动态认知条件句逻辑 DEC1

李小五
(中山大学逻辑与认知研究所，广东 广州 510275)

摘要：首先，我们构造动态认知条件句系统 **DEC1**，给出它的一些证明论结果。其次，我们引入有序邻域语义，给出描述 **DEC1** 的特征公理和规则的框架条件，证明 **DEC1** 相对这些框架条件是框架可靠的。最后，我们证明 **DEC1** 相对这些框架条件也是框架完全的。

关键词：动态认知条件句系统；有序邻域语义；框架可靠性；框架完全性

中国分类号： B81　文献标识码： A

主体的一个动态认知全过程至少有 4 个要素：认知目的、背景知识、认知活动和认知结果。主体根据它的认知目的和背景知识，通过认知活动，最后达到认知结果。

本文我们用一种 4 元条件句 ABa≥C 来描述这个过程。在这样的条件句，A 表示主体的认知目的，B 表示它的背景知识，a 表示它的认知活动，C 表示由此产生的认知结果。因此 ABa≥C 的直观意义是“主体根据它的认知目的 A 和背景知识 B 通过认知活动 a 能得到认知结果 C（能认知 C）”。所以 ABa≥C 应该是模态公式。

我们知道，一般情况下，背景知识是一个（可以是无穷的）公式集。但这里为了简单，我们把背景知识看作是有穷集β，从而用 B 来表示∧β，即 B 是β中所有公式的一个合取。

我们可以把β很自然地推广到无穷，从而β中所有公式的一个合取∧β＝B 是无穷逻辑语言中的一个公式。因此我们下面建立的逻辑也可以很自然地推广到相应的无穷逻辑。

为了简单，本文我们只研究单主体逻辑，将来我们另外撰文将此推广到多主体逻辑。

1　形式系统及其证明论

本文提到但未定义的概念和记号，请参见李小五的［1］。

定义 1.1　形成规则

（1）我们总用 a 和 b（加或不加下标）表示认知活动，其形成规则如下：

　　π│a;b│a⊕b│a⊗b。

（2）所有活动的集合记为 Action。

（3）这里我们规定：

　　a⊕a＝a，　a⊗a＝a。

（4）我们总用 A, B, C 和 D（加或不加下标）表示公式，其形成规则如下：

　　p│¬A│A∧B│ABa≥C。

（5）所有公式的集合记为 Form。Form 也称为**认知过程语言**。

（6）ABa≥C 称为**有三个前件的条件句**，其中 A, B 和 a 分别称为 ABa≥C 的**第一前件**，

收稿日期：2004-12-16；
基金项目：本文得到教育部人文社会科学重点研究基地项目（02JAZJD720017）的资助
作者简介：李小五(1955-)，男，河北人，中山大学教授，博导，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员。

第二前件和第三前件。┤

说明：

（2）中的π表示原子认知活动。a;b 表示认知活动 a 和 b 的复合(composition)：先进行 a 再进行 b。a⊕b 表示认知活动 a 和 b 的选择(choice)：任选 a 或 b 中一个活动进行。a⊗b 表示认知活动 a 和 b 的并行(parallelism)：同时进行活动 a 和 b。

规定与缩写 1.2

（1）联结符∨，→和↔定义如通常。

（2）为了叙述方便，我们规定**联结符的结合力**从左到右依次减弱：

¬，∧，∨，⩾，→，↔。

（3）若有必要，我们也用圆点“·”隔开 ABa⩾C 的三个前件。例如，

$(ABa_1 \geqslant C_1) \wedge (ABa_2 \geqslant C_2) \rightarrow AB\cdot a_1 \otimes a_2 \geqslant C_1 \wedge C_2$，

$(A_1Ba \geqslant C) \wedge (A_2Ba \geqslant C) \rightarrow A_1 \vee A_2 \cdot Ba \geqslant C$，且

$(AB\cdot a_1;a_2 \geqslant C) \wedge (ABa_1 \geqslant D) \rightarrow A\cdot B \wedge D\cdot a_2 \geqslant C$

分别表示

$(ABa_1 \geqslant C_1) \wedge (ABa_2 \geqslant C_2) \rightarrow AB(a_1 \otimes a_2) \geqslant C_1 \wedge C_2$，

$(A_1Ba \geqslant C) \wedge (A_2Ba \geqslant C) \rightarrow (A_1 \vee A_2)Ba \geqslant C$，　且

$(AB(a_1;a_2) \geqslant C) \wedge (ABa_1 \geqslant D) \rightarrow A(B \wedge D)a_2 \geqslant C$。

（4）⊥和 T 分别表示某个固定的常假式和常真式。

（5）我们常用符号⇔表示“当且仅当”，用⇒表示“若…，则…”。┤

定义 1.3

动态认知条件句系统 DEC1 定义如下：

公理（模式）：

（TA）　　所有重言式的代入特例，

（CC）　　$(ABa_1 \geqslant C_1) \wedge (ABa_2 \geqslant C_2) \rightarrow AB\cdot a_1 \otimes a_2 \geqslant C_1 \wedge C_2$，

（AD）　　$(A_1Ba \geqslant C) \wedge (A_2Ba \geqslant C) \rightarrow A_1 \vee A_2 \cdot Ba \geqslant C$，

（ACH）　$AB\cdot a_1 \oplus a_2 \geqslant C \leftrightarrow (ABa_1 \geqslant C) \vee (ABa_2 \geqslant C)$，

（AW）　　$AB\cdot a_1 \oplus a_2 \geqslant C \rightarrow AB\cdot a_1 \otimes a_2 \geqslant C$，

（CTR）　$(ABa_1 \geqslant C) \wedge (ACa_2 \geqslant D) \rightarrow AB\cdot a_1;a_2 \geqslant D$，

（CMP）　$(ABa \geqslant C) \wedge A \wedge B \rightarrow C$。

推理规则：

（MP）　　$A, A \rightarrow C／C$，

（RAE）　$A_0 \leftrightarrow A／A_0Ba \geqslant C \leftrightarrow ABa \geqslant C$，

（RBM）　$B \rightarrow B_0／AB_0a \geqslant C \rightarrow ABa \geqslant C$，

（RCM）　$C_0 \rightarrow C／ABa \geqslant C_0 \rightarrow ABa \geqslant C$。

说明：

（1）由 TA 和 MP 构成的系统称为**经典句子系统**，记为 **PC**。我们也用 $\mathbf{PC}_0$ 表示用不含⩾的语言表述的 **PC**。

（2）CC 称为**结果合取公理**。CC 的直观意义是：若某个主体根据它的认知目的 A 和背景知识 B 分别通过认知活动 a_1 和 a_2 能认知 C_1 和 C_2，则它根据 A 和 B 通过并行认知活动 $a_1 \otimes a_2$ 能认知 $C_1 \wedge C_2$。这个公理的合理性建立在认知活动 a_1 和 a_2 在并行时不会互相干扰的前提下。

（3）AD 称为**目的析取公理**。

（4）ACH 称为**活动选择公理**。

（5）AW 称为**弱化公理**。

（6）CTR 称为**传递公理**，又称为**活动复合公理**。CRT 的直观意义是：若主体根据它的认知目的 A 和背景知识 B 通过第一个认知活动 a_1 能认知中间结果 C，又把 C 作为它的背景知识通过第二个认知活动 a_2 能认知 D，则该主体根据 A 和原来的背景知识 B 通过复合认知活动 $a_1;a_2$ 能认知 D。这个公理刻画了一种认知活动连续的过程。

（7）CMP 称为**认知结果分离律**。CMP 的直观意义是：若主体根据它的认知目的 A 和背景知识 B 通过认知活动 a 能认知结果 C，并且 A 和 B 又成立，则该主体认知的 C 也成立。这个公理说明，当主体的目的为真时认知结果也为真。

（8）RAE 称为**目的等价置换规则**。

（9）RBM 称为**背景知识蕴涵规则**。它表示主体能用蕴涵其背景知识的结果作为新的背景知识，所以 RBM 是反单调性的。据 RBM 易得

$ABa \geqslant C \rightarrow A{\cdot}B{\wedge}D{\cdot}\, a \geqslant C$，

而此公式刻画了一种背景知识增长过程。

（10）RCM 称为**结果蕴涵规则**。它表示主体总能认知其认知结果的逻辑后承，所以 RCM 是单调的。

（11）上述除 TA 以外的公理都称为 **DEC1** 的**特征公理**，除 MP 和 RAE 以外的规则都称为 **DEC1** 的**特征规则**。

定义 1.4

（1）我们用$\vdash$A 表示 A 是 **DEC1** 的**内定理**。

（2）**DEC1** 的全体内定理的集合记为 Th(**DEC1**)。

（3）我们也用 $\nvdash$A 表示 A$\notin$Th(**DEC1**)。┤

引理 1.5

下面是 **DEC1** 的内定理：

（1）$(ABa_1 \geqslant C) \wedge (ABa_2 \geqslant C) \rightarrow AB{\cdot}\, a_1 \otimes a_2 \geqslant C$，

（2）$(ABa \geqslant C_1) \wedge (ABa \geqslant C_2) \rightarrow ABa \geqslant C_1 \wedge C_2$，

（3）$(ABa_1 \geqslant C) \vee (ABa_2 \geqslant C) \rightarrow AB{\cdot}\, a_1 \otimes a_2 \geqslant C$。

证明：

我们只给出证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。

（1）据 CC 和 RCM。

（2）据 CC 和定义 1.1（3）。

（3）据 ACH 和 AW。┤

下面我们研究 **DEC1** 与 $\mathbf{PC_0}$ 的关系。我们要证明前者是后者的协调概括，或者说前者可以协调地退化为后者。

定义 1.6

（1）定义从语言 Form 到不含$\leqslant$的子语言 $Form_0 \subseteq Form$ 的**翻译映射** t 如下：

$t(p) = p$，　对所有句符 p；

$t(\neg A) = \neg t(A)$；

$t(A \wedge B) = t(A) \wedge t(B)$；

$t(ABa \geqslant C) = t(C)$。

（2）对每一公式 A$\in$Form，我们称 t(A)是 A 的 **t-翻译**。┤

说明：

据上面的定义，易证

$t(A\vee B)=t(A)\vee t(B)$，

$t(A\to B)=t(A)\to t(B)$，

$t(A\leftrightarrow B)=t(A)\leftrightarrow t(B)$。

定义 1.7

令 **S** 和 **T** 是任意两个公理化系统。

我们称 **S** 能 **t-退化**为 **T**，当且仅当 **S** 的所有内定理都能 t-翻译为 **T** 的内定理。┤

定理 1.8

DEC1 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$。

证明：

据上一定义，证明显然。┤

定义 1.9

称公理化系统 **S** 是**协调系统**，当且仅当不存在 A 使得 A 和¬A 都是 **S** 的内定理。┤

定理 1.10

DEC1 是协调的。

证明：

假设 **DEC1** 不协调，则存在 A 使得 A 和¬A 都是 **DEC1** 的内定理。据上面的定理，t(A) 和¬t(A)都是 $\mathbf{PC}_0$ 的内定理，矛盾于 $\mathbf{PC}_0$ 的协调性。┤

2　有序邻域语义和可靠性定理

定义 2.1

任给集合 X，我们用 P(X)表示 X 的幂集。

（1）称二元组 F＝⟨W, N⟩是**有序邻域框架**，简称 F 是 **ON-框架**，当且仅当

① W 是非空的可能世界集，

② **邻域映射** N 是从 Action×W 到 P(P(W)×P(W)×P(W))中的映射。

（2）称三元组 M＝⟨W, N, [ ]⟩是**有序邻域模型**，简称 M 是 **ON-模型**，当且仅当⟨W, N⟩是 **ON-**框架且

③ [ ]是从全体句符到 P(W)的指派映射。

（3）[ ]也称为框架⟨W, N⟩上的指派映射。┤

定义 2.2　真值集定义

令 M＝⟨W, N, [ ]⟩是 **ON-**模型。

对每一复合公式 A，定义 A 相对 M 的**真值集**[A]如下：对任意 $w\in W$, $a\in Action$ 和公式 A, B 和 C，

（1）$w\in[\neg A] \Leftrightarrow w\notin[A]$，

（2）$w\in[A\wedge B] \Leftrightarrow w\in[A]$且 $w\in[B]$，

（3）$w\in[ABa\geqslant C] \Leftrightarrow <[A], [B], [C]>\in N(a, w)$。┤

说明：

基于框架定义的模型和定义复合公式的真值集，两者合在一起称为**语义**，因为由此我们可以在任何一个模型的任意可能世界中给任何一个公式赋予一个意义（真值）。

上面给出的语义称为**有序邻域语义**。

定义 2.3

（1）称 **ON-**框架 $F=\langle W, N\rangle$是**动态认知条件句框架**，简称 F 是 **dec1-框架**，当且仅当下列**框架条件**成立：对任意 $w\in W$ 和 $a, a_1, a_2\in$ Action 和 $X, Y, Z, U, Z_1, Z_2, X_1, X_2, Y_0, Z_0\subseteq W$，

(cc) $<X, Y, Z_1>\in N(a_1, w)$且$<X, Y, Z_2>\in N(a_2, w)\Rightarrow <X, Y, Z_1\cap Z_2>\in N(a_1\otimes a_2, w)$，

(ad) $<X_1, Y, Z>\in N(a, w)$且$<X_2, Y, Z>\in N(a, w)\Rightarrow <X_1\cup X_2, Y, Z>\in N(a, w)$，

(ach) $N(a_1\oplus a_2, w)=N(a_1, w)\cup N(a_2, w)$，

(aw) $N(a_1\oplus a_2, w)\subseteq N(a_1\otimes a_2, w)$，

(ctr) $<X, Y, Z>\in N(a_1, w)$且$<X, Z, U>\in N(a_2, w)\Rightarrow <X, Y, U>\in N(a_1;a_2, w)$。

(cmp) $<X, Y, Z>\in N(a, w)$且 $w\in X\cap Y\Rightarrow w\in Z$，

(rbm) $Y\subseteq Y_0$ 且$<X, Y_0, Z>\in N(a, w)\Rightarrow <X, Y, Z>\in N(a, w)$，

(rcm) $Z_0\subseteq Z$ 且$<X, Y, Z_0>\in N(a, w)\Rightarrow <X, Y, Z>\in N(a, w)$。

（2）所有的 **dec1**-框架的类记作 Frame(**dec1**)。┤

定义 2.4 有效性定义

令 $F=\langle W, N\rangle$是 **ON-**框架，$M=\langle W, N, [\ ]\rangle$是 **ON-**模型。

（1）称 A 在 M 中**有效**，记为 $M\vDash A$，当且仅当$[A]=W$；否则称 A 在 M 中**不有效**，记为 $M\nvDash A$ 。

（2）称 A 在 F 中**有效**，记为 $F\vDash A$，当且仅当，对 F 上的任意指派映射[ ]，有$[A]=W$；否则称 A 在 F 中**不有效**，记为 $F\nvDash A$ 。

（3）称规则 $A_1,\ldots, A_n/C$ 相对 M **保持有效性**，当且仅当，若$[A_1]=\ldots=[A_n]=W$，则$[C]=W$。┤

引理 2.5

令 $M=\langle W, N, [\ ]\rangle$是 **ON-**模型。则

（1）$[\neg A]=W-[A]$，

$[A\wedge B]=[A]\cap[B]$，

$[A\vee B]=[A]\cup[B]$，

$[\bot]=\varnothing$，$[\top]=W$。

（2）$[A]\cap[A\rightarrow B]\subseteq[B]$。

（3）$[A\rightarrow B]=W\Leftrightarrow [A]\subseteq[B]$。

（4）$[A\leftrightarrow B]=W\Leftrightarrow [A]=[B]$。┤

定义 2.6

（1）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架可靠系统**，当且仅当，**S** 的内定理在 ***C*** 的所有框架中有效。

（2）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架完全系统**，当且仅当，在 ***C*** 的所有框架中有效的公式是 **S** 的内定理。┤

定理 2.7 框架可靠性定理

DEC1 相对框架类 Frame(**dec1**)是可靠的。

证明：

任给 **dec1-**框架 F＝<W, N>和 F 上赋值[ ]。

下面验证 **DEC1** 的公理相对 M＝<F, [ ]>有效且 **DEC1** 的推理规则相对 M 保持有效性。

验证公理 TA 和规则 MP：显然。

验证公理 CC：任给 $w\in[(ABa_1\geqslant C_1)\wedge(ABa_2\geqslant C_2)]$。则

$<[A], [B], [C_1]>\in N(a_1, w)$， $<[A], [B], [C_2]>\in N(a_2, w)$。

据定义 2.3 的(cc)，我们有

$<[A], [B], [C_1]\cap[C_2]>\in N(a_1\otimes a_2, w)$。

据引理 2.5，我们有

$<[A], [B], [C_1\wedge C_2]>\in N(a_1\otimes a_2, w)$。

所以我们有 $w\in[AB\cdot a_1\otimes a_2\geqslant C_1\wedge C_2]$。所以据 2.5（3），我们有

$w\in[(ABa_1\geqslant C_1)\wedge(ABa_2\geqslant C_2)\rightarrow AB\cdot a_1\otimes a_2\geqslant C_1\wedge C_2]$。

验证公理 AD：任给 $w\in[(A_1Ba\geqslant C)\wedge(A_2Ba\geqslant C)]$。则

$<[A_1], [B], [C]>\in N(a, w)$， $<[A_2], [B], [C]>\in N(a, w)$。

据定义 2.3 的(ad)，我们有

$<[A_1]\cup[A_2], [B], [C]>\in N(a, w)$。

据引理 2.5，我们有

$<[A_1\vee A_2], [B], [C]>\in N(a, w)$。

所以我们有 $w\in[A_1\vee A_2\cdot Ba\geqslant C]$。

验证公理 ACH：任给 $w\in W$，我们有

$w\in[AB\cdot a_1\oplus a_2\geqslant C]$

$\Leftrightarrow <[A], [B], [C]>\in N(a_1\oplus a_2, w)$。

$\Leftrightarrow <[A], [B], [C]>\in N(a_1, w)\cup N(a_2, w)$ 据定义 2.3 的(ach)

$\Leftrightarrow w\in[(ABa_1\geqslant C)\vee(ABa_2\geqslant C)]$。

验证公理 AW：任给 $w\in[AB\cdot a_1\oplus a_2\geqslant C]$。则

$<[A], [B], [C]>\in N(a_1\oplus a_2, w)$。

据定义 2.3 的(aw)，我们有

$<[A], [B], [C]>\in N(a_1\otimes a_2, w)$。

所以我们有 $w\in[AB\cdot a_1\otimes a_2\geqslant C]$。

验证公理 CTR：任给 $w\in[(ABa_1\geqslant C)\wedge(ACa_2\geqslant D)]$。则

$<[A], [B], [C]>\in N(a_1, w)$， $<[A], [C], [D]>\in N(a_2, w)$。

据定义 2.3 的(ctr)，我们有

$<[A], [B], [D]>\in N(a_1;a_2, w)$。

据 2.2（3），我们有 $w\in[AB\cdot a_1;a_2\geqslant D]$。

验证公理 CMP：任给 $w\in[(ABa\geqslant C)\wedge A\wedge B]$。则

$<[A], [B], [C]>\in N(a, w)$， $w\in[A\wedge B]=[A]\cap[B]$。

据定义 2.3 的(cmp)，我们有 $w\in[C]$。

验证规则 RAE：设$[A_0\leftrightarrow A]=W$。据 2.5，有

（＃）$[A_0]=[A]$。

任给 $w\in W$，我们有

$w\in[A_0Ba\geqslant C]\Leftrightarrow\ <[A_0], [B], [C]>\in N(a, w)$ 据真值集定义 2.2

$\Leftrightarrow\ <[A], [B], [C]>\in N(a, w)$ 据（＃）

$\Leftrightarrow w\in[ABa\geqslant C]$ 据真值集定义 2.2。

因此据 w 的任意性，有

$[A_0Ba\geqslant C]=[ABa\geqslant C]$，

据 2.5，我们有

$[A_0Ba\geqslant C\leftrightarrow ABa\geqslant C]=W$。

验证规则 RBM：设$[B\rightarrow B_0]=W$。据 2.5，有

（＃）$[B]\subseteq[B_0]$。

任给 $w\in W$，我们有

$w\in[AB_0a\geqslant C]\Leftrightarrow\ <[A], [B_0], [C]>\in N(a, w)$ 据真值集定义 2.2

$\Rightarrow\ <[A], [B], [C]>\in N(a, w)$ 据（＃）和 2.3 的(rbm)

$\Leftrightarrow w\in[ABa\geqslant C]$ 据真值集定义 2.2。

因此据 w 的任意性，有

$[AB_0a\geqslant C]\subseteq[ABa\geqslant C]$，

据 2.5，我们有

$[AB_0a\geqslant C\rightarrow ABa\geqslant C]=W$。

验证规则 RCM：设$[C_0\rightarrow C]=W$。据 2.5，有

（＃）$[C_0]\subseteq[C]$。

任给 $w\in W$，我们有

$w\in[ABa\geqslant C_0]\Leftrightarrow\ <[A], [B], [C_0]>\in N(a, w)$ 据真值集定义 2.2

$\Rightarrow\ <[A], [B], [C]>\in N(a, w)$ 据（＃）和 2.3 的(rcm)

$\Leftrightarrow w\in[ABa\geqslant C]$ 据真值集定义 2.2。

因此据 w 的任意性，有

$[ABa\geqslant C_0]\subseteq[ABa\geqslant C]$，

据 2.5，我们有

$[ABa\geqslant C_0\rightarrow ABa\geqslant C]=W$。┤

3 完全性定理

定义 3.1

令 w 是公式集。

（1）称 w 是**一致集**，当且仅当对所有有穷序列 $A_1,\ldots, A_n\in w$，有 $\nvdash\neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$。

（2）称 w 是**极大集**，当且仅当对所有 $A\in Form$，$A\in w$ 或$\neg A\in w$。

（3）称 w 是**极大一致集**，当且仅当 w 既是一致的又是极大的。

（4）称 **DEC1** 是**一致系统**，当且仅当 Th(**DEC1**)是一致的。┤

引理 3.2

DEC1 是一致的。

证明：

假设 **DEC1** 不一致。则 Th(**DEC1**)不一致，所以存在 $A_1,\ldots,A_n \in$ Th(**DEC1**)使得

$\vdash\neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$。

另一方面，因为 $A_1,\ldots,A_n \in$ Th(**DEC1**)，所以易证

$\vdash A_1\wedge\ldots\wedge A_n$。

据定义 1.9，**DEC1** 不协调，矛盾于定理 1.10。┤

因为 **DEC1** 是 **PC** 的扩充，所以如通常证明，我们有下列结果。

引理 3.3

令 w 是极大一致集。

（1）$\neg A\in w \Leftrightarrow A\notin w$，

$A\wedge B\in w \Leftrightarrow A\in w$ 且 $B\in w$，

$A\vee B\in w \Leftrightarrow A\in w$ 或 $B\in w$，

$A\in w$ 且$\vdash A\rightarrow B \Rightarrow B\in w$，

$A\in w$ 且 $A\rightarrow B\in w \Rightarrow B\in w$。

（2）Th(**DEC1**)$\subseteq$w。

（3）若$\nvdash A$，则存在极大一致集 u 使得 $A\notin u$。┤

定义 3.4

$|A|=\{w$：w 是极大一致集使得 $A\in w\}$。┤

引理 3.5

（1）$|\neg A|=W-|A|$，　其中 W 是所有极大一致集的集合，

$|A\wedge B|=|A|\cap|B|$，

$|A\vee B|=|A|\cup|B|$，

$|\bot|=\varnothing$，$|\top|=W$。

（2）$|A|\cap|A\rightarrow B|\subseteq|B|$。

（3）$|A\rightarrow B|=W \Leftrightarrow |A|\subseteq|B| \Leftrightarrow \vdash A\rightarrow B$。

（4）$|A\leftrightarrow B|=W \Leftrightarrow |A|=|B| \Leftrightarrow \vdash A\leftrightarrow B$。

证明：

据上一引理易证。┤

定义 3.6

（1）定义 **DEC1** 的**典范框架** $N=\langle W, N\rangle$如下：

① $W=\{w$：w 是极大一致集$\}$，

② N 是从 Action×W 到 P(P(W)×P(W)×P(W))中的映射使得

$\langle|A|, |B|, |C|\rangle\in N(a, w) \Leftrightarrow ABa\geqslant C\in w$，

对任意 $w\in W$, $a\in$ Action 和公式 A, B 和 C。

（2）定义 **DEC1** 的**典范模型** $M=\langle W, N, [\ ]\rangle$如下：$\langle W, N\rangle$是 **DEC1** 的典范框架，且

③ $[p]=|p|$，　对每一句符 p。┤

说明：

据引理 3.2，**DEC1** 是一致的，所以 W 非空。

定理 3.7　典范模型基本定理

令 M＝<W, N, [ ]>是如上定义的 **DEC1** 的典范模型。

（1）$D\in w \Leftrightarrow w\in[D]$，　对每一 $w\in W$ 和公式 D。

（2）$|D|=[D]$，　对每一公式 D。

证明：

（2）从（1）易得。所以我们只须证（1）。

施归纳于 D 的结构。

句符的情况据上一定义的③。

布尔联结符¬和∧的情况如通常所证。

令 D＝ABa≥C。所以

$w\in[D] \Leftrightarrow w\in[ABa\geqslant C]$

$\Leftrightarrow <[A], [B], [C]>\in N(a, w)$　据 2.2 的（3）

$\Leftrightarrow <|A|, |B|, |C|>\in N(a, w)$　据归纳假设

$\Leftrightarrow ABa\geqslant C\in w$　据上一定义的②

$\Leftrightarrow D\in w$。┤

定理 3.8

令 M 是 **DEC1** 的典范模型。则对每一公式 A，我们有

$M\models A \Leftrightarrow \vdash A$。

证明：

$\vdash A \Leftrightarrow |A|=W$　据引理 3.3（2）－（3）

$\Leftrightarrow [A]=W$　据上一定理

$\Leftrightarrow M\models A$　据有效性定义 2.4。┤

定义 3.9

（1）定义 **DEC1** 的**适当结构**(proper structure) M＝<W, N, [ ]>如下。

（a）W＝{w：w 是极大一致集}；

（b）对所有 $a\in Action$ 和 $w\in W$，

$N(a, w)=\{<|A|, Y, Z>: ABa\geqslant C\in w \text{ 使得 } X\subseteq|A| \text{且} |B|\subseteq Y\}$；

（c）$[p]=|p|$，　对每一句符 p。

（2）F＝<W, N>称为 **DEC1** 的**适当框架**。┤

引理 3.10

令 M＝<W, N, [ ]>是 **DEC1** 的适当结构。则 M 是 **DEC1** 的典范模型。

证明：

据定义 3.6，只须证：对任意 $a\in Action$, $w\in W$ 和公式 A, B 和 C，

（1）　$<|A|, |B|, |C|>\in N(a, w) \Leftrightarrow ABa\geqslant C\in w$。

“⇐”：设 $ABa\geqslant C\in w$。因为 $|B|\subseteq|B|$ 且 $|C|\subseteq|C|$，所以据 N(a, w)的构造，有

$<|A|, |B|, |C|>\in N(a, w)$。

“⇒”：设 $<|A|, |B|, |C|>\in N(a, w)$。因为等价类的代表元不是惟一的，所以据 N(a, w)的构造，

（2）存在 $A_0B_0\geqslant C_0\in w$ 使得 $|A_0|=|A|$, $|B|\subseteq|B_0|$ 且 $|C_0|\subseteq|C|$。

因为 $|A_0|=|A|$, $|B|\subseteq|B_0|$ 且 $|C_0|\subseteq|C|$，所以据引理 3.5，有

$\vdash A_0 \leftrightarrow A$，$\vdash B \rightarrow B_0$，$\vdash C_0 \rightarrow C$。

据$\vdash A_0 \leftrightarrow A$ 和 RAE，有

$\vdash A_0B_0a \geqslant C_0 \leftrightarrow AB_0a \geqslant C_0$。

再据$\vdash B \rightarrow B_0$ 和 RBM，有

$\vdash A_0B_0a \geqslant C_0 \rightarrow ABa \geqslant C_0$。

再据$\vdash C_0 \rightarrow C$ 和 RCM，有

$\vdash A_0B_0a \geqslant C_0 \rightarrow ABa \geqslant C$。

因为 $A_0B_0a \geqslant C_0 \in w$，所以 $ABa \geqslant C \in w$。$\dashv$

引理 3.11

DEC1 的适当框架 F 是 **dec1-**框架。

证明：

下面我们来验证 F 满足定义 2.3 给出的框架条件。

验证(cc)。设$\langle X, Y, Z_1\rangle \in N(a_1, w)$且$\langle X, Y, Z_2\rangle \in N(a_2, w)$。则

（1）存在 $A_1B_1a_1 \geqslant C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X$, $Y \subseteq |B_1|$且$|C_1| \subseteq Z_1$，　且

（2）存在 $A_2B_2a_2 \geqslant C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X$, $Y \subseteq |B_2|$且$|C_2| \subseteq Z_2$。

因为$|A_1| = |A_2|$，所以据（1）的 $A_1B_1a_1 \geqslant C_1 \in w$ 和 RAE，有

（3）$A_2B_1a_1 \geqslant C_1 \in w$。

因为

$\vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_1$，　$\vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_2$，

所以据（3)，（2）的 $A_2B_2a_2 \geqslant C_2 \in w$ 和 RBM，有

（4）$A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a_1 \geqslant C_1 \in w$，　$A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a_2 \geqslant C_2 \in w$。

再据公理 CC，易得

（5）存在 $A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a_1 \otimes a_2 \geqslant C_1 \wedge C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X$, $Y \subseteq |B_1 \wedge B_2|$且$|C_1 \wedge C_2| \subseteq Z_1 \cap Z_2$。

所以$\langle X, Y, Z_1 \cap Z_2\rangle \in N(a, w)$。

验证(ad)。设$\langle X_1, Y, Z\rangle \in N(a, w)$且$\langle X_2, Y, Z\rangle \in N(a, w)$。则

（1）存在 $A_1B_1a \geqslant C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X_1$, $Y \subseteq |B_1|$且$|C_1| \subseteq Z$，　且

（2）存在 $A_2B_2a \geqslant C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X_2$, $Y \subseteq |B_2|$且$|C_2| \subseteq Z$。

因为$|A_1| = |A_2|$，所以据（1）的 $A_1B_1a \geqslant C_1 \in w$ 和 RAE，有

（3）$A_2B_1a \geqslant C_1 \in w$。

因为

$\vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_1$，　$\vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_2$，

所以据（3)，（2）的 $A_2B_2a \geqslant C_2 \in w$ 和 RBM，有

（4）$A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a \geqslant C_1 \in w$，　$A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a \geqslant C_2 \in w$。

因为

$\vdash C_1 \rightarrow C_1 \vee C_2$，　$\vdash C_2 \rightarrow C_1 \vee C_2$，

所以再据（4）和 RCM，有

$A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a \geqslant C_1 \vee C_2 \in w$，　$A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a \geqslant C_1 \vee C_2 \in w$。

再据公理 AD，易得

（5）存在 $A_1 \vee A_2 \cdot B_1 \wedge B_2 \cdot a \geqslant C_1 \vee C_2 \in w$ 使得$|A_1 \vee A_2| = X_1 \cup X_2$, $Y \subseteq |B_1 \wedge B_2|$且$|C_1 \vee C_2| \subseteq Z$。

所以$\langle X_1 \cup X_2, Y, Z\rangle \in N(a, w)$。

验证(ach)。任给 X, Y, Z$\subseteq$W，易见下面命题等价：

（1）$<X, Y, Z>\in N(a_1\oplus a_2, w)$。

（2）存在 $AB\cdot a_1\oplus a_2\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。

（3）存在$(ABa_1\geqslant C)\vee(ABa_2\geqslant C)\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。（据公理 ACH）

（4）存在 $ABa_1\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$，　或

存在 $ABa_2\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。

（5）$<X, Y, Z>\in N(a_1, w)$，或$<X, Y, Z>\in N(a_2, w)$。

（6）$<X, Y, Z>\in N(a_1, w)\cup N(a_2, w)$。

因此我们有

$$N(a_1\oplus a_2, w)=N(a_1, w)\cup N(a_2, w)。$$

验证(aw)。设$<X, Y, Z>\in N(a_1\oplus a_2, w)$。则

（1）存在 $AB\cdot a_1\oplus a_2\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。

再据公理 AW，易得

（2）存在 $AB\cdot a_1\otimes a_2\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。

所以$<X, Y, Z>\in N(a_1\otimes a_2, w)$。

验证(ctr)。设$<X, Y, Z>\in N(a_1, w)$且$<X, Z, U>\in N(a_2, w)$。则

（1）存在 $A_1B_1a_1\geqslant C_1\in w$ 使得$|A_1|=X$, $Y\subseteq|B_1|$且$|C_1|\subseteq Z$，　且

（2）存在 $A_2B_2a_2\geqslant C_2\in w$ 使得$|A_2|=X$, $Z\subseteq|B_2|$且$|C_2|\subseteq U$。

因为$|A_1|=|A_2|$，所以据（1）的 $A_1B_1a_1\geqslant C_1\in w$ 和 RAE，有

（3）$A_2B_1a_1\geqslant C_1\in w$。

因为$|C_1|\subseteq|B_2|$，所以$\vdash C_1\to B_2$，再据（3）和 RCM，有

（4）$A_2B_1a_1\geqslant B_2\in w$。

再据（2）的 $A_2B_2a_2\geqslant C_2\in w$ 和公理 CTR，易得

（5）存在 $A_2B_1\cdot a_1;a_2\geqslant C_2\in w$ 使得$|A_2|=X$, $Y\subseteq|B_1|$且$|C_2|\subseteq U$。

所以$<X, Y, U>\in N(a_1;a_2, w)$。

验证(cmp)。设$<X, Y, Z>\in N(a, w)$且 $w\in X\cap Y$。则

（1）存在 $ABa\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。

据 $ABa\geqslant C\in w$ 和 CMP，易得 $A\wedge B\to C\in w$，所以据 3.3，有

（2）$A\wedge B\in w \Rightarrow C\in w$。

因此

（3）$w\in|A\wedge B| \Rightarrow w\in|C|$。

因为$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$，所以

$$X\cap Y \subseteq|A|\cap|B|=|A\wedge B|。$$

据设定，有 $w\in X\cap Y$，所以 $w\in|A\wedge B|$。据（3），有 $w\in|C|$。因为$|C|\subseteq Z$，所以 $w\in Z$。

验证(rbm)。设 $Y\subseteq Y_0$ 且$<X, Y_0, Z>\in N(a, w)$。则

（1）存在 $ABa\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y_0\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。

因为 $Y\subseteq Y_0$，所以

（2）存在 $ABa\geqslant C\in w$ 使得$|A|=X$, $Y\subseteq|B|$且$|C|\subseteq Z$。

所以$<X, Y, Z>\in N(a, w)$。

验证(rcm)。设 $Z_0 \subseteq Z$ 且 $<X, Y, Z_0> \in N(a, w)$。则

（1）存在 $ABa \geqslant C \in w$ 使得 $|A| = X, Y \subseteq |B|$ 且 $|C| \subseteq Z_0$。

因为 $Z_0 \subseteq Z$，所以

（2）存在 $ABa \geqslant C \in w$ 使得 $|A| = X, Y \subseteq |B|$ 且 $|C| \subseteq Z$。

所以 $<X, Y, Z> \in N(a, w)$。┤

定理 3.12　框架完全性定理

DEC1 相对框架类 Frame(**dec1**)是完全的。

证明：

只须证：

（%）　若A不是 **DEC1** 的内定理，则 A 在某个 **dec1**-框架中不有效。

设 A不是 **DEC1** 的内定理。令 M＝<W, N, [ ]>是 **DEC1** 的适当结构，且令 F＝<W, N>是 **DEC1** 的适当框架。据引理 3.10，M 是 **DEC1** 的典范模型。据设定和定理 3.8，有 M⊭A，所以 F⊭A。再据上一引理，F 是 **dec1**-框架，所以有要证结果。┤

我们下一步要考虑的问题：

1、如通常动态逻辑那样考虑下面重要的活动：

（1）检测命题 A 的认知活动 A?，

（2）有穷次重复认知活动 a 的活动 a*，　和

（3）认知活动 a 的逆活动 a^{-}。

在我们看来，至少认知活动 A?和 a*是很有意义的。当然，增加前一种活动会大大增加我们要处理的公式的复杂度，因为这时复合活动中包含公式。

2、比较精细研究不同种类的认知活动。例如，主体对外部世界的认知和对其知识的认知（反思）。

3、把上述结果推广到相应的多主体逻辑。

参考文献:

[1] 李小五. 条件句逻辑[M]. 北京:人民出版社, 2003.

Dynamic Epistemic Conditional Logic DEC1

LI Xiao-wu

(Institute of Logic and Cognition of Zhongshan University 510275, Guangdong, China)

Abstract: Firstly, we construct the dynamic epistemic conditional system **DEC1**, give some results of its proof theory. Secondly, we introduce the order neighborhood semantics, give the frame conditions of the character axioms and rules of **DEC1**, prove the frame soundness of **DEC1** with respect to the frame conditions. Finally, we prove the frame completeness of **DEC1** with respect to the frame conditions as well.

Key words: dynamic epistemic conditional system; order neighborhood semantics; frame soundness; frame completeness