对立的认识论范畴,它是指主体对存在于主体之外的、不随意识为转移的客观实在的正确反映[9]。因此,认识主体对客观世界的认识是否具有真理性,即正确性如何,必须通过实践的检验才能确认。数学知识总体上说是人类对客观世界的思考结果,是对外部世界的反映或认识,尽管欧氏几何与非欧几何相对相容性的证明表明了非欧几何存在的合理性,然而,其真理性仍然需经实践的检验才能最终被确认。

19 世纪中期前的两千多年中,数学真理性从未受到过怀疑,这是因为从古希腊开始直至 17、18 世纪西方工业文明期间,数学的真理性始终被作为一种普遍的哲学信仰而被广泛接受。古希腊时毕达哥拉斯"万物皆数"的哲学宗旨认为,自然界是按数学方式设计的,数学描述了现实世界,它就是真理,研究数学就是探索真理。这种信仰尽管随着宗教势力的扩张而逐步被上帝所取代,但数学的真理性仍然没有受到怀疑,只是为了趋附于上帝而将对数学的信仰改为具有宗教色彩的教条:上帝按数学方式设计宇宙。对数学的这种笃信应归功于古希腊文明,严格的逻辑推理使人觉得数学结论是必然的自然真理,按这种方式组织而成的欧氏几何是自然的最好描述,它的公理几乎都是那么自明,不能不令人信服,无论那个学派都对它敬而恭之。两千多年来形成的一致看法是:数学结论就是绝对真理。欧氏几何更被当作是关于空间的绝对真理,康德(I·Kant,1724 - 1804,德国)就在《纯粹理性批判》(1781 年)中肯定所有的数学公理和数学定理都是真理[10]。非欧几何的产生,使人们看到存在两种局部互相"矛盾"的几何,这种"矛盾"打破了固有的数学真理观,被 M·克莱因称为是数学的第一场灾难:真理的丧失。

非欧几何的出现使得对数学的真理性的认识产生了严重分歧,原因之一,非欧几何以及随后产生的一系列现代数学都缺乏明显的直观性,许多结论无法直接从现实世界找到对应,从而导致对真理性及其鉴别标准认识的不同,是逻辑的真理还是客观的真理;原因之二,由于真理是指主体对客体的一种反应,观察认识的角度、主体认识立场的不同也衍生出各种真理观。数学真理性的丧失是最令数学家伤心的事之一,高斯也正因为此而不敢及时公开他的非欧几何成果,19 世纪以后数学中出现的一连串问题都表明,数学作为绝对真理的时代已经一去不复返了,甚至连数学中到底有无真理都令人疑虑,最后连希尔伯特也不无忧虑地说,如果数学中没有真理,那么它们究竟会变成什么样子呢?[11]对这些不同的真理观,各种数学哲学著作都有评注,我们不在此一一分析。从对真理的一般认识而言,真理是主体对客观实在的正确反映,那么数学结论能否与客观世界相符就是检验数学结论真理性的最直接和最终的标准,现代数学的发展,表明这种真理性也仅是相对的,即只是相对真理,如欧氏几何只适用于小范围的几何空间,非欧几何则适用于大范围的宇宙空间。非欧几何相对相容性的证明仅表明了它是一个无矛盾的知识体系,并没有说明它是否有实际应用。数学的真正价值在于它的广泛的应用性,要是没有这种应用性作为背景,那么纯粹数学的研究就失去了它的研究价值。正因为如此,非欧几何的创立者在明确意识到新几何对象存在后,首要想做的就是寻找其现实应用。

高斯通过研究欧几里得第五公设,对欧氏几何是否必然适用于现实世界,提出了怀疑,他甚至实际测量了三座高山的山峰构成三角形的内角之和,发现内角和与 180°有微小差别。当然这无法说明问题,因为实验误差远大于误差值[12]。但他确实"愈来愈深信我们不能证明我们的(欧几里德)几何具有(物理的)必然性"。罗巴切夫斯基也有类似的观点,他发表的双曲几何也没有得到同代人的承认,于是就把希望寄托于星空的测量,期待有朝一日双曲几何学能够代替欧氏几何而跻身于大千世界。他说,通用的几何的假设,应该像旧的证明那样予以重视,而同时要肯定的是,不依赖经验而去寻求这种真理的证明是徒劳无益的,这证明也不包括在我们关于物体的概念里[13]。事实证明他们的推测完全正确。至 19 世纪末,黎曼几何已有很大的发展及应用。1915 年爱因斯坦建立的广义相对论中,假设万有引力场显露在"弯曲"的时空流形中。这个四度空间的度量和欧氏空间的度量有差别,万有引力场由某个流形的黎曼几何来表示。有了黎曼几何这种工具,克服了建立广义相对论所遇到的数学上的困难。

有史以来人类第一次感觉到空间的弯曲是在 1919 年 5 月 29 日,英国天文学家爱丁顿(A·S·Eddington,1882 - 1944)和克罗姆林(A·Crommelin,1865 - 1939)分别在西非几内亚湾的普林西比(Pricipe)岛和巴西的索布腊尔(Sobral)测得光在太阳边缘出现 1.61 士 0.30 秒和 1.98 士 0.12 秒的弯曲[14]。这一结果与非欧几何的诞生相差近一个世纪,这是非欧几何创立者所无法预料的。科学实践检验是数学理论价值确认的最终标准。广义相对论的创立与天文观察的结果表明,由数学自身发展需要产生的非欧几何也符合客观世界的需要,数学思维同样具有达到完全真理的能力[15]。至

此，非欧几何在数学家族中的地位真正确立。

【参 考 文 献】

[1][3][12][美]M·克莱因．古今数学思想(第三册)[M]．申又枨等译．上海：上海科学技术出版社，1981．275、278、289．
[2][美]M·克莱因．西方文化中的数学[M]．张祖贵译．台北：九章出版社，民国84．439．
[4][9]林夏水．数学的对象与性质[M]．北京：社会科学文献出版社，1994．89、183．
[5][日]中村幸四郎等译．几何原本(日文版)[M]．共立出版株式会社，1983．465．
[6]张永春等．罗巴契夫斯基科学思想和方法[M]．哈尔滨：黑龙江教育出版社，1992．22-29．
[7][10][11][美]M·克莱因．数学：确定性的丧失[M]．李宏魁译．长沙：湖南科学技术出版社，1997．90、69、336．
[8]蒋声．欧几里得第五公设[M]．沈阳：辽宁教育出版社，1988．77．
[13]H B 叶非莫夫．高等几何学(上册)[M]．北京：高等教育出版社，1954．26-27．
[14]许良英．狭义相对论与广义相对论的建立[C]．20世纪科学技术简史．北京：科学出版社，1985．45-46．
[15]莫德．欧几里得几何学思想研究[M]．呼和浩特：内蒙古教育出版社，2002．283．

(责任编辑　郭晋风)

(上接第56页)

[7]C·Guthrie，A History of Greek Philosophy，Cambridge，1971．9．
[8]丹皮尔．科学史[M]．北京：商务印书馆，1975．45．
[9][18][27]汪子嵩等．希腊哲学史(第1卷)[M]．北京：人民出版社，1997．71、146、491-492．
[10][13]苗力田主编．亚里士多德全集(第7卷)[M]．北京：中国人民大学出版社，1993．34、33-34．
[11]林德宏．科学认识思想史[M]．南京：江苏教育出版社，1995．44．
[12]北京大学哲学系外国哲学史教研室编译．古希腊罗马哲学[M]．北京：商务印书馆，1962．1-4．
[14]克莱因．古今数学思想(第1册)[M]．上海：上海科学技术出版社，1979．167．
[15]炎冰．论古希腊的科学传统[J]．云南社会科学．1995(4)：44-51．
[16]爱因斯坦文集(第1卷)[M]．北京：商务印书馆，1976．115．
[17]赖欣巴哈．科学哲学的兴起[M]．北京：商务印书馆，1983．9．
[19]杨祖陶，邓晓芝编译．康德三大批判精粹[M]．北京：人民出版社，2001．49-50．
[20]S·Kirk．Heraclitus：The Cosmic Fragments，Cambridge，Reprinted 1978．
[21]H·Kahn．The Art and Thought of Heraclitus，Cambridge，Reprinted 1983．
[22]杨适．哲学的童年[M]．北京：中国社会科学出版社，1987．
[23][25]苗力田主编．古希腊哲学[M]．北京：中国人民大学出版社，1989．39、38．
[24]黑格尔．哲学史讲演录(第1卷)[M]．北京：三联书店，1956．297．
[26]海森伯．物理学和哲学[M]．北京：商务印书馆，1981．28．

(责任编辑　成素梅)