基于不同协方差矩阵的 VaR 度量比较

陈守东，李轶婷，胡铮洋

（吉林大学数量经济研究中心，吉林 长春 130012）

摘要：本文以上证50指数数据为样本，采用样本协方差矩阵、数量矩阵、两参数模型矩阵、单指数模型矩阵、常量相关矩阵作为与股票相关的协方差矩阵，结合投资策略选择的主成分方法和Markowitz最优投资组合方法，计算VaR以度量市场风险，并比较了五种协方差矩阵度量市场风险的效果，结果表明，在主成分方法中，样本协方差矩阵和两参数矩阵方法能有效的度量市场风险。而投资组合方法的VaR估计结果与实际损失存在较大偏差。

关键词：协方差矩阵；投资组合；VaR

中图分类号： **F224.0** **文献标识码**： **A**

一、引言

Markowitz(1952)组合投资模型用期望收益来描述组合投资的收益，用方差来度量风险。组合投资的方差可以分解成个股的方差和个股间的协方差，也就是全体股票协方差矩阵的对角和非对角元素。最常见的协方差矩阵的估计是样本协方差矩阵，样本协方差矩阵的估计有一个缺点，就是需要估计的参数太多($N(N+1)/2$)，为了减少参数的估计数目，Sharpe(1963)提出了单指数模型。在该模型下计算协方差矩阵，只需要估计$2N+1$个参数(个股、指数的方差，以及个股与指数的协方差)。Elton和Gruber(1973)发现当股票间的相关系数都取样本相关系数的均值时，可更准确地预测股票间的相关系数，得到的组合投资在同样的风险水平下，收益比其他方法提高了50%。进一步地，Elton、Gruber和Padberg(1976)提出了常量相关模型，并发现其组合优化的算法也极其简便。无论是单指数模型，还是常量相关模型，这些模型有共同的特点，就是对协方差矩阵的结构进行限制。如果我们采用简单等权组合，从Markowitz组合投资的全局最小方差组合来考察，就是认为协方差矩阵是数量矩阵(单位矩阵的常数倍)。Jobson和Korkie(1980)假设协方差矩阵所有对角元素都为常数g ，所有非对角元素都为常数h ，只需要两个参数就可以完全确定协方差矩阵。Frost和Savarino(1986)也用该两参数的协方差矩阵，作为贝叶斯先验知识，探讨有效组合投资的选择。

本文运用上证50指数数据讨论协方差矩阵的不同选择对投资风险测量的影响问题。通过使用不同的协方差矩阵，找到各个模型在最大风险下的投资组合，比较相应的在险价值(VaR)，为市场投资组合的风险度量提供参考。

二、协方差矩阵表示及相关方法

(一) 协方差矩阵

Markowitz 组合投资模型以协方差度量证券之间的关联关系，我们采用五种形式的样本协方差作为其估计。为方便表述，记 H 为股票收益率的$T \times N$矩阵，其中 N 为股票数目，T 为股票收益率观察值的数目。

1. 样本协方差矩阵

样本协方差矩阵为：

$$V=\frac{1}{T-1}H^{T}MH,\text{其中}M=I-\frac{1}{T}\iota\iota^{'}$$

其中，ι 表示元素都为1的向量(其阶数在运算上是相容的)，I为适当的单位矩阵。

2. 单指数模型矩阵

单指数模型(Sharpe，1963)认为股票之间的关联运动，完全由股票与市场因素的关联运动所决定，其协方差矩阵为

$$F=D+\frac{1}{\sigma_I^2}(cc^{'}-Q)$$

其中,$D=diag(diag(V))$ 是样本协方差矩阵的对角阵。σ_I^2 为市场指数I 的方差的估计值，c为股票与指数的协方差向量$\mathrm{cov}(R,I)$ 的估计值，而对角矩阵$Q=diag(diag(cc'))$。

3. 常量相关矩阵

常量相关模型(Elton，Gruber和 Padberg，1976)认为股票间的相关系数都相同，因此该方法得到的协方差矩阵为

$$C=(1-\rho)D+\rho dd^{'}$$

其中 ρ 为样本相关系数的平均值,$d=diag(D^{1/2})$ 为股票的标准差向量。

4. 数量矩阵

该模型假定股票间不相关，而且个股的方差都相等，则协方差阵为一数量矩阵：

$$K=kI$$

其中 $k=tr(V)/N$，$tr(\cdot)$ 表示矩阵的迹。显然 K 是非奇异的。

5. 两参数模型矩阵

该模型假定个股方差都等于样本的平均方差，协方差都取为样本的平均协方差，即：

$$P=(g-h)I+h\iota\iota'$$

其中参数 $g=tr(V)/N$，$h=\iota'(V-D)\iota/(N(N-1))$ 分别为样本协方差矩阵主对角线元素的平均值与非对角元素的平均值。

(二) 组合投资模型

非卖空条件下的 Markowitz 投资模型如下：

$$Min\ \ X^{T}\Sigma X$$

$$s.t.\begin{cases}X^{T}e=E(r_x)\\X^{T}\mathbf{1}=1\\X\geq 0\end{cases}$$

其中：

$$\sigma_P^2=\mathrm{var}(r_P)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X_iX_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X_iX_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\overset{\Delta}{=}P^{T}\Sigma P$$

Σ 为 $r_1 \cdots r_n$ 的协方差矩阵。

在实证分析时，本文选择协方差矩阵的5种方法，求解限制非卖空条件下的最小方差组合，并结合投资组合的选择度量VaR。

(三) VaR风险度量

VaR（Value at Risk）的字面含义是“处于风险中的价值”，Jorion(1997)给出如下定义“给定置信区间的一个持有期内最坏的预期损失”。也就是说，VaR 是在一定的置信水平下，某一金融资产或证券组合在未来特定的一段时间内的最大可能损失。即，

$$Prob(\Delta P > VaR) = \alpha$$

其中 ΔP 为证券组合在持有期 Δt 内的收益，VaR 为在置信水平 $1-\alpha$ 下处于风险中的价值。关于 VaR 的计算，我们采用下述方法：

1. 参数法

参数法假设收益率服从一定的分布，计算相对来说比较简单。通常假设收益率序列服从正态分布，但是大量文献表明金融序列不是正态的，而是有偏峰的、厚尾的。这样，在正态分布假定下所计算的VaR值常常可能是低估实际风险。为了描述金融序列的厚尾性，也可使用t-分布来计算VaR。

正态分布假设下VaR的计算方法：

$$VaR = P_0 Z_\alpha \sigma \sqrt{\Delta t}$$

t-分布假设下VaR的计算方法：

$$VaR = P_0 t_\alpha^*(v) \sigma \sqrt{\Delta t}$$

其中 P_0 为证券组合的初始价值，Z_α 为 $1-\alpha$ 对应的分位数，$t_\alpha(v)$ 在自由度为 v 下 α 对应的分位数，

$t_\alpha^*(v) = t_\alpha(v)\sqrt{(v-2)/v}$，$\sigma$ 为组合标准差，$\sqrt{\Delta t}$ 为时间间隔。

2. 历史模拟法

历史模拟法(Historical-Simulation Method)是一种简单的基于经验的方法，它假设投资组合未来收益变化与过去是一致的，利用各组成证券收益率的历史数据计算现有投资组合收益率的可能分布，不需对收益分布作任何假设，直接根据 VaR 的定义进行计算。历史模拟法的核心在于基于市场因子的历史数据模拟证券组合的未来损益分布，它是一种最直观的全值估计方法。

3. 主成分法

记 Σ 为协方差矩阵，最大特征根 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量 ω^T 即为 Σ 的第一主成分，由于：

$$\max_{x \neq 0} \frac{X^T A X}{X^T X} = \lambda_1(A)$$

所以我们可以只需考虑单位向量 $X^T X = 1$，将 X 视为空间方向，寻找 $a^T a = 1$ 中，单位球面的方向 a,使 $Var(a^T r) \to \max$ 即为问题的解，这个方向为 Σ 的最大特征根对应的特征向量 ω，即

$$\max_{\omega^T \omega = 1} \omega^T \Sigma \omega = \lambda_1(\Sigma)$$

由这个向量组合的投资组合，就是股市的最大风险，所以我们可以从主成分的角度考虑风险的度量。

三、数值计算

1. 主成分法

采用上证50在2004年中未做调整的45支股票的收盘价作为研究样本，将价格{ p_t }定义为市场每日指数收盘价将收益率{ r_t }定义为：$r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$，样本长度从2004年1月2日至2004年12月31日，共242组数据。分别以上述五个协方差矩阵的第一主成分对应的特征向量作为投资组合的权重，在正态和t-分布的假设下，分别计算组合的VaR。用非参数的历史模拟方法进行事后检验。实证结果见表1、表2：

表1：主成分法计算结果

	组合收益	组合风险	正态 VaR		t-分布 VaR	
			$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
样本协方差阵 V	-0.59496	92.4959	14.2922	20.4276	13.4874	22.9223
单指数矩阵 F	-0.5848	85.3518	14.1430	20.2144	13.3466	22.6831
常量相关矩阵 C	-0.5903	97.9353	14.6328	20.9104	13.8092	23.4630
数量矩阵 K	0.0024	5.5055	3.6409	5.1405	3.4442	5.7502
两参数矩阵 P	-0.5954	82.9250	13.9952	20.0000	13.2075	22.4417

注：t-分布的自由度为 5

表 2：

	正态		t-分布	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
样本协方差阵 V	0.061983	0.012397	0.07438	0.004132
单指数矩阵 F	0.061983	0.012397	0.078512	0.004132
常量相关矩阵 C	0.061983	0.012397	0.066116	0.004132
数量矩阵 K	0.016529	0.004132	0.016529	0
两参数矩阵 P	0.057851	0.012397	0.082645	0.004132

现通过误差率来讨论五种协方差矩阵，在正态分布和 t－分布假设下的 VaR 度量风险的准确性。我们定义误差率为在一定的置信度下，实际损失值大于 VaR 的数目与总的样本个数的比值。若误差率小于α，高估了市场风险；反之则低估了市场风险。J．P．Morgan 曾于 1996 年就泰国等 7 个股市对比研究了 Riskmetrics，混合正态分布，EGARCH-GED 在置信度为 95％水平下的误差率平

均值分别为：5.49％，4.05％，4.739％。虽然本文利用的是中国股市的情况，但从误差率水平来看，基于五种协方差矩阵度量的 VaR，矩阵 V 和矩阵 P 对 VaR 值的估计既没有低估风险，也没有高估风险，贴近实际水平，矩阵 C 较小程度地高估了风险,而矩阵 K 不能很好的度量市场风险。

2. 投资组合法

采用上证 50 在 2004 年中未做调整的 45 支股票的收盘价作为研究样本，将价格{ p_t }定义为市场每日指数收盘价将收益率{r_t}定义为：$r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$，样本长度从 2004 年 1 月 2 日至 2004 年 12 月 31 日，共 242 组数据。分别计算上述五个协方差阵结合无风险收益率为零的假设，取资本市场线与有效前沿面切点对应的投资组合做权重(切点得到见附表)。取 45 支股票对数收益的样本均值作为组合中的各股收益，采用马科维茨(Markowitz)证券组合理论，在不允许卖空条件下(权重大于 0)，分别在正态和 t-分布的假设下，计算组合的 VaR。用非参数的历史模拟方法进行事后检验。实证结果见表 3、表 4：

表 3：组合投资法计算结果

	组合收益	组合风险	正态 VaR		t-分布 VaR	
			$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
样本协方差阵 V	0.1667	1.4544	2.156642	2.976738	2.049064	3.310204
单指数矩阵 F	0.1657	1.4228	2.133819	2.944938	2.027419	3.274754
常量相关矩阵 C	0.1661	1.4689	2.16585	2.989998	2.057741	3.325112
数量矩阵 K	0.1342	1.2468	1.976619	2.735902	1.877019	3.044639
两参数矩阵 P	0.1743	1.8873	2.441002	3.375169	2.318461	3.755018

注：t-分布的自由度为 5

表 4：组合投资法误差比较

	正态		t-分布	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
样本协方差阵 V	0.0702	0.0207	0.0785	0.0165
单指数矩阵 F	0.0702	0.0248	0.0785	0.0165
常量相关矩阵 C	0.0702	0.0248	0.0702	0.0165
数量矩阵 K	0.0661	0.0248	0.0661	0.0124
两参数矩阵 P	0.0578	0.0165	0.0661	0.0124

现通过误差率来讨论五种协方差矩阵，在正态分布和 t－分布假设下的 VaR 度量风险的准确性。从误差率水平来看，基于五种协方差矩阵度量的 VaR，无论是在正态分布还是在 t－分布下五种协方

差矩阵均不能有效的度量市场风险。

四、结论

我们采用样本协方差矩阵、数量矩阵、两参数模型矩阵、单指数模型矩阵、常量相关矩阵作为与股票相关的协方差矩阵，结合投资策略选择的主成分方法和 Markowitz 最优投资组合方法计算 VaR，以度量市场风险的比较中，结果表明在主成分方法中，样本协方差矩阵和两参数矩阵方法能有效的度量市场风险。从误差率水平来看，基于五种协方差矩阵度量的 VaR，矩阵 V 和矩阵 P 对 VaR 值的估计既没有低估风险，也没有高估风险，贴近实际水平，矩阵 C 较小程度地高估了风险，而矩阵 K 不能很好的度量市场风险。而投资组合方法的 VaR，五种协方差矩阵的误差率表明，无论是在正态分布还是在 t－分布下五种协方差矩阵均不能有效的度量市场风险。

参考文献

[1] Elton, Edwin J., and Martin J. Gruber. Estimating the dependence structure of share prices--implications for portfolio selection [J]. The Journal of Finance, 1973, (28):1203-1232.

[2] Elton, Edwin J., Martin J. Gruber, and Manfred W. Padberg. Simple criteria for optimal portfolio selection [J]. The Journal of Finance, 1976, (31): 1341-1357.

[3] Frost, Peter A., and James E. Savarino. An empirical Bayes approach to portfolio selection [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1986, (21): 293-305.

[4] Jobson, J.D., and B. Korkie. Estimation for Markowitz efficient portfolios [J]. Journal of the American Statistical Association, 1980, (75): 544-554.

[5] Markowitz, Harry. Portfolio selection [J]. The Journal of Finance, 1952, (7): 77-91.

[6] Merton, Robert C.. On estimating the expected return on the market (An exploratory investigation) [J]. Journal of Financial Economics, 1980, (8): 323-361.

[7] Sharpe, William F.. A simplified model for portfolio analysis [J]. Management Science, 1963,(9): 277-293.

Comparing VaR Based on Different Covariance Matrix

CHEN Shou-dong, LI Yi-ting, HU Zheng-yang

(Center for Quantitative Economics of Jilin University , Jilin Changchun 130012)

Abstract: Five ways on comparing covariance matrix are applied to the Shanghai 50 Indexes Stock Exchange, which are sample covariance matrix, scalar matrix, two-parameter covariance matrix, single index matrix, constant correlation matrix. We adopt principal components method and Markowitz portfolio method to measure stock market risk using VaR, getting the effect of measuring market risk. The result shows that sample covariance matrix and two-parameter covariance matrix could measure market risk more effectively. The VaR of Markwoitz portfolio method has a great bias from actual loss.

Keywords：Covariance Matrix; Portfolio; VaR

收稿日期：2005-02-20

基金项目：本文得到 01 年国家自然科学基金项目(70173043)；02 年教育部重点项目（02JAZ790005）；02 年教育部重大项目（02JAZJD790007）

作者简介：陈守东（1955-），男，天津市蓟县人，吉林大学数量经济研究中心、商学院财务系主任、教授，博士生导师，博士学位；李轶婷（1980-），女，吉林省长春市人，吉林大学商学院数量经济学专业硕士研究生；胡铮洋（1980-），男，吉林省长春市人，吉林大学商学院数量经济学专业硕士研究生。

附录：有效前沿面和无风险证券

图 V：切点(1.4545，0.1667)

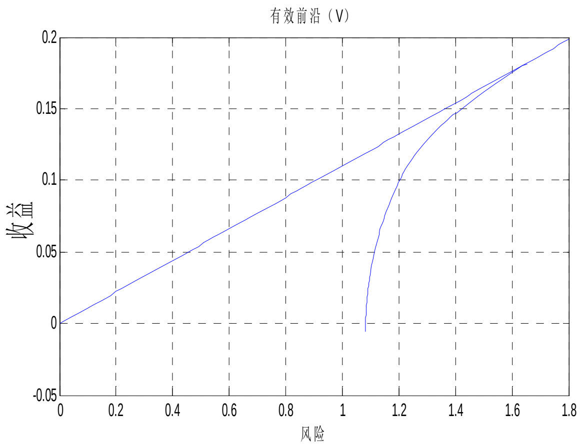

图 F：切点(1.4228，0.1657)

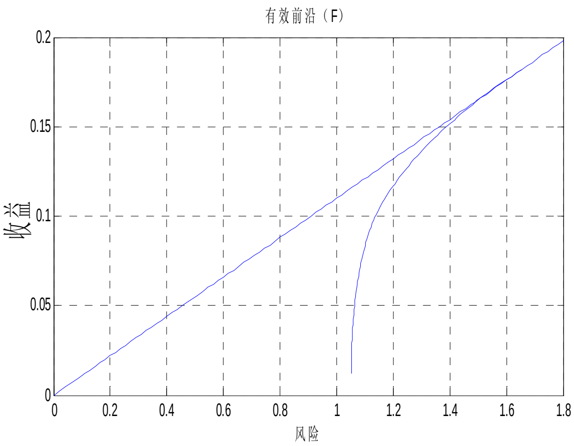

图 C：切点(1.4689，0.1661)

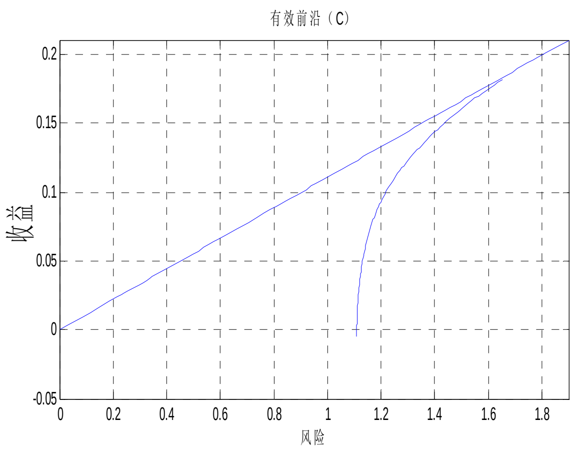

图 K：切点(1.2467，0.1342)

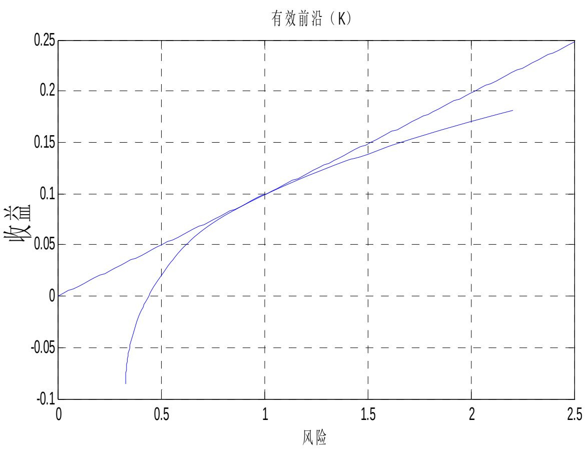

图 P：切点(1.8872，0.1742)