双结果条件句逻辑

李小五[1] 陈小平[2]

(1. 中山大学逻辑与认知研究所，广东 广州 510275；2. 中国科技大学计算机系，安徽 合肥 230027)

摘要：首先，我们构造双结果条件句系统 **DC**，给出一些证明论结果。其次，我们引入有序邻域语义，给出描述 **DC** 的特征公理的框架条件，证明 **DC** 相对上述框架条件是框架可靠的。最后，我们证明 **DC** 相对这些框架条件也是框架完全的。

关键词：双结果条件句系统；有序邻域语义；框架可靠性；框架完全性

中国分类号： B81 文献标识码： A

本文我们要研究一种双结果条件句逻辑。双结果条件句我们用 A≥BC 表示，它的直观意义是"在条件 A 下，决策者 a 会优先考虑 C 而不是 B"。所以这样的句子是模态句。A≥BC 也可以理解为描述了一种条件偏好（conditional preference）。

为了简单，本文我们只研究单个决策者的逻辑，将来我们另行撰文将这里的结果推广到多个决策者的逻辑。

本文提到但未定义的概念和记号，请参见李小五的［1］。

1 形式系统及其证明论

定义 1.1 形成规则

（1）我们总用 A, B, C 和 D（加或不加下标）表示公式，其形成规则如下：

$$p \mid \neg A \mid A\wedge B \mid A \geqslant BC。$$

（2）所有公式的集合记为 Form。Form 也称为**双结果句语言**。

（3）A≥BC 称为**有两个后件的条件句**，其中 B 称为 A≥BC 的**第一后件**，C 称为 A≥BC 的**第二后件**。┤

规定与缩写 1.2

（1）联结符∨，→和↔定义如通常。

（2）为了叙述方便，我们规定**联结符的结合力**从左到右依次减弱：

$$\neg，\wedge，\vee，\geqslant，\to，\leftrightarrow。$$

我们还规定同类联结符**右向结合**，因此

$$A\geqslant BC\to A\to B\wedge C$$

就是

$$A\geqslant BC\to(A\to B\wedge C)。$$

收稿日期：2004-12-25；

基金项目：教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目 (04JZD0006) 资助

作者简介：

陈小平(1955-)，男，重庆人，中国科技大学教授，博导；

李小五(1955-)，男，河北人，中山大学教授，博导，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员。

（3）若有必要，我们也用圆点“·”隔开 $A \geqslant BC$ 的两个后件。例如，

$$A \geqslant B \cdot C \to D，A \geqslant B \to D \cdot C，A \geqslant B \wedge E \cdot C \to D$$

分别表示

$$A \geqslant B(C \to D)，A \geqslant (B \to D)C，A \geqslant (B \wedge E)(C \to D)。$$

（4）我们用 $A > C$ 缩写 $A \geqslant CC$。

（5）我们常用符号⇔表示“当且仅当”，用⇒表示“若…，则…”。┤

定义 1.3

双结果条件句系统 **DC** 定义如下：

公理（模式）：

（TA） 所有重言式的代入特例，

（GC） $(A_1 \geqslant B_1C_1) \wedge (A_2 \geqslant B_2C_2) \to A_1 \wedge A_2 \geqslant B_1 \wedge B_2 \cdot C_1 \wedge C_2$，

（CA_0） $(A_1 \geqslant BC) \wedge (A_2 \geqslant BC) \to A_1 \vee A_2 \geqslant BC$，

（CD_1） $(A \geqslant B_1C) \wedge (A \geqslant B_2C) \to A \geqslant B_1 \vee B_2 \cdot C$，

（CD_2） $(A \geqslant BC_1) \wedge (A \geqslant BC_2) \to A \geqslant B \cdot C_1 \vee C_2$，

（CTR） $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant CD) \to A \geqslant BD$，

（CCT） $(A \geqslant B \vee C \cdot B) \wedge (A \geqslant C \vee A \cdot C) \to A \geqslant B \vee A \cdot B$，

（CCV’） $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant DC) \to A \wedge B \geqslant DC$，

（$CMP_{\geqslant}$） $A \geqslant BC \to A \to B \wedge C$。

推理规则：

（MP） $A, A \to C ／ C$，

（REA） $A_1 \leftrightarrow A_2 ／ A_1 \geqslant BC \leftrightarrow A_2 \geqslant BC$，

（REC_1） $B_1 \leftrightarrow B_2 ／ A \geqslant B_1C \leftrightarrow A \geqslant B_2C$，

（REC_2） $C_1 \leftrightarrow C_2 ／ A \geqslant BC_1 \leftrightarrow A \geqslant BC_2$。┤

说明：

（1）由 TA 和 MP 构成的系统称为**经典句子系统**，记为 **PC**。我们也用 $\mathbf{PC}_0$ 表示用不含⩽的语言表述的 **PC**。

（2）GC 表示**广义合取律**。

（3）CA_0 表示**前件析取律**，CD_1 表示**第一后件析取律**，CD_2 表示**第二后件析取律**。

（4）CTR 和 CCT 均表示**条件化的后件传递律**。

我们之所以用 CTR，而不用

（CRT） $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant B \wedge C \cdot D) \to A \geqslant BD$，

是由于［2］中的需要。

CCT 是把条件作为一个结果与其他两个结果进行比较。CCT 是下式的特例

（GCCT） $(A \geqslant B \vee C \cdot B) \wedge (A \geqslant C \vee D \cdot C) \to A \geqslant B \vee D \cdot B$。

以后我们考虑加入 GCCT 的系统。

（5）REA 表示**前件等价置换规则**，REC_1 表示**第一后件等价置换规则**，REC_2 表示**第二后件等价置换规则**。

（6）CCV’揭示了条件与第一个后件之间的置换关系。

（7）$CMP_{\geqslant}$ 表示**条件分离律**。它从一个角度说明条件句算子与实质蕴涵之间的关系。

（8）除 TA，上述其余公理称为 **DC** 的**特征公理**。

（9）我们已经证明，本系统包含刻画常识推理的条件句逻辑的主要功能，并可用于刻画“条件偏好”，详见[2]。关于它的一些合理的扩充和变种，我们以后另行撰文发表。

定义 1.4

（1）我们用⊢A 表示 A 是 **DC** 的**内定理**。

（2）**DC** 的全体内定理的集合记为 Th(**DC**)。

（3）我们也用 ⊬A 表示 A∉Th(**DC**)。⊣

引理 1.5

下面是 **DC** 的内定理：

（1）$(A_1 \geqslant BC) \wedge (A_2 \geqslant BC) \rightarrow A_1 \wedge A_2 \geqslant BC$，　　（$AC_0$）

（2）$(A \geqslant B_1C) \wedge (A \geqslant B_2C) \rightarrow A \geqslant B_1 \wedge B_2 \cdot C$，　　（$CC_2$）

（3）$(A \geqslant BC_1) \wedge (A \geqslant BC_2) \rightarrow A \geqslant B \cdot C_1 \wedge C_2$。　　（$CC_2$）

证明：

我们只给出证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。

（1）

① $(A \geqslant BC_1) \wedge (A \geqslant BC_2) \rightarrow A \wedge A \geqslant B \wedge B \cdot C_1 \wedge C_2$　　GC

② $(A \geqslant BC_1) \wedge (A \geqslant BC_2) \rightarrow A \geqslant B \cdot C_1 \wedge C_2$。　　①，REA，$REC_1$

（2）－（3）证明类似（1）。⊣

定理 1.6　基本置换定理

若⊢B↔C，则⊢A↔A(C/B)，

其中 A(C/B)表示用 B 替换 A 中 C 的若干个出现得到的公式。

证明：

施归纳于公式 A 的结构，详细证明略。⊣

说明：

据上面的定理，易见 **DC** 满足组合原则。

下面，我们研究 **DC** 与 $\mathbf{PC}_0$ 的关系。我们要证明前者是后者的协调概括，或者说前者可以协调地退化为后者。

定义 1.7

（1）定义从双条件句语言 Form 到不含≤的子语言 $\text{Form}_0 \subseteq \text{Form}$ 的**翻译映射** t 如下：

$t(p) = p$，　对所有原子公式 p；

$t(\neg A) = \neg t(A)$；

$t(A \wedge B) = t(A) \wedge t(B)$；

$t(A \geqslant BC) = t(B) \wedge t(C)$。

（2）对每一公式 A∈Form，我们称 t(A)是 A 的 **t-翻译**。⊣

说明：

据上面的定义，易证

$t(A \vee B) = t(A) \vee t(B)$，

$t(A \rightarrow B) = t(A) \rightarrow t(B)$，

$t(A \leftrightarrow B) = t(A) \leftrightarrow t(B)$。

定义 1.8

令 **S** 和 **T** 是任意两个公理化系统。

我们称 **S** 能 **t-退化**为 **T**，当且仅当 **S** 的所有内定理都能 t-翻译为 **T** 的内定理。⊣

定理 1.9

DC 能 t-退化为 $\mathbf{PC}_0$，

证明：

易见公理 TA 和规则 MP 的 t-翻译仍是重言式的代入特例和分离规则。[1]

GC 的 t-翻译是

$$t((A_1 \geqslant B_1C_1) \wedge (A_2 \geqslant B_2C_2) \rightarrow A_1 \wedge A_2 \geqslant B_1 \wedge B_2 \cdot C_1 \wedge C_2)$$

$$= t(B_1) \wedge t(C_1) \wedge t(B_2) \wedge t(C_2) \rightarrow t(B_1 \wedge B_2) \wedge t(C_1 \wedge C_2)。$$

因此 GC 的 t-翻译形如

$\beta_1 \wedge \gamma_1 \wedge \beta_2 \wedge \gamma_2 \rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2$，　其中$\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in Form_0$。

CA_0 的的 t-翻译形如

$\beta \wedge \gamma \wedge \beta \wedge \gamma \rightarrow \beta \wedge \gamma$。

CD_1 的 t-翻译形如

$\beta_1 \wedge \gamma \wedge \beta_2 \wedge \gamma \rightarrow (\beta_1 \vee \beta_2) \wedge \gamma$。

CD_2 的 t-翻译形如

$\beta \wedge \gamma_1 \wedge \beta \wedge \gamma_2 \rightarrow \beta \wedge (\gamma_1 \vee \gamma_2)$。

CTR 的 t-翻译形如

$\beta \wedge \gamma \wedge \gamma \wedge \delta \rightarrow \beta \wedge \delta$。

CCT 的 t-翻译形如

$((\beta \vee \gamma) \wedge \beta) \wedge ((\gamma \vee \alpha) \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \alpha) \wedge \beta$。

CCV'的 t-翻译形如

$\beta \wedge \gamma \wedge \delta \wedge \gamma \rightarrow \delta \wedge \gamma$。

$CMP_{\geqslant}$的 t-翻译形如

$\beta \wedge \gamma \rightarrow \beta \wedge \gamma$。

REA 的 t-翻译形如

$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 / \beta \wedge \gamma \leftrightarrow \beta \wedge \gamma$。

REC_1 的 t-翻译形如

$\beta_1 \leftrightarrow \beta_2 / \beta_1 \wedge \gamma \leftrightarrow \beta_2 \wedge \gamma$。

REC_2 的 t-翻译形如

$\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 / \beta \wedge \gamma_1 \leftrightarrow \beta \wedge \gamma_2$。

据上面的结果，易见

（1）若 A 是 **DC** 的公理，则 A 的 t-翻译是 $\mathbf{PC}_0$ 的内定理；

（2）若 R 是 **DC** 的规则，则 R 的 t-翻译是 $\mathbf{PC}_0$ 的导出规则。

由此我们证明：

（3）若 A 是 **DC** 的内定理，则 A 的 t-翻译是 $\mathbf{PC}_0$ 的内定理。┤

定义 1.10

称公理化系统 **S** 是**协调系统**，当且仅当不存在 A 使得 A 和¬A 都是 **S** 的内定理。┤

定理 1.11

DC 是协调的。

证明：

假设 **DC** 不协调，则存在 A 使得 A 和¬A 都是 **DC** 的内定理，则据上面的定理，t(A)和

[1] 当然后者是 $Form_0$ 中的公式。下同。

$\neg t(A)$都是 $\mathbf{PC}_0$ 的内定理，矛盾于 $\mathbf{PC}_0$ 的协调性。┤

2　有序邻域语义和可靠性定理

定义 2.1

任给集合 X，我们用 P(X)表示 X 的幂集。

（1）称二元组 F＝⟨W, N⟩是**有序邻域框架**，简称 F 是 **ON-框架**，当且仅当

① W 是非空的可能世界集，

② **邻域映射** N 是从 W 到 P(P(W)×P(W)×P(W))中的一元映射。

（2）称三元组 M＝⟨W, N, [ ]⟩是**有序邻域模型**，简称 M 是 **ON-模型**，当且仅当⟨W, N⟩是 **ON-**框架且

③ [ ]是从全体句符到 P(W)的指派映射。

（3）[ ]也称为框架⟨W, N⟩上的指派映射。

（4）所有 **ON-**框架组成的框架类记为 Frame(**ON**)。┤

定义 2.2　真值集定义

令 M＝⟨W, N, [ ]⟩是 **ON-**模型。

对每一复合公式 A，定义 A 相对 M 的**真值集**[A]如下：对任意 $w\in W$，

（1）$w\in[\neg A] \Leftrightarrow w\notin[A]$，

（2）$w\in[A\wedge B] \Leftrightarrow w\in[A]$且 $w\in[B]$，

（3）$w\in[A\geqslant BC] \Leftrightarrow <[A], [B], [C]>\in N(w)$。┤

说明：

基于框架定义的模型和定义复合公式的真值集，两者合在一起称为**语义**，因为由此我们可以在任何一个模型的任意可能世界中对任何一个公式赋予一个意义（真值）。

上面给出的语义称为**有序邻域语义**。

关于上述邻域映射在人工智能决策中的直观意义以及与相关工作的关系，请参见［2］。

下面的例子说明双结果条件句的两个结果不能随便交换：

例 2.3

$p\geqslant qr\rightarrow p\geqslant rq$ 相对 Frame(**ON**)不是有效式。

证明：

令 M＝⟨W, N, [ ]⟩ 是 **ON-**模型使得：

$W=\{w\}=[p]=[q]$，

$N(w)=\{<W, W, \varnothing>\}$，

$[r]=\varnothing$。

则

$<[p], [q], [r]>\in N(w)$，$<[p], [r], [q]>\notin N(w)$，

所以

$w\notin[p\geqslant qr\rightarrow p\geqslant rq]$。┤

定义 2.4

（1）称 **ON-**框架 F＝⟨W, N⟩是**双结果条件句框架**，简称 F 是 **dc-框架**，当且仅当下列**框架条件**成立：对任意 $w\in W$ 和 $X, Y, Z, U, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2\subseteq W$，

(gc)　$<X_1, Y_1, Z_1>\in N(w)$且$<X_2, Y_2, Z_2>\in N(w) \Rightarrow <X_1\cap X_2, Y_1\cap Y_2, Z_1\cap Z_2>\in N(w)$，

(ca$_0$) $<X_1, Y, Z>\in N(w)$且$<X_2, Y, Z>\in N(w) \Rightarrow <X_1\cup X_2, Y, Z>\in N(w)$，
(cd$_1$) $<X, Y_1, Z>\in N(w)$且$<X, Y_2, Z>\in N(w) \Rightarrow <X, Y_1\cup Y_2, Z>\in N(w)$，
(cd$_2$) $<X, Y, Z_1>\in N(w)$且$<X, Y, Z_2>\in N(w) \Rightarrow <X, Y, Z_1\cup Z_2>\in N(w)$，
(ctr) $<X, Y, Z>\in N(w)$且$<X, Z, U>\in N(w) \Rightarrow <X, Y, U>\in N(w)$，
(cct) $<X, Y\cup Z, Y>\in N(w)$且$<X, Z\cup X, Z>\in N(w) \Rightarrow <X, Y\cup X, Y>\in N(w)$，
(ccv') $<X, Y, Z>\in N(w)$且$<X, U, Z>\in N(w) \Rightarrow <X\cap Y, U, Z>\in N(w)$，
(cmp) $<X, Y, Z>\in N(w)$且 $w\in X \Rightarrow w\in Y\cap Z$。

（2）所有的 dc-框架的类记作 Frame(**dc**)。⊣

定义 2.5 有效性定义

令 F＝⟨W, N⟩是 **ON**-框架，M＝⟨W, N, [ ]⟩是 **ON**-模型。

（1）称 A 在 M 中**有效**，记为 M ⊨A，当且仅当[A]＝W；否则称 A 在 M 中**不有效**，记为 M ⊭A 。

（2）称 A 在 F 中**有效**，记为 F⊨A，当且仅当，对 F 上的任意指派映射[ ]，有[A]＝W；否则称 A 在 F 中**不有效**，记为 F⊭A 。

（3）称规则 $A_1,\ldots, A_n$／C 相对 M **保持有效性**，当且仅当，若$[A_1]=\ldots=[A_n]=W$，则[C]＝W。⊣

引理 2.6

令 M＝⟨W, N, [ ]⟩是 **ON**-模型。则

（1）$[\neg A]=W-[A]$，
$[A\wedge B]=[A]\cap[B]$，
$[A\vee B]=[A]\cup[B]$，
$[\bot]=\varnothing$，$[\top]=W$， 其中⊥和 T 分别表示某个固定的常假式和常真式。

（2）$[A]\cap[A\to B]\subseteq[B]$。

（3）$[A\to B]=W \Leftrightarrow [A]\subseteq[B]$。

（4）$[A\leftrightarrow B]=W \Leftrightarrow [A]=[B]$。⊣

定义 2.7

（1）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架可靠系统**，当且仅当，**S** 的内定理在 ***C*** 的所有框架中有效。

（2）称系统 **S** 相对框架类 ***C*** 是**框架完全系统**，当且仅当，在 ***C*** 的所有框架中有效的公式是 **S** 的内定理。⊣

定理 2.8 框架可靠性定理

DC 相对框架类 Frame(**dc**)是可靠的。

证明：

任给 **dc**-框架 F＝<W, N>和 F 上赋值[ ]。

下面验证 **DC** 的公理相对 M＝<F, [ ]>有效且 **DC** 的推理规则相对 M 保持有效性。

验证公理 TA 和规则 MP：显然。

验证公理 GC：任给 $w\in[(A_1\geqslant B_1C_1)\wedge(A_2\geqslant B_2C_2)]$。则

$<[A_1], [B_1], [C_1]>\in N(w)$， $<[A_2], [B_2], [C_2]>\in N(w)$。

据定义 2.4 的(gc)，我们有

$<[A_1]\cap[A_2], [B_1]\cap[B_2], [C_1]\cap[C_2]>\in N(w)$。

据 2.6（1）和 2.2（3），我们有 $w\in[A_1\wedge A_2\geqslant B_1\wedge B_2\cdot C_1\wedge C_2]$。

验证公理 CA_0：设 $w\in[(A_1\geqslant BC)\wedge(A_2\geqslant BC)]$。则

$<[A_1], [B], [C]>\in N(w)$，　$<[A_2], [B], [C]>\in N(w)$。

再据定义 2.4 的(ca_0)，有

$<[A_1]\cup[A_2], [B], [C]>\in N(w)$，

据引理 2.6（1），我们有$<[A_1\vee A_2], [B], [C]>\in N(w)$，所以 $w\in[A_1\vee A_2\geqslant BC]$。

验证公理 CD_1：任给 $w\in[(A\geqslant B_1C)\wedge(A\geqslant B_2C)]$。则

$<[A], [B_1], [C]>\in N(w)$，$<[A], [B_2], [C]>\in N(w)$。

再据 2.4 的(cd_1)，我们有

$<[A], [B_1]\cup[B_2], [C]>\in N(w)$。

据 2.6（1），我们有 $w\in[A\geqslant B_1\vee B_2\cdot C]$。

验证公理 CD_2：任给 $w\in[(A\geqslant BC_1)\wedge(A\geqslant BC_2)]$。则

$<[A], [B], [C_1]>\in N(w)$，　$<[A], [B], [C_2]>\in N(w)$。

再据 2.4 的(cd_2)，我们有

$<[A], [B], [C_1]\cup[C_2]>\in N(w)$。

据 2.6（1），我们有 $w\in[A\geqslant B\cdot C_1\vee C_2]$。

验证公理 CTR：任给 $w\in[(A\geqslant BC)\wedge(A\geqslant CD)]$。则

$<[A], [B], [C]>\in N(w)$，　$<[A], [C], [D]>\in N(w)$。

据定义 2.4 的(ctr)，我们有

$<[A], [B], [D]>\in N(w)$。

所以 $w\in[A\geqslant BD]$。

验证公理 CCT：任给 $w\in[(A\geqslant B\vee C\cdot B)\wedge(A\geqslant C\vee A\cdot C)]$。据 2.6（1）和 2.2（3），有

$<[A], [B]\cup[C], [B]>\in N(w)$，　$<[A], [C]\cup[A], [C]>\in N(w)$。

再据 2.4 的(cct)，我们有

$<[A], [B]\cup[A], [B]>\in N(w)$。

据 2.6（1）和 2.2（3），我们有

$w\in[A\geqslant B\vee A\cdot B]$。

验证公理 CCV'：任给 $w\in[(A\geqslant BC)\wedge(A\geqslant DC)]$。则

$<[A], [B], [C]>\in N(w)$，　$<[A], [D], [C]>\in N(w)$。

再据 2.4 的(ccv')，我们有

$<[A]\cap[B], [D], [C]>\in N(w)$。

据 2.6（1）和 2.2（3），我们有

$w\in[A\wedge B\geqslant DC]$。

验证公理 $CMP_{\geqslant}$：任给 $w\in[A\geqslant BC]$。则$<[A], [B], [C]>\in N(w)$。再据 2.4 的(cmp)，有

$w\in[A]\Rightarrow w\in[B]\cap[C]$。

据真值集定义和引理 2.6（1），易证

$w\in[A\to B\wedge C]$。

验证规则 REA：设$[A_1\leftrightarrow A_2]=W$，则据 2.6（4），有

（＃）$[A_1]=[A_2]$。

任给 $w\in W$，我们有

$w\in[A_1\geqslant BC]$	$\Leftrightarrow <[A_1], [B], [C]>\in N(w)$	据真值集定义 2.2
	$\Leftrightarrow <[A_2], [B], [C]>\in N(w)$	据（＃）
	$\Leftrightarrow w\in[A_2\geqslant BC]$	据真值集定义 2.2。

因此据 w 的任意性，有

$[A_1\geqslant BC]=[A_2\geqslant BC]$，

据 2.6（4），我们有

$[A_1\geqslant BC\leftrightarrow A_2\geqslant BC]=W$。

同理可验证规则 REC_1 和 REC_2。┤

3 完全性定理

定义 3.1

令 w 是公式集。

（1）称 w 是**一致集**，当且仅当对所有有穷序列 $A_1,\ldots, A_n\in w$，有

$\nvdash\neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$。

（2）称 w 是**极大集**，当且仅当对所有 $A\in Form$，$A\in w$ 或$\neg A\in w$。

（3）称 w 是**极大一致集**，当且仅当 w 既是一致的又是极大的。

（4）称 **DC** 是**一致系统**，当且仅当 Th(**DC**)是一致的。┤

引理 3.2

DC 是一致的。

证明：

假设 **DC** 不一致。则 Th(**DC**)不一致，所以存在有穷序列 $A_1,\ldots, A_n\in$ Th(**DC**)使得

$\vdash\neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$。

另一方面，因为 $A_1,\ldots, A_n\in$ Th(**DC**)，所以易证

$\vdash A_1\wedge\ldots\wedge A_n$。

据定义 1.10，**DC** 不是协调的，矛盾于定理 1.11。┤

因为 **DC** 是 **PC** 的扩充，所以如通常证明，我们有下列结果。

引理 3.3

（1）令 w 是极大一致集。则

$\neg A\in w\Leftrightarrow A\notin w$，

$A\wedge B\in w\Leftrightarrow A\in w$ 且 $B\in w$，

$A\vee B\in w\Leftrightarrow A\in w$ 或 $B\in w$，

$A\in w$ 且$\vdash A\to B\Rightarrow B\in w$，

$A, A\to B\in w\Rightarrow B\in w$。

（2）Th(**DC**)$\subseteq$w。

（3）若$\nvdash$A，则存在极大一致集 w 使得 A$\notin$w。┤

定义 3.4

|A|＝{w：w 是极大一致集使得 A$\in$w }。┤

引理 3.5

（1）|¬A|＝W－|A|，　其中 W 是所有极大一致集的集合，

|A∧B|＝|A|∩|B|，

|A∨B|＝|A|∪|B|，

|⊥|＝∅，|T|＝W，　其中⊥和 T 分别表示某个固定的常假式和常真式。

（2）|A|∩|A→B|⊆|B|。

（3）|A→B|＝W ⇔ |A|⊆|B| ⇔ ⊢A→B。

（4）|A↔B|＝W ⇔ |A|＝|B| ⇔ ⊢A↔B。

证明：

据上一引理易证。┤

定义 3.6

（1）定义 **DC** 的**典范框架** N＝<W, N>如下：

① W＝{w：w 是极大一致集}；

② N 是从 W 到 P(P(W)×P(W)×P(W))中的一元映射使得

<|A|, |B|, |C|>∈N(w) ⇔ A≥BC∈w，　对任意 w∈W 和公式 A, B 和 C；

（2）定义 **DC** 的**典范模型** M＝<W, N, [ ]>如下：<W, N>是 **DC** 的典范框架，且

③ [p]＝|p| ，　对每一句符 p。┤

说明：

（1）**DC** 的典范框架相对系统 **DC** 不是惟一的。

（2）据引理 3.2，**DC** 是一致的，所以 W 是非空的。

定理 3.7　典范模型基本定理

令 M＝<W, N, [ ]>是如上定义的 **DC** 的典范模型。

（1）D∈w ⇔ w∈[D]，　对每一 w∈W 和公式 D。

（2）| D|＝[D]，　对每一公式 D。

证明：

（2）从（1）易得。所以我们只须证（1）。

施归纳于 D 的结构。

句符的情况据上一定义的③。

布尔联结词¬和∧的情况如通常所证。

令 D＝A≥BC。据归纳假设，我们有

（%）|A|＝[A]，|B|＝[B]，|C|＝[C]。

所以

w∈[D] ⇔　w∈[A≥BC]

⇔ <[A], [B], [C]>∈N(w)　　据 2.2 的（3）

⇔ <|A|, |B|, |C|>∈N(w)　　据（%）

⇔ A≥BC∈w　　据上一定义的②

$\Leftrightarrow D \in w$。┤

定理 3.8

令 M 是 **DC** 的典范模型。则对每一公式 A，我们有

$M \vDash A \Leftrightarrow \vdash A$。

证明：

$\vdash A \Leftrightarrow |A| = W$　　据引理 3.3（2）－（3）

$\Leftrightarrow [A] = W$　　据上一定理

$\Leftrightarrow M \vDash A$　　据有效性定义 2.5。┤

定义 3.9

（1）定义 **DC** 的**适当结构**(proper structure) $M^* = \langle W, N, [\ ]\rangle$如下。

（a）$W = \{w$：w 是极大一致集$\}$；

（b）$N(w) = \{\langle |A|, |B|, |C|\rangle$：存在 $A \geqslant BC \in w\}$，　对所有 $w \in W$；

（c）$[p] = |p|$，　对每一句符 p。

（2）$F^* = \langle W, N\rangle$称为 **DC** 的**适当框架**。┤

引理 3.10

令 $M^* = \langle W, N, [\ ]\rangle$是 **DC** 的适当结构。则 M*是 **DC** 的典范模型。

证明：

据定义 3.6，只须证：

（1）　$\langle |A|, |B|, |C|\rangle \in N(w) \Leftrightarrow A \geqslant BC \in w$，　对任意 $w \in W$ 和公式 A, B 和 C。

"$\Leftarrow$"：设 $A \geqslant BC \in w$。据 N(w)的构造，有$\langle |A|, |B|, |C|\rangle \in N(w)$。

"$\Rightarrow$"：设$\langle |A|, |B|, |C|\rangle \in N(w)$。因为等价类的代表元不是惟一的，所以存在

$A_0 \geqslant B_0C_0 \in w$ 使得$|A_0| = |A|$, $|B_0| = |B|$且$|C_0| = |C|$。

据引理 3.5（4），有

$\vdash A_0 \leftrightarrow A$，$\vdash B_0 \leftrightarrow B$，$\vdash C_0 \leftrightarrow C$。

据$\vdash A_0 \leftrightarrow A$ 和 REA，有

$\vdash A_0 \geqslant B_0C_0 \leftrightarrow A \geqslant B_0C_0$。

再据$\vdash B_0 \leftrightarrow B$ 和 REC_1，有

$\vdash A_0 \geqslant B_0C_0 \rightarrow A \geqslant BC_0$。

再据$\vdash C_0 \leftrightarrow C$ 和 REC_2，有

$\vdash A_0 \geqslant B_0C_0 \leftrightarrow A \geqslant BC$，

因为 $A_0 \geqslant B_0C_0 \in w$，所以 $A \geqslant BC \in w$。┤

引理 3.11

DC 的适当框架 F*是 **dc**-框架。

证明：

下面我们来验证 F*满足定义 2.4 给出的框架条件。

验证(gc)。设$\langle X_1, Y_1, Z_1\rangle \in N(w)$且$\langle X_2, Y_2, Z_2\rangle \in N(w)$。则

（1）存在 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X_1$, $|B_1| = Y_1$ 且$|C_1| = Z_1$，且

（2）存在 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X_2$, $|B_2| = Y_2$ 且$|C_2| = Z_2$。

据公理 GC 和引理 3.5（1），易得

（3）$A_1 \wedge A_2 \geqslant B_1 \wedge B_2 \cdot C_1 \wedge C_2 \in w$ 使得

$|A_1 \wedge A_2| = X_1 \cap X_2$，$|B_1 \wedge B_2| = Y_1 \cap Y_2$，且$|C_1 \wedge C_2| = Z_1 \cap Z_2$。
因此$\langle X_1 \cap X_2,, Y_1 \cap Y_2, Z_1 \cap Z_2 \rangle \in N(w)$。

验证(ca$_0$)。设$\langle X_1, Y, Z \rangle \in N(w)$且$\langle X_2, Y, Z \rangle \in N(w)$。则
（1）存在 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X_1$, $|B_1| = Y$ 且$|C_1| = Z$，且
（2）存在 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X_2$, $|B_2| = Y$ 且$|C_2| = Z$。
因为$|B_1| = |B_2|$且$|C_1| = |C_2|$，所以
$\vdash B_1 \leftrightarrow B_2$，$\vdash C_1 \leftrightarrow C_2$，
再据 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$，$RCE_1$ 和 RCE_2，有
$A_2 \geqslant B_1C_1 \in w$。
再据（1）的 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 和公理 CA_0，易得
（3）$A_1 \vee A_2 \geqslant B_1C_1 \in w$ 使得$|A_1 \vee A_2| = X_1 \cup X_2$, $|B_1| = Y$ 且$|C_1| = Z$。
因此$\langle X_1 \cup X_2, Y, Z \rangle \in N(w)$。

验证(cd$_1$)。设$\langle X, Y_1, Z \rangle \in N(w)$且$\langle X, Y_2, Z \rangle \in N(w)$。则
（1）存在 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X$, $|B_1| = Y_1$ 且$|C_1| = Z$，且
（2）存在 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X$, $|B_2| = Y_2$ 且$|C_2| = Z$。
据 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$，$|A_1| = |A_2|$，$|C_1| = |C_2|$，RAE 和 RCE_2，易证
$A_1 \geqslant B_2C_1 \in w$。
再据（1）的 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 和公理 CD_1，易得
（3）$A_1 \geqslant B_1 \vee B_2 \cdot C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X$, $|B_1 \vee B_2| = Y_1 \cup Y_2$ 且$|C_1| = Z$。
因此$\langle X, Y_1 \cup Y_2, Z \rangle \in N(w)$。

验证(cd$_2$)。设$\langle X, Y, Z_1 \rangle \in N(w)$且$\langle X, Y, Z_2 \rangle \in N(w)$。则
（1）存在 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X$, $|B_1| = Y$ 且$|C_1| = Z_1$，且
（2）存在 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X$, $|B_2| = Y$ 且$|C_2| = Z_2$。
据 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$，$|A_1| = |A_2|$，$|B_1| = |B_2|$，RAE 和 RCE_1，易证
$A_1 \geqslant B_1C_2 \in w$。
再据（1）的 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 和公理 CD_2，易得
（4）$A_1 \geqslant B_1 \cdot C_1 \vee C_2 \in w$ 使得$|A_1| = X$, $|B_1| = Y$ 且$|C_1 \vee C_2| = Z_1 \cup Z_2$。
因此$\langle X, Y, Z_1 \cup Z_2 \rangle \in N(w)$。

验证(ctr)。设$\langle X, Y, Z \rangle \in N(w)$且$\langle X, Z, U \rangle \in N(w)$。则
（1）存在 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 使得$|A_1| = X$, $|B_1| = Y$ 且$|C_1| = Z$，且
（2）存在 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$ 使得$|A_2| = X$, $|B_2| = Z$ 且$|C_2| = U$。
据 $A_2 \geqslant B_2C_2 \in w$，$|A_1| = |A_2|$和 REA，有
$A_1 \geqslant B_2C_2 \in w$。
因为$|C_1| = |B_2|$，所以再据 REC_1，有
（3）$A_1 \geqslant C_1C_2 \in w$。
再据（1）的 $A_1 \geqslant B_1C_1 \in w$ 和公理 CTR，易得
（4）$A_1 \geqslant B_1C_2 \in w$ 使得$|A_1| = X$, $|B_1| = Y$ 且$|C_2| = U$。
因此$\langle X, Y, U \rangle \in N(w)$。

验证(cct)。设$\langle X, Y \cup Z, Y \rangle \in N(w)$且$\langle X, Z \cup X, Z \rangle \in N(w)$。则

（1）存在 $A_1\geqslant B_1C_1\in w$ 使得$|A_1|=X$, $|B_1|=Y\cup Z$ 且$|C_1|=Y$，且

（2）存在 $A_2\geqslant B_2C_2\in w$ 使得$|A_2|=X$, $|B_2|=Z\cup X$ 且$|C_2|=Z$。

据（1）的 $A_1\geqslant B_1C_1\in w$，$|A_1|=|A_2|$和 REA，有

$A_2\geqslant B_1C_1\in w$。

因为$|B_1|=Y\cup Z=|C_1|\cup|C_2|=|C_1\vee C_2|$，所以再据 REC_1，有

（3）$A_2\geqslant C_1\vee C_2\cdot C_1\in w$。

因为$|B_2|=Z\cup X=|C_2|\cup|A_2|=|C_2\vee A_2|$，所以再据（2）的 $A_2\geqslant B_2C_2\in w$ 和 REC_1，有

（4）$A_2\geqslant C_2\vee A_2\cdot C_2\in w$。

据（3),（4）和公理 CCT，易得

（5）$A_2\geqslant C_1\vee A_2\cdot C_1\in w$ 使得$|A_2|=X$, $|C_1\vee A_2|=Y\cup X$ 且$|C_1|=Y$。

因此$\langle X, Y\cup X, Y\rangle\in N(w)$。

验证(ccv’)。设$\langle X, Y, Z\rangle\in N(w)$且$\langle X, U, Z\rangle\in N(w)$。则

（1）存在 $A_1\geqslant B_1C_1\in w$ 使得$|A_1|=X$, $|B_1|=Y$ 且$|C_1|=Z$，且

（2）存在 $A_2\geqslant B_2C_2\in w$ 使得$|A_2|=X$, $|B_2|=U$ 且$|C_2|=Z$。

据 $A_2\geqslant B_2C_2\in w$，$|A_1|=|A_2|$和 REA，有

$A_1\geqslant B_2C_2\in w$。

因为$|C_1|=|C_2|$，所以再据 REC_2，有

（3）$A_1\geqslant B_2C_1\in w$。

再据（1）的 $A_1\geqslant B_1C_1\in w$ 和公理 CCV’，易得

（4）$A_1\wedge B_1\geqslant B_2C_2\in w$ 使得$|A_1\wedge B_1|=X\cap Y$, $|B_2|=U$ 且$|C_2|=Z$。

因此$\langle X\cap Y, U, Z\rangle\in N(w)$。

验证(cmp)。设$\langle X, Y, Z\rangle\in N(w)$且 $w\in X$。据前者，有

（1）存在 $A\geqslant BC\in w$ 使得$|A|=X$, $|B|=Y$ 且$|C|=Z$。

据 $A\geqslant BC\in w$ 和公理 $CMP_{\geqslant}$以及 3.3，有 $A\rightarrow B\wedge C\in w$，再据 3.3，有

（2）$A\in w\Rightarrow B\wedge C\in w$。

所以

（3）$w\in|A|\Rightarrow w\in|B\wedge C|=|B|\cap|C|$。

据设定，有 $w\in X$，所以 $w\in|A|$。据（3)，有 $w\in|B|\cap|C|$，所以 $w\in Y\cap Z$。┤

定理 3.12　框架完全性定理

DC 相对框架类 Frame(**dc**)是完全的。

证明：

只须证：

（%） 若A不是 **DC** 的内定理，则 A 在某个 **dc**-框架中不有效。

设 A 不是 **DC** 的内定理。据引理 3.10，$M^*=\langle F^*, [\ ]^*\rangle$是 **DC** 的典范模型。据设定和定理 3.8，有 $M^*\nvDash A$，所以 $F^*\nvDash A$。再据上一引理，F^*是 **dc**-框架，所以有要证结果。┤

定义 3.13

极小条件偏好系统 MCP 定义如下：

公理（模式）：

（TA）　所有重言式的代入特例，

（GC）　$(A_1\geqslant B_1C_1)\wedge(A_2\geqslant B_2C_2)\rightarrow A_1\wedge A_2\geqslant B_1\wedge B_2\cdot C_1\wedge C_2$， （CTR）　$(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant CD) \to A \geqslant BD$。

推理规则：

（MP）　$A, A \to C ／ C$，

（REA）　$A_1 \leftrightarrow A_2 ／ A_1 \geqslant BC \leftrightarrow A_2 \geqslant BC$，

（REC_1）　$B_1 \leftrightarrow B_2 ／ A \geqslant B_1C \leftrightarrow A \geqslant B_2C$，

（REC_2）　$C_1 \leftrightarrow C_2 ／ A \geqslant BC_1 \leftrightarrow A \geqslant BC_2$。┤

说明：

MCP 是［2］中提到的**极小条件偏好系统**。关于这个逻辑的详细情况请见［2］。

定义 3.14

（1）称 **ON-**框架 $F = \langle W, N\rangle$是**极小条件偏好框架**，简称 M 是 **mcp-框架**，当且仅当下列**框架条件**成立：对任意 $w \in W$ 和 $X, Y, Z, U, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 \subseteq W$，

(gc)　$<X_1, Y_1, Z_1> \in N(w)$且$<X_2, Y_2, Z_2> \in N(w) \Rightarrow <X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2, Z_1 \cap Z_2> \in N(w)$，

(ctr)　$<X, Y, Z> \in N(w)$且$<X, Z, U> \in N(w) \Rightarrow <X, Y, U> \in N(w)$。

（2）所有的 mcp-框架的类记作 Frame(**mcp**)。┤

根据上面的工作，易见：

推论 3.15　框架可靠性定理和框架完全性定理

MCP 相对框架类 Frame(**mcp**)是可靠且完全的。┤

4　附录

下面我们证明 **MCP** 的一些导出规则和内定理，因为［2］中需要。

附录 4.1

下面是 **MCP** 的导出规则或内定理：

（1）$C \to D$，$A \geqslant BC$，$A \geqslant C \wedge D \cdot D ／ A \geqslant BD$，　（PRCM）

（2）$(A \geqslant BB) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant B \wedge C \cdot D) \to A \geqslant BD$，　（RTC）

（3）$(A \geqslant C \wedge D \cdot D) \wedge (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \to A \geqslant B \wedge C \cdot D$，

（4）$(A \geqslant DD) \wedge (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \to A \geqslant B \wedge C \cdot D$，　（ACC）

（5）$(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant DD) \wedge (A \geqslant C \wedge D \cdot E) \to A \geqslant B \wedge D \cdot E$，

（6）$(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant EE) \wedge (A \geqslant D \cdot E \wedge B) \to A \geqslant D \cdot E \wedge C$，

（7）$(A \geqslant B \wedge C \cdot D) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BB) \to A \geqslant B \cdot C \wedge D$。　（LCC）

证明：

我们只给出证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。

（1）

①	$C \to D$	假设
②	$C \leftrightarrow C \wedge D$	①
③	$A \geqslant BC \leftrightarrow A \geqslant B \cdot C \wedge D$	②，REC_2
④	$A \geqslant BC$	假设
⑤	$A \geqslant B \cdot C \wedge D$	③，④
⑥	$(A \geqslant B \cdot C \wedge D) \wedge (A \geqslant C \wedge D \cdot D) \to A \geqslant BD$	CTR
⑦	$A \geqslant C \wedge D \cdot D \to A \geqslant BD$	④，⑤，MP

⑧ $A \geqslant C \wedge D \cdot D$ 假设

⑨ $A \geqslant BD$。 ⑦，⑧，MP

（2）

① $(A \geqslant BB) \wedge (A \geqslant BC) \rightarrow A \geqslant B \cdot B \wedge C$ GC，REA，REC_1

② $(A \geqslant BB) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant B \wedge C \cdot D) \rightarrow (A \geqslant B \cdot B \wedge C) \wedge (A \geqslant B \wedge C \cdot D)$ ①，蕴涵附加规则

③ $(A \geqslant B \cdot B \wedge C) \wedge (A \geqslant B \wedge C \cdot D) \rightarrow A \geqslant BD$ CTR

④ $(A \geqslant BB) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant B \wedge C \cdot D) \rightarrow A \geqslant BD$。 ②，③，三段论

（3）

① $(A \geqslant C \wedge D \cdot D) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \rightarrow A \geqslant BD$ CTR

② $(A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant C \wedge D \cdot D) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \rightarrow (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant BD)$ ①，蕴涵附加规则

③ $(A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant BD) \rightarrow A \geqslant B \wedge C \cdot D$ GC

④ $(A \geqslant C \wedge D \cdot D) \wedge (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \rightarrow A \geqslant B \wedge C \cdot D$。 ②，③，三段论

（4）

① $(A \geqslant DD) \wedge (A \geqslant CD) \rightarrow A \geqslant C \wedge D \cdot D$ GC

② $(A \geqslant DD) \wedge (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \rightarrow (A \geqslant C \wedge D \cdot D) \wedge (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D)$ ①，蕴涵附加规则

③ $(A \geqslant C \wedge D \cdot D) \wedge (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \rightarrow A \geqslant B \wedge C \cdot D$ （3）

④ $(A \geqslant DD) \wedge (A \geqslant CD) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge D) \rightarrow A \geqslant B \wedge C \cdot D$。 ②，③，三段论

（5）

① $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant DD) \rightarrow A \geqslant B \wedge D \cdot C \wedge D$ GC

② $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant DD) \wedge (A \geqslant C \wedge D \cdot E) \rightarrow (A \geqslant B \wedge D \cdot C \wedge D) \wedge (A \geqslant C \wedge D \cdot E)$ ①，蕴涵附加规则

③ $(A \geqslant B \wedge D \cdot C \wedge D) \wedge (A \geqslant C \wedge D \cdot E) \rightarrow A \geqslant B \wedge D \cdot E$ CTR

④ $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant DD) \wedge (A \geqslant C \wedge D \cdot E) \rightarrow A \geqslant B \wedge D \cdot E$。 ②，③，三段论

（6）

① $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant EE) \rightarrow A \geqslant B \wedge E \cdot C \wedge E$ GC

② $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant EE) \wedge (A \geqslant D \cdot E \wedge B) \rightarrow (A \geqslant B \wedge E \cdot C \wedge E) \wedge (A \geqslant D \cdot E \wedge B)$ ①，蕴涵附加规则

③ $(A \geqslant B \wedge E \cdot C \wedge E) \wedge (A \geqslant D \cdot E \wedge B) \rightarrow A \geqslant D \cdot E \wedge C$ CTR，REC_1

④ $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant EE) \wedge (A \geqslant D \cdot E \wedge B) \rightarrow A \geqslant D \cdot E \wedge C$。 ②，③，三段论

（7）

① $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BB) \rightarrow A \geqslant B \cdot C \wedge B$ GC

② $(A \geqslant B \wedge C \cdot D) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BB) \rightarrow (A \geqslant B \wedge C \cdot D) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge B)$ ①，蕴涵附加规则

③ $(A \geqslant B \wedge C \cdot D) \wedge (A \geqslant B \cdot C \wedge B) \rightarrow A \geqslant BD$ CTR，REC_2

④ $(A \geqslant B \wedge C \cdot D) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BB) \rightarrow A \geqslant BD$ ②，③，三段论

⑤ $(A \geqslant B \wedge C \cdot D) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BB) \rightarrow (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BD)$ ④

⑥ $(A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BD) \rightarrow A \geqslant B \cdot C \wedge D$ GC

⑦ $(A \geqslant B \wedge C \cdot D) \wedge (A \geqslant BC) \wedge (A \geqslant BB) \rightarrow A \geqslant B \cdot C \wedge D$。 ⑤，⑥，三段论 ┤

参考文献:

[1] 李小五. 条件句逻辑[M]. 北京:人民出版社, 2003.

［2］Chen Xiao-ping, Li Xiao-wu. A Triadic Modal Logic for Conditional Preferences. (To appear)

Logic of conditionals with double consequents

LI Xiao-wu1, CHEN Xiao-ping2

(1. Institute of Logic and Cognition of Zhongshan University 510275, Guangdong, China； 2. Department of Computer Science, University of Science and Technology of China 230027, Hefei, China)

Abstract： Firstly, we construct the system **DC** of conditionals with double consequents, give some results of its proof theory. Secondly, we introduce the order neighborhood semantics, give the frame conditions of the character axioms of **DC**, prove the frame soundness of **DC** with respect to the frame conditions. Finally, we prove the frame completeness of **DC** with respect to the frame conditions as well.

Key words： system of conditionals with double consequents; order neighborhood semantics; frame soundness; frame completeness