数学基础论的三大流派

梁 彪

（中山大学逻辑与认知研究所，中山大学哲学系 ，广州 510275）

摘要 本文对 20 世纪出现了有关数学基础论三大流派作一些简要的分析。逻辑主义认为数学可以化归为逻辑，集合论悖论的发现给逻辑主义者造成重大的打击，逻辑主义失败的原因在于他们没有看到逻辑与数学之间存在着质的区别。直觉主义否定非构造性数学即古典数学，其失败的原因在于他们把数学归结为对于人类思想的某种功能的研究，而且完全否认了数学的客观意义。形式主义要求把数学理论组织成既有公理又有变形规则的“形式系统”使数学既解除悖论的威胁，又保留古典数学。哥德尔不完全定理证明了形式主义的目的是不可能实现的，其原因在于片面地夸大了有限和无限的对立性。

关键词 数学基础 逻辑主义 直觉主义 形式主义

中图分类号：B81 **文献标识码：** A

数学基础论是对数学问题进行哲学思考的结果。“数学的基础究竟是什么？”这个问题，一直是人们关注的对象。20 世纪初出现了三种主要思潮，它们对传统的数学的基础理论进行了挑战，并各以自己不同的观点和不同的方式，来回答数学的基础是什么的问题。这三种数学哲学的思潮是：以弗雷格和罗素为首的逻辑主义、以布劳威尔为首的直觉主义、以希尔伯特为首的形式主义。

1 逻辑主义者要把数学化归为逻辑

1．逻辑主义思潮概述

20 世纪初德国逻辑学家弗雷格和英国逻辑学家罗素提出了一个著名观点：数学可以化归为逻辑。也就是说，用逻辑的概念来定义数学的概念，运用逻辑的规则，通过逻辑演绎来证明所有的数学命题。后来，这种观点被称为逻辑主义。

逻辑主义产生的原因在于当时人们认为数学的基础并不稳固。当时的数学基础研究理论，就是“数学算术化”理论，即把数学的基础归结为皮亚诺的算术公理，而这些公理的可靠性又建筑在自明的即直觉的基础之上。弗雷格认为，直觉是不可靠的，而只有逻辑才使数学建筑在绝对可靠的基础之上。弗雷格据此展开了他的工作，他首先试图从逻辑推导出算术，认为算术理论可以建立在逻辑的基础之上。

罗素的数学基础研究迟于弗雷格的研究，而在一定程度上超出了弗雷格的工作。弗雷格与罗素所从事的研究工作并不完全一样，但是，他们有一个共同之处，就是从逻辑去开展数学理论时，他们都用到了集合的概念和理论。所以，集合的问题成了逻辑主义的关键所在。但是，集合论悖论的发现给逻辑主义者造成重大的打击，因为如果集合理论本身是不可靠的，那么是没有资格作为全部数学的最终基础的。

面对集合悖论的冲击，逻辑主义者只有两种选择：要么完全放弃“逻辑是数学的可靠基础”这种观点，要么先解决如何避免悖论的问题，然后由逻辑出发去开展出全部数学。

收稿日期：2004-12-31；

作者简介：梁彪（1951-），广东阳江人， 中山大学逻辑与认知研究所，中山大学哲学系副教授，主要从事现代逻辑，西方逻辑史，逻辑哲学与哲学逻辑研究。

弗雷格选择的是前者。弗雷格在他得知罗素悖论后，放弃了逻辑主义立场。罗素则选择了后者，他和怀特海一起研究如何有效地避免悖论的出现，然后由逻辑出发去开展出全部数学。其结果就是他们写成了著名的《数学原理》，他们认为，这本巨著实现了逻辑主义的目标。

人们高度评价《数学原理》及逻辑主义的基础研究工作，但是，许多人却仍然否定逻辑主义的“数学可以化归为逻辑”这一原则。由于《数学原理》实质上是以集合论为基础，并按照分支类型论的原则去开展全部数学的，因此，人们的批评主要有两点，第一，集合论不是逻辑；第二，按照分支类型论的原则并不能真正地开展出全部的数学。对于第一点，很多人认为，集合的概念和理论不属于逻辑的范畴。更重要的是，在《数学原理》中采用了无穷公理，由于无穷公理肯定了无穷多个对象的存在性，也即包含了关于外在事实的断言，所以它不是纯粹的形式。这样，无穷公理就不能被看成是逻辑的命题。对于第二点，人们对于分支类型论的原则这一限制的合理性及逻辑主义的有关工作提出了批评。例如，有人提出，虽然非直谓的定义方式包含了循环，但是，这种循环未必是恶性的，从而也就并非一定导致悖论，所以，我们就不应排斥非直谓的定义方式，这样，分支类型论中关于级的划分就是不必要的。另外一个问题是来自由于分支类型论的限制而造成的数学理论开展上的困难。例如，由于分数理论是建立在整数理论基础之上（分数被定义为整数的序偶），因此，按照类的划分的原则，整数理论中的零、有理数理论中的零、以及实数理论中的零也必须看成不同的对象，但这样做是十分繁琐的。

为了解决上述困难，罗素后来曾分别提出了所谓的“类型含糊原则”和“可化归公理”。但是，类型含糊原则以及化归公理的提出又立即招来了新的批评。可以看出，无论采取哪一种作法，根据罗素原来的设想，按照分支类型论的原则由逻辑出发去开展出全部数学，这个目标在《数学原理》中并没有真正得到实现。

由于逻辑主义者事实上是以集合论为基础来开展数学理论的，而集合论则不能被认为是属于逻辑的（而且，其可靠性的问题也没有得到真正的解决）；又由于按照分支类型论的原则建立起来的数学理论是十分复杂和“不自然的”，因此，逻辑主义者就未能实现为全部数学奠定一个“可靠的、永恒的基础”的目标。正是在这样的意义上，人们认为，逻辑主义的努力是失败了。

2．逻辑主义者的贡献

逻辑主义者的努力虽然是失败了，但是他们对于数学理论基础研究还是作出很大贡献的。具体地说，这种贡献主要表现在这样两个方面：首先，逻辑主义者把对数学基础研究，推到了一个新的水平。例如，跟原来的数学“算术化”的工作相比，逻辑主义的基础研究显然达到了更大的深度。事实上，逻辑主义者的工作提供了如何由集合理论出发去开展全部数学的一个可能的模式，从而就不仅标志着在数学理论的系统化方面达到了新的、更高的水平，而且也直接促进了对集合论的深入研究。其次，由于逻辑主义者是以“逻辑”为基础去开展全部数学的，因此，作为其基础研究的一个方面，也就直接促进了对于逻辑的数学研究，并因此而造成了逻辑的“数学化”，从而，逻辑主义者也就对逻辑的发展作出了重要的贡献。

3．逻辑主义失败原因分析

数学与逻辑是相互依赖的。公理化方法实质上就是逻辑方法在数学中的直接应用，它表明了数学对于逻辑的依赖。另外，数学与逻辑的研究都具有高度的抽象性。逻辑的抽象特性表现为其推理的有效性是由其形式、而不是由其内容所决定的。由于逻辑所从事的主要是有效的推理形式的研究，因此，它也就被称为“纯形式的科学”。数学也具有高度的抽象性。它的研究对象就是抽象的概念。又由于数学中所从事的是“纯粹的量”的研究，这也就是说，在数学的抽象中我们完全舍弃了事物的质的内容，从而，在这样的意义上，数学也可说成一种“纯形式”的研究。因此，数学与逻辑就具有一定的相同之处。

但是,两者之间又存在的重要区别。数学与逻辑的差异性主要表现在研究对象的不同上：尽管两者在一定意义上都可说成纯形式的研究，但是，它们是从不同的角度去从事形式的研究的，或者说，数学抽象与逻辑抽象的内容是互不相同的。具体地说，正如前面所指出的，逻辑中所从事的是纯形式的研究，但这里所说的“纯形式”主要是指语句的逻辑（语法）结构，而且，这种研究的主要目标又是为了解决推理的有效性问题，即研究如何单纯地依据语句的逻辑结构去判定推理的有效性。数学也是纯形式的研究；但是，这里所谓的“纯形式”主要是指事物的量的属性。这也就是说，在数学的研究中，我们完全舍弃了事物的质的内容，而仅仅着眼于量的特性。另外，这种研究的主要目的则又在于揭示客观世界的量的规律性。从而，在数学与逻辑的研究对象之间就存在有质的区别。而也正因为此，把数学等同于逻辑（或者片面强调由数学向逻辑的化归）就是完全错误的了。

所以，既应看到在数学与逻辑之间所存在的相同之处，又要看到两者之间的质的区别，而决不能因片面强调相同之处从而把数学与逻辑绝对地等同起来。

一般地说，在逻辑主义的历史发展中，对于数学与逻辑的同一性的强调曾起过决定性的作用。但是，正如前面指出的，如果我们因此而完全否认了两者的差异性那就是错误的了。逻辑主义失败的根源就在于思想上的片面性：由于片面地强调了数学与逻辑的同一性，以致完全抹杀了它们的质的区别，并错误地认为“数学可以化归为逻辑”，因此，其基础研究的失败就是不可避免的了。

2　直觉主义者提出“存在必须等于被构造”

1．直觉主义思潮概述

直觉主义是现代数学基础研究中的另一主要学派。主要的代表人物有布劳维尔、海亭等。直觉主义者认为，数学主要是指人类的一种特殊的思维活动，而不是指经由这种思维活动发展起来的数学理论，这种思维活动的主要特性在于它的“纯主观性”，即是建立在所谓的“纯直觉”之上的，而且，这种纯直觉又是完全不依赖语言（和逻辑的）。历史上一直存在着“静态的数学观”和“动态的数学观”两种不同的观点。前者认为，数学是纯粹的知识的积累，是超越时空的、绝对的不变的；后者认为，数学是人类的创造性活动的结果。直觉主义过于强调数学思想的重要性，而忽视了形式的作用，因此，直觉主义的数学观就是一种绝对化了的“动态的观点”。

直觉主义者之所以重视数学的哲学分析，其直接原因就在于由于悖论的发现而导致的基础危机。因此，直觉主义者认为，我们就不能希望通过局部的修改或限制来解决数学的可靠性问题，而必须从根本上去重新考虑数学的性质等基本问题。从“直觉是数学的最终依据”的思想出发，直觉主义者提出了如下的著名口号：“存在必须等于被构造。”

直觉主义者所关注的主要是数学的可靠性问题，因此，它们的逻辑研究就集中在这样一个问题上：古典逻辑是否是普遍有效的？数学论证在逻辑上的正确性是否足以保证相应的数学结论在直觉上的可靠性？

由“存在必须等于被构造”的原则出发，直觉主义者对古典逻辑中的相当一部分原则采取了否定的态度。例如，排中律历来被认为是基本的逻辑法则之一，但由于建立在排中律之上的数学证明，如反证法等无法保证相应的数学对象在直觉上的可构造性，因此，按照直觉主义者的观点，排中律并不具有普遍有效性。

由上可见，直觉主义对于排中律的否定是由其根本立场所决定的：由于坚持对数学作动态的、历史的分析，更由于坚持“存在必须等于被构造”的原则。出于同样的考虑，直觉主义者还拒绝了如下的双重否定律。

在发展直觉主义数学的过程中，直觉主义者也发展起了自己的逻辑理论。

直觉主义者认为，直觉主义的逻辑研究是完全为其数学研究服务的，逻辑事实上只是数

学的一个部分，即是一种具有特殊一般性的数学定理。具体地说，按照直觉主义的观点，对于任何逻辑概念都必须予以“构造性”的解释。例如，对于直觉主义逻辑中的否定词“并非”及蕴涵词“如果…，那么…”就应作如下的理解：

“$\sim p$”即是指一个构造，运用这一构造，由任何关于 p 的构造出发就会得出矛盾；

“$p \rightarrow q$”即是指一个构造，运用这一构造，由所有关于 p 的构造出发就会得出 q 的构造。

直觉主义的逻辑观与逻辑主义的数学观是完全相反的。在直觉主义看来，所有逻辑命题都具有“我已经实现了具有如下性质的一个构造……”的形式，因此所有这些命题也就都是数学的命题。而也正因为此，在直觉主义者看来，我们就不能把逻辑看成是某种先于数学的东西，更不能把逻辑作为数学的基础。

直觉主义逻辑与古典逻辑有相当大的区别。例如，排中律在直觉主义逻辑中是不成立的。在他们看来，承认排中律等于承认存在有这样的一般方法，把它应用于所有特殊命题 p，都必然地或者会产生 p 的构造，或者会产生（$\sim p$）的构造。这是他们所不能允许的。一般地说，直觉主义逻辑与古典逻辑的区别主要表现在否定词的性质上。如在直觉主义逻辑中就只有 $p \rightarrow \sim\sim p$，而没有 $\sim\sim p \rightarrow p$。

2．直觉主义的贡献

直觉主义者对于数学和逻辑研究上是有一定的贡献的。

直觉主义者对于数学中的定义和证明提出了一种更为严格的要求，所以他们为数学研究开拓了一个新的方向，而且直觉主义数学也实践中也得到了一定的应用。更为重要的是，直觉主义逻辑又已被证明与电子计算机的设计与改进有着较为密切的联系。因此，直觉主义的逻辑研究也就是具有一定意义的。而且，直觉主义者对创造性思维的作用及数学的发展性的肯定，提出了构造性与非构造性的区分，揭示了古典数学与古典逻辑的相对性，这些思想都是包含有一定的合理因素的，所以一定程度上促进了数学和逻辑的发展。

3．直觉主义失败分析

虽然直觉主义的数学思想中包含合理因素，但是，由于思想上的片面性，最终就不可避免地导致了失败。

首先，应该看到，数学理论既有包含有变化的、不稳定的因素，也有不变的、稳定的因素。人们在进行数学理论研究时，应该既肯定创造性思维的作用，也要看到这种创造性活动的客观性。直觉主义者片面强调了创造性思维在数学发展中的作用，把数学只归结为对于人类思想的某种功能的研究，而且完全否认了数学的客观意义，从而就走上了唯心主义的错误道路。其次，又由于片面地强调对于数学的动态的研究，在直觉主义那里数学思想与语言形式被绝对地对立了起来，而这样最终也就不可避免地导致了“数学神秘主义”。

其次，直觉主义者认为直觉是数学的唯一可靠依据，提出了“存在必须等于被构造”的原则，对已有数学的批判和改造。事实上，古典数学的真理性是实践证明了的，不能全部否定非构造性数学即古典数学。对构造性数学采取绝对肯定的态度也是错误的。直觉主义者把直觉看成是数学的可靠基础的问题。他们假设了一种绝对可靠的、客观的“数学直觉”的存在性，这与通常的关于直觉的认识，即关于直觉在本质上是易谬的、主观的认识相违背的。应该说，古典数学与构造性数学都是现代数学理论的组成部分。

另外，通过对逻辑真理相对性进行一些分析，也可以显示出直觉主义逻辑观错误。

首先，长期生活实践中已经证明了古典逻辑具有真理性，这是谁都不能加以否认的。其次，古典逻辑与直觉主义逻辑都有着特定的适用范围。例如，就逻辑在数学中的应用而言，古典逻辑就只适用于非构造性数学，直觉主义逻辑则适用于构造性数学。因此，它们都具有一定的相对性。总之，所有的逻辑理论，不管是古典逻辑，还是直觉主义逻辑都有一定的相对性。因此，直觉主义者对于古典逻辑的绝对否定以及对于直觉主义逻辑的绝对肯定都是错误的。

对于逻辑与数学的关系，逻辑主义者与直觉主义者是截然相反的。直觉主义者则认为逻辑法则是特殊的数学定理，从而逻辑就只是数学的一个部分。而逻辑主义者认为数学可以化归为逻辑，所以数学只是逻辑的一个部分。事实上，这两种观点又都是错误的。数学与逻辑即存在着同一性，也存在着差异性，因此，无论是片面强调由数学向逻辑的化归，或认为逻辑只是数学的一个部分，都是错误的。

直觉主义者并没有真正解决了数学可靠性问题，所以他们的努力是失败了。其原因在于：

（1）直觉主义并没有真正实现按照构造性的要求来重建古典数学（至少是其大部分）的目标。而在那些被直觉主义者所抛弃的数学理论中，有相当部分人普遍认为是具有重要价值的，从而也就是必须予以保留的。

（2）与古典数学相比，直觉主义数学在很多场合下并没有显得更为“直接”或更为“明显”。恰恰相反，某些部分反而表现出了更大的抽象性与复杂性。直觉主义数学与古典数学相比并不具有更大的“直观性”，因此，在这样的意义上，直觉主义数学也就并不比古典数学更为可靠。

综上所述，直觉主义的基础研究就未能成功，而这种失败则又正是由于其数学哲学思想上的错误所决定的。

3　形式主义者要把数学理论组织成“形式系统”

1．形式主义概述

逻辑主义者对已有的数学理论基本上持肯定的态度，他们所关注的主要是如何把数学建立在逻辑的基础之上；直觉主义者对已有的数学理论则持激烈的批评态度，他们并力图用一种新的数学理论（直觉主义数学）来完全取代已有的数学理论。从上面可以看到，这两条路都是走不通的，这时出现了第三个思潮，即形式主义，其代表人物德国数学家希尔伯特。

希尔伯特认为，在数学与逻辑之间是存在有质的区别的，不可能成功的把数学化归为逻辑。可见，对于如何看待逻辑与数学的关系，他的观点与逻辑主义者有着明显的区别。同时，希尔伯特有一些看法跟直觉主义者相同，认为只有有限的范畴才是绝对的可靠的，涉及无限是不那么可靠的，古典数学中包含了许多关于无限的概念和方法，所以是不那么可靠的。但是，跟直觉主义者不同的是，希尔伯特并不认为我们因此就应完全放弃古典数学中任何有价值的部分。与此相反，希尔伯特认为，通过某些方法进行处理，例如，简化证明，统一各种不同的理论，保存传统的逻辑法则，等等，我们仍然可以把非有限的因素作为理想元素引入到数学中来，问题的关键就是要证明这种引进不会导致错误。

所以，希尔伯特既担心古典数学中所包含的非有限因素的可靠性，又希望保存古典数学中任何有价值的部分。他希望既要保留古典数学，又要消除数学当中出现的悖论。希尔伯特要把这些思想发展成了数学基础研究的具体规划。

希尔伯特认为，数学基础研究的具体目标就在于：把古典数学组织成形式系统，并用有限的方法（理论）来证明这些系统的无矛盾性。希尔伯特认为，一旦实现了上述目标，就不仅解除了悖论对于数学的威胁，而且也从直觉主义的攻击下挽救了古典数学。这样，数学的基础问题就得到了彻底的解决。

从 19 世纪 20 年代开始，希尔伯特及其合作者围绕上述目标进行了系统的研究。随着研究工作的逐步深入，他们的研究逐渐超出了证明由古典数学抽象而出的形式系统的相容性的范围，包括了对于系统的各个方面的研究。例如，证明系统的相容性，证明系统的完备性，寻找判定方法，证明公理独立性，等等。

希尔伯特的最终目标在于：构造出一个相容的、完备的、可判定的形式系统，系统中的定理对应于与直觉上为真的数学命题集，而且，关于相容的、完备的、可判定等性质的证明又可以仅仅借助有限的方法得以实现。而这也就是所谓的“希尔伯特规划”。

希尔伯特规划的提出，体现了一种新的数学思想，也就是所谓的形式主义数学观。这种观点认为，一切数学对象都只是无意义的符号，数学命题则是按照指定的法则组成的符号序列，在数学中，我们要做的工作就是按照指定的法则对于无意义的符号序列去进行纯形式的变形。希尔伯特设想，假如这个规划得以完成，就可以彻底解决数学的基础问题，不用再担心数学的可靠性了。

希尔伯特在数学形式化这个方向取得了一些初步的成果，但是，逻辑学家哥德尔却证明了这一目标是不可能实现的。这样，整个的希尔伯特规划也就全部落空了。

哥德尔最初的计划就是想要证明古典数学的相容性的。但是，事与愿违的是，他后来却得出了著名的不完备性定理，而正是这一定理及其推论终结了希尔伯特规划。

哥德尔不完备性定理可以表述如下：

所有以形式算术系统为子系统的形式系统，如果是相容的，那它就一定是不完备的。这也就是说，对于任何相容的形式系统来说，如果其中足以开展出适量的算术理论的话，那么，在这一系统中一定存在有这样的命题，其自身及其否命题都不可能在这一系统中得到证明。

总的来说，哥德尔的定理就清楚地表明了，对于任何足够丰富的形式系统来说，只要是相容的，就一定是不完备的（也是不可能完备的），这样，其目标是把古典数学组织成相容的、完备的形式系统的希尔伯特规划，也就被证明是不可能实现的了。

除此之外，哥德尔定理还可以如下的推论：

对于所有以形式算术系统为子系统的形式系统来说，如果这一系统是相容的，就不可能存在这样的关于系统相容性的证明，它可以在系统内得到表述。这也就是说，对于任何足够丰富的形式系统来说，都不可能在这一系统中给出关于自身相容性的证明。

由于希尔伯特规划的主要目标是用有限的方法证明由古典数学抽象而出的形式系统（首先是形式算术系统）的相容性，而“有限的方法”一般认为总可以在算术系统内得到表述，因此，上述推论也就清楚地表明用有限的方法去证明形式系统的相容性是不可能的（如果这种系统足够丰富的话）。这样，希尔伯特规划就彻底失败了。

2．形式主义的贡献

希尔伯特规划虽然失败了，但是希尔伯特的研究工作对于数学和逻辑发展的重要意义。

首先，希尔伯特的研究方法达到了更高的抽象程度。在此之前的实质的公理化方法是有某种特定对象的，而抽象的公理系统（包括形式系统）没有特定的对象，任何事物，只要系统中的公理对于它们来说是成立的，那么，所有由这些公理出发经由演绎而得出的定理对于它们来说也是成立的，从而，可以把这一系统看成是所说对象的一种数学模型，这样，数学研究的意义就得到了极大的扩展。

其次，由于抽象的公理化方法不对应任何具体的对象，人们可以随心所欲地去建立各种“假设一演绎系统”，进而去研究这些系统的性质，这样，极大地扩充了数学的研究对象。

最后，由于形式的研究方法清楚地揭示了各种数学理论的逻辑结构，因此，也就为深入地研究各种数学理论的内在联系打下了基础。

此外，希尔伯特在为他的规划进行研究当中，，他以及其他的数学家和逻辑学家的元数学研究也产生了许多重要的成果。例如，哥德尔不完备性定理等。从此以后，元数学发展成为作为一门独立的数学分支。元数学的思想也已经在数学以外得到了广泛的应用，并产生了重要的结果。对此可以用一阶谓词演算的完备性定理为例来进行说明。

命题演算系统和（一阶）谓词演算系统的建立标志着数理逻辑成熟。这两个系统建立之后，人们又开始研究这两个系统是否是完备的和相容的。这种研究关系到了数理逻辑的有效性和合理性问题，这就是说，系统是否足以刻划出所有的逻辑真理，它又是否会导致错误的结论。1930 年哥德尔证明了一阶谓词演算的完备性定理，这一成果被认为是数理逻辑研究最重要的成就之一，它标志着数理逻辑在逻辑中的地位也就最终得到了确立。

所以，我们就应充分肯定希尔伯特的数学基础研究的积极意义。

3．形式主义错误分析

希尔伯特的数学思想中是具合理因素。但是，又有片面性。具体地说，

第一，希尔伯特片面地夸大了有限和无限的对立性，完全否认了包含有无限性成份的古典数学的客观意义。

第二，关于有限的数学是绝对可靠的（从而可以成为全部数学的可靠基础）这一点上，希尔伯特也是错误的。因为任何一种数学理论都只是一种相对真理，都有特定的适用范围，所以认为有限性数学是绝对可靠是错误的。

最后，完全强调形式的研究，而忽视了内容的分析是错误的。虽然形式相对独立于内容，在一定的条件下，我们可以撇开具体的内容去进行纯形式的研究，但是两者又不能截然分开，因为形式最终又是由内容所决定的。

希尔伯特数学思想的基本立场是错误的，他的失败已经由哥德尔不完全性定理而得到了证实。

数学基础研究三大思潮的出现，是当时数学发展造成的，随着数学基础研究的逐步开展，与基础问题有关的哲学思考就逐渐成为现代数学哲学研究的主要内容。他们虽然失败了，但他们的工作大大地促进了数学基础研究的发展。

参考文献：

［1］ 威廉·涅尔等：《逻辑学的发展》，商务印书馆 1985 年中译本

［2］ 郑文辉：《欧美逻辑学说史》，中山大学出版社 1994 年

［3］ 郑毓信等：《数学·逻辑与哲学》湖北人民出版社 1987 年

［4］ I. M. Bochenski：A history of formal logic, Indiana , 1961

［5］ A. Dumitriu：History of logic, England, 1977

On three schools about the base of mathematics

LIANG Biao

(Institute of Logic and Cognition, Department of Philosophy, Sun Yat-sen University, 510275, Guangzhow, China)

Abstract: This paper makes simple analysis to the three main schools of the. study of mathematical base in last century. Logicism holes that mathematics can be reduced to logic, but the logicists were beaten by the discovery of the set paradox, because they have not discerned the intrinsic differences between logic and mathematics. Intuitionism denies non-constructional mathematics, namely, classic mathematics. Intuitionists failed because they holds that mathematics simply is the study of some function of the mankind thought, denies the objectivity of mathematics. The main aim of Formalism is to save mathematics from the threaten of set paradox, reserves classic mathematics, so they wanted to change mathematics to formal system there are some axiom and rule in it. But Gödel´s imcompleteness theorem has proved Formalism could not be succeed. We hold that Formalism overemphasizes the opposition between finiteness and infiniteness.

Key word: mathematical base; Logicism; Intuitionism; Formalism