

违约或有权益风险中性估值引论

孟庆福, 李文平

(吉林大学数量经济研究中心 吉林 长春 130012)

摘要: 本文在连续时间状态或有权益的风险中性估值范式下讨论对具有二元支付结构(即违约支付和到期支付)的违约或有权益的定价, 并就该鞅定价方法在信用风险的两个建模框架(即结构方法和强度方法)中的实现作了介绍, 给出了风险中性违约概率和估值公式的一般表述, 最后就违约或有权益定价以及对冲的现实性作了简要评述。

关键词: 信用风险; 违约或有权益; 违约停时; 风险中性违约概率; 等价鞅测度; 结构方法; 强度方法

中图分类号: F224.0

文献标识码: A

1 引言

信用风险是因契约协定方的违约而引致的金融损失分布, 受信用风险因子驱动的违约或有权益的风险中性估值是状态或有权益鞅定价方法的自然延伸: 通过引入违约示性变量, 定价问题进而归结为对违约停时风险中性分布的建模, 由此确立对可违约权益鞅定价方法至关重要的风险中性违约概率。

锁定过滤概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ 以表述经济的不确定性, 其中 Ω 是经济所有可能状态的集合, 假设有限状态 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$, 过滤 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是序贯的信息揭示过程即信息结构, 表示时序的经济行为者可得的信息集, 且只要 $u \leq s$ 就有 $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_s$, 意味着信息不会被遗忘, \mathbf{P} 是概率测度。状态或有权益 $(\vec{Z}, \vec{\tau})$ 是范围广泛的一类资产, 这种资产的收益取决于未来可能实现的状态, 其中支付结构 $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_s)$ 是 (\mathcal{F}_t) -可料过程代表每一可能实现状态下的支付, 时间结构 $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ 是 (\mathcal{F}_t) -停时代表每一状态可能出现的时间。这里假定只有首达状态的支付发生, 即我们只考虑首达状态或有权益 (Z^*, τ^*) , 其中首达时刻 $\tau^* = \min\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s\}$, 首达支付 $Z^* = Z_1 \mathbf{1}_{\{\tau^* = \tau_1\}} + Z_2 \mathbf{1}_{\{\tau^* = \tau_2\}} + \dots + Z_s \mathbf{1}_{\{\tau^* = \tau_s\}}$ 。考虑具有二元支付结构的违约或有权益: 设当前时刻为 t , 权益的到期日为 T , 违约可能发生的时刻为 τ ($\tau > t$), 权益发行者所承诺的到期支付为 F , 如果在到期之前(包括到期日)违约没有发生; 如果在 τ 时刻违约发生, 则回收支付为 R_τ 。更正式地,

定义支付结构偶 $((R, \tau), (F, T))$ 称为 (F_t) -适应的违约或有权益，如果回收支付 R 是一 (F_t) -可料的随机过程， τ 是 (F_t) -停时（即违约停时），到期支付 F 是 F_T -可测的非负随机变量。回收支付结构 (R, τ) 表示在违约停止时间 τ 发生的支付为 R_τ ，到期支付结构 (F, T) 代表到期 T 支付为 F ，如果在这之前违约没有发生的话。

可以想象到期支付权益 (F, T) 是在到期日 T 支付面值为 F 的零息债券（这里 F 是确定的），或是基于某些市场指数的衍生证券，比如标的资产价格过程为 S 、执行价格为 K 的看涨期权 $F = \max\{S_T - K, 0\}$ （这里 F 是随机的且依赖于到期日的信息集）。这样，违约或有权益 $((R, \tau), (F, T))$ 可以经由（首达）状态或有权益 (Z^*, τ^*) 一般地表示为

$$\tau^* = \min\{\tau, T\}, Z^* = R\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} + F\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}. \quad (1)$$

我们的目的是揭示违约或有权益 $((R, \tau), (F, T))$ 的价格过程 D 。设存在非负有界 (F_t) -适应的无（违约）风险短期利率过程 r ，那么货币市场帐户价值过程由下式给出，

$$\beta_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right), \quad (2)$$

当市场无套利且完备时，可以证明存在唯一的风险中性概率测度（等价鞅测度） Q ，使得所有资产价格过程经货币市场基金标准化之后是一鞅过程（即 $((F_t), Q)$ -鞅）。这意味着对状态或有权益 (Z^*, τ^*) 来讲，其价格过程 U 为：当 $\tau^* \leq t$ 时， $U_t = 0$ ；当 $\tau^* > t$ 时，

$$U_t = E_t^Q \left[Z^* \exp\left(-\int_t^{\tau^*} r_u du\right) \right], \tau^* > t. \quad (3)$$

则对于违约或有权益 $((R, \tau), (F, T))$ 来讲，据(1)式及(3)式，其价格过程 D 为（设 $\tau > t$ ），

$$D_t = E_t^Q \left[\left(R\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} + F\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right) \exp\left(-\int_t^{\min\{\tau, T\}} r_u du\right) \right], \quad (4)$$

整理可得

$$D_t = E_t^Q \left[R\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right) \right] + E_t^Q \left[F\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \right]. \quad (5)$$

(5)式是具有二元支付结构（即回收支付和到期支付）的违约或有权益风险中性估值的一般公式，其

中违约停时 τ 的风险中性分布、更具体地说是风险中性违约概率 $Q[\tau \leq T | \mathbf{F}_t]$ 对于定价是至关重要的，回收支付 R 在不同的模型中有不同的设定。在风险中性测度 Q 下，定价得以实施的基本考虑是选择适当的过滤 $(\mathbf{F}_t)_{t \geq 0}$ ，以使支付 (R, F) 是 $((\mathbf{F}_t), Q)$ -适应的且违约时间 τ 是 (\mathbf{F}_t) -停时。到目前为止，存在两个建模框架：基于权益发行者资本结构的结构方法（回收支付过程 R 内生于发行者的总市场价值）以及基于发行者违约强度的强度方法（回收支付过程 R 外生于发行者的总市场价值），结构模型使用权益发行者资产价格的序贯信息（或布朗运动生成的过滤），而强度模型则选择更大的过滤，新近的发展试图调和这两个框架，开发出结构方法的不完全信息版本。出于本文的引论性质，我们仅在第二部分有选择性地考察完全信息结构方法和违约强度方法，并在第三部分对不完全信息模型作一简要论述。

2 估值模型

目前主要有两个框架为违约或有权益定价，即结构模型和强度模型。结构方法从权益发行者的资本结构入手，根据资产的充足性定义违约，应用期权定价的理论方法，视或有违约权益为以发行者资产价值为标的的衍生证券，并据此导出内生的违约概率对其进行定价；与此形成对照，强度方法设定权益发行者的由外生机会比率（或强度）驱动的违约计数过程，违约出现在该过程（首次）跳跃发生的时刻，据此得到风险中性的违约概率，违约或有权益的价格通过经强度调整的无风险利率计算得到。

2.1 结构模型

结构方法发端于 Black 和 Scholes(1973)、Merton(1974)以及 Black 和 Cox(1976)。假定权益发行者的资本结构仅由股权资本和面值为 F 、到期日为 T 的（单一）零息债券组成，它们在时刻 t 的价值分别记为 E_t 和 D_t 。不存在套利意味着，在时间 t ，股权价值 E_t 和债权价值 D_t 的总市值必须等于资产的市场价值 A_t ，即

$$A_t = E_t + D_t, 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

由权益发行者的有限责任性质，若在债务到期时发行者的资产价值 A_T 小于契约规定的必须向债权人支付的债券面值 F ，那么发行者就将价值 A_T 交到债权人手中，股权所有者所得为零；若资产价值 A_T 足以偿付债券面值 F ，则债权人得到 F ，股权所有者取得剩余 $A_T - F$ 。如上所述，债权资本和股权资本在到期日的支付结构分别为 $D_T = \min\{F, A_T\} = F - \max\{F - A_T, 0\}$ 以及 $E_T = \max\{A_T - F, 0\}$ ，由此看出，股权资本可以被视为基于权益发行者资产价值的看涨期权（执行价格为债务面值 F 、到期日为债务期限 T ），而债权资本则可以被视为零息债券（面值 F 、期限 T ）与基于权益发行者资产价值的看跌期权（执行价 F 、期限 T ）的合成，该看跌期权的价值代表了由于存在信用风险而带来的成本，相当于权益发行者向债权人购买的信用保险，保险的抵押便是

回收支付 R ，这里，其价值等于资产价值，即 $R_t = A_t$ 。

假设在风险中性概率测度 Q 下，权益发行者的资产价值遵循一 (F_t) -适应的扩散过程：

$$dA_t = rA_t dt + \sigma A_t dW_t^Q, A_0 > 0, \quad (7)$$

出于简便，这里无风险利率被假定为常数 r ， W_t^Q 是 $((F_t), Q)$ -标准布朗运动。伊藤引理意味着，

$$A_t = A_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t^Q}, \quad (8)$$

其中 $W_t^Q \square N[0, t]$ 。从而容易得到

$$A_T = A_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}, \quad (9)$$

其中 $W_T^Q - W_t^Q \square N[0, T-t]$ 。

结构方法中其他方便的假定还包括无税、无破产成本、资产无限可分、按常利率无限制地借贷、无买空限制以及权益发行者总市值与其资本结构无关（MM 定理）等，其中有些是标准期权定价理论所要求的。其后的发展逐步放松了这些约束，引入了税收、破产成本以及随机利率等因素。

源自 Merton(1974)的经典结构方法仅考察在债务到期日 T 权益发行者的偿付能力，违约时间 τ 是一离散随机变量：

$$\tau = \begin{cases} T, & A_T < F \\ \infty, & A_T \geq F \end{cases}, \quad (10)$$

回收支付 $R_T = A_T$ ，到期支付 F 是债券的面值（确定的）。由于这里权益资本可看作基于发行者资产价值的欧式看涨期权，根据标准的 Black-Scholes 定价公式，在时间 t 股权的价格为

$$E_t = A_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} FN(d_2), \quad (11)$$

其中， $N(\bullet)$ 是标准正态分布的累积分布函数， $d_1 = \frac{\ln \frac{A_t}{F} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ，

$d_2 = \frac{\ln \frac{A_t}{F} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ 。这样，违约或有权益在时刻 t 的价格为

$$D_t = E_t^Q \left[e^{-r(T-t)} \left(A_T \mathbf{1}_{\{\tau=T\}} + F \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} \right) \right] = A_t - E_t = A_t N(-d_1) + e^{-r(T-t)} FN(d_2). \quad (12)$$

风险中性的违约概率为

$$\begin{aligned}
Q[\tau = T | \mathbf{F}_t] &= Q[A_T < F | \mathbf{F}_t] \\
&= Q\left[A_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)} < F | \mathbf{F}_t\right] \\
&= Q\left[\frac{W_T^Q - W_t^Q}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln \frac{F}{A_t} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \middle| \mathbf{F}_t\right] \\
&= N(-d_2)
\end{aligned} \tag{13}$$

由 Black 和 Cox(1976)引入的首达方法拓展了 Merton 模型，允许违约出现在任何可能的时间，而不止是局限于债务的到期日。通过引入一外生的违约障碍 B （可能是常数也可能是时变的或随机的，出于简便，这里假设 B 为常数且 $B > 0$ ），违约出现于权益发行者资产价值首次低于该障碍时，即违约时间 τ 是一连续的随机变量：

$$\tau = \inf \{s \geq t : A_s < B\}, \tag{14}$$

违约收付 $R_\tau = A_\tau$ 。这里权益资本可视为基于资产价值的障碍期权，期权的执行时间相当于违约时间 τ 。应用布朗运动的性质（反映原理），可以得到风险中性的违约概率，即

$$Q[\tau \leq T | \mathbf{F}_t] = N(h_1) + \exp\left\{2\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \ln\left(\frac{B}{A_t}\right) \frac{1}{\sigma^2}\right\} N(h_2), \tag{15}$$

$$\text{其中 } h_1 = \frac{\ln\left(\frac{B}{A_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad h_2 = \frac{\ln\left(\frac{B}{A_t}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

2.2 强度模型

基于强度的违约或有权益估值可以追溯到 Artzner 和 Delbaen(1995)，Jarrow、Lando 和 Turnbull(1997)以及 Duffie 和 Singleton(1999)。与结构方法不同，该方法中违约的出现不是由权益发行者的资产价值或类似指标内生定义的，而是出现于一受外生强度过程驱动的计数过程首次跳跃发生的时刻，泊松或考克斯过程是这类违约计数过程的自然选择。强度过程的不同选取可以得到不同的模型结果，模型的估计和校准直接源于市场可得数据。首先，本节给出违约计数过程以及强度的涵义，然后给出该框架下风险中性的违约概率和定价的一般公式，最后将就回收支付的几种不同设定给出相应的估值公式。

设当前时刻为 t ，可得信息集为 \mathbf{F}_t ，在等价概率测度 Q 下，已知随机违约时间为 τ ($\tau > t$)，

定义违约计数过程为 $N_s = \mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}}$ ，这是一个在违约时具有跳跃量 1 的点过程。如果非负、 (\mathbf{F}_t) -适应

的过程 λ 满足 $M_s = N_s - \int_0^{\min\{\tau, s\}} \lambda_u du$ 是 Q 下的鞅，则 λ 就称为违约时间 τ 的（风险中性）强度。

强度过程描述了违约动态，它同时是违约的机会比率。易知违约时间为

$$\tau = \inf \{s > t : N_s > 0\}。 \quad (16)$$

当 λ 为常数时， N 就是时齐的泊松过程；当 λ 为时间的确定性函数时， N 就是非时齐的泊松过程；而当 λ 为一随机过程时， N 就是所谓的考克斯过程。以随机过程 λ 的一次实现为条件，考克斯过程 N 即为（条件的）非时齐泊松过程，从而一般情况下的风险中性生存概率和违约概率为

$$Q[\tau > T | \mathbf{F}_t] = Q[N_T - N_t = 0 | \mathbf{F}_t] = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T \lambda_u du \right\} \right], \quad (17)$$

以及

$$Q[\tau \leq T | \mathbf{F}_t] = 1 - Q[\tau > T | \mathbf{F}_t] = 1 - E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T \lambda_u du \right\} \right]。 \quad (18)$$

从而根据(5)式，基于强度方法的具有二元支付结构的违约或有权益的一般估值公式如下：

$$D_t = E_t^Q \left[F e^{-\int_t^T (r_u + \lambda_u) du} \right] + E_t^Q \left[\int_t^T \lambda_s R_s e^{-\int_t^s (r_u + \lambda_u) du} ds \right], \quad (19)$$

其中第一项代表在将违约可能性（由强度 λ 表示）考虑进来以后到期支付的期望现值，贴现率经强度调整；第二项代表回收支付的期望现值，同样经强度调整且考虑了违约可以出现在 t 和 T 之间任何时刻这一事实。根据该公式为可违约权益定价需要考虑回收支付 R 的不同设定以及无风险利率 r 、强度 λ 和 R 之间的相关性，出于简便，我们仅就几种情况进行讨论。

文献中大致有关于回收支付 R 的三种选取方式：一种是取 R 为违约或有证券面值 F 的一个固定比例，即 $R_\tau = (1-L)F$ ，其中 L 是外生设定的损失比率；另外一种是取 R 为相应的无风险证券在违约时刻价值的一个固定比例，即 $R_\tau = (1-L)F e^{-\int_\tau^T r_u du}$ ；最后一种是取 R 为可违约权益在违约前瞬时价值的一个外生比例，即 $R_\tau = (1-L_\tau)D_{\tau^-}$ ，其中 $D_{\tau^-} = \lim_{s \rightarrow \tau^-} D_s$ 。根据(19)式，在前面两种情况下，若损失率 L 取 1，即 $R_\tau = 0$ ，有

$$D_t = E_t^Q \left[F \exp \left\{ - \int_t^T (r_u + \lambda_u) du \right\} \right], \quad (20)$$

在最后一种情况下，

$$D_t = E_t^Q \left[F \exp \left\{ - \int_t^T (r_u + \lambda_u L_u) du \right\} \right]。 \quad (21)$$

从而易见，在某些方便的假设条件下，违约或有权益在 t 时刻的价值为

$$D_t = E_t^Q \left[F \exp \left\{ - \int_t^T \pi_u du \right\} \right], \quad (22)$$

其中 $\pi = \pi(r, \lambda, L)$ 是无风险利率 r 、强度 λ 以及损失率 L 的函数。这样，违约权益的估值可以像无风险权益那样对到期支付进行贴现，但是要考虑到违约的可能和损失的比例，因此贴现率使用经强度和损失比率调整的无风险利率。

3 结论与展望

新近的发展试图整合违约或有权益估值的结构方法和强度方法这两个框架：通过在标准的结构方法中引入不完全信息，可以得到内生于权益发行者资本结构的强度过程。纵使这样，虽然违约或有权益可看作无风险权益与看跌期权的合成，该中性估值方法在任何一个框架下都没有明显地使用无套利的动态复制技术。虽然对于状态或有权益的定价而言，完备市场的假定不是必需的，但是对于开发衍生工具和结构产品用以转移以及对冲信用风险而言，完备的资产结构就是不可或缺的（理论上要求某种基于违约的信用保险产品或看跌期权的存在），这给金融工程在信用风险管理领域的实践提出了挑战。

参考文献:

- [1] Black, F., and Cox, J. C.. Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions [J]. Journal of Finance, 1976(Vol. 31, No. 2) : 351-367.
- [2] Black, F., and Scholes, M.. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973(Vol. 81): 637-654.
- [3] Bluhm, C., Overbeck, Ludger., and Wagner, Christoph. An Introduction to Credit Risk Modeling [J]. Financial Mathematics Series, Chapman & Hall/CRC. 2003.
- [4] Duffie, D., and Singleton, K. J., Modeling Term Structures of Defaultable Bonds [P]. Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University. 1999.
- [5] Duffie, D., and Singleton, K. J., Credit Risk: Pricing, Measurement and Management [J]. Princeton Series in Finance. 2003.
- [6] Elizalde, A., Credit Risk Models I: Default Correlation in Intensity Models [J]. MSc in Financial Mathematics Thesis, King's College London. 2003a.
- [7] Elizalde, A., Credit Risk Models II: Structural Models [J]. MSc in Financial Mathematics Thesis, King's College London. 2003b.
- [8] Elizalde, A., Credit Risk Models III: Reconciliation Structural – Reduced Models [J]. MSc in Financial Mathematics Thesis, King's College London. 2003c.
- [9] Giesecke, K., Credit Risk Modeling and Valuation : an Introduction [P]. Working Paper, Humboldt-Universität, Berlin. 2002.
- [10] Jarrow, R., Lando, D., and Turnbull, S. A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads [J]. Review of Financial Studies, 1997(Vol. 10): 481-523.

- [11] Jarrow, R., and Turnbull, S., Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk [J]. Journal of Finance, 1995(Vol. 50) , No. 1:53-86.
- [12] Jeanblanc, M., and Rutkowski, M., Modelling of Default Risk: An Overview [M]. Mathematical Finance: Theory and Practice, Higher Education Press, Beijing, 2000: 171-269.
- [13] Hughston, L. P., and Turnbull, S., Credit Risk: Constructing the Basic Building Blocks [J]. Economic Notes, 2001(Vol. 30, No. 2): 281-292.
- [14] Lando, R. On Cox Processes and Credit Risky Securities [J]. Review of Derivatives Research, 1998: 99-120.
- [15] Merton, R. On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates [J]. Journal of Finance, 1974(Vol. 29): 449-470.

The Introduction on Breaking Contract Contingent Rights and interests Neutral Evaluation

MENG Qing-fu, LI Wen-ping

(Center for Quantitative Economics, Jilin University, Changchun, 130012, China)

Abstract: This text is continuing time appearance or having the risk neutral value type of the rights to have the list price of the rights towards having the default that two dollars pays the structure(break contract to pay and expire to pay namely) or under the discussion, and the list price method is in the credit risk of two set up the mold frame(namely the structure method and the strength method) is of realization made the introduction, give the risk neuter gender break contract all the rate and 估 s be worth the general form of the formula to say, the end break contract or have the rights list price and made the synopsis comment to the blunt actuality.

Key words: credit risk; break contract or have the rights; structure method; strength method

收稿日期: 2005-02-25

基金项目:

作者简介: 孟庆福(1953—), 男, 吉林大学商学院, 教授。