形式系统的可靠性和完全性问题

余俊伟

（中国人民大学哲学系，北京，100872）

摘要：语法完全性仅与一个形式系统的语法构造相关，经典命题逻辑的有代入规则的系统是语法完全的，无代入规则的系统不是语法完全的。将全称概括规则作为初始规则的系统是否限制对该规则的使用可导致系统相对于通常的语义解释是否具有强可靠性。对必然化规则和模态逻辑系统来说有类似的结果。

关键词：完全性，可靠性，代入规则，全称概括规则，必然化规则

中国分类号： B81 **文献标识码：** A

形式系统一致性通常有古典的，语法的和语义的三种含义。一形式系统是古典一致的当且仅当不存在公式 A，A 和 A 的否定都在该系统中可证。一形式系统是语法一致的当且仅当并非任何公式都在该系统中可证。一形式系统是语义一致的当且仅当凡有效公式都是在该系统中可证的，语义一致性也称可靠性。

完全性也有三种含义。一形式系统具有古典完全性是指对任一公式，或者 A 是可证的，或者 A 的否定是可证的；一形式系统具有语法完全性是指如果将任一个不可证的公式作为公理加到该系统中，则所得的系统就不一致；一形式系统具有语义完全性一般是指凡是在该系统中可证的公式都是有效的。

本文着重考察语法完全和语义一致性，即可靠性。

一般来说，一个值得研究的有意义的系统都会具有古典的和语法的一致性。常见的系统因为其语言含变元，故一般也不具有古典的完全性。但是对于语法和语义完全性及语义一致性，由于形式系统的构造可能会有不同的结果。我们先考察经典命题逻辑演算。以下给出两个形式系统 PC1 和 PC2，它们的语言都为 L1。L1 的符号如下：

可数无穷多个命题变元符号：p_1，p_2，…，p_n，…；

联结词：$\sim$，$\rightarrow$；

另外为便于阅读再加两个辅助符号：(，)。

公式的形成规则如常。全体公式集记为 Form(L1)

语义完全性涉及到一个语言的解释。下面我们给出语言 L1 的经典语义解释。一个 L1 真值赋值π是一个从 Form(L1)到{1，0}中的映射并且满足条件：

（1）π（A）=1 当且仅当π（$\sim$A）=0。

（2）π（A$\rightarrow$B）=1 当且仅当π（A）=0 或者π（B）=1。

收稿日期：2004-11-8；
作者简介：余俊伟，1974 年生，男，汉族，江西安义人，中国人民大学副教授。

定义 1 π是一真值赋值，A 是一公式，Γ是一公式集。

如果π（A）=1，则称π是 A 的一个单赋值模型，记为$\pi \vDash A$；否则记为$\pi \nvDash A$。

如果π是Γ中的所有公式的单赋值模型，即对任一 $A\in\Gamma$，都有$\pi \vDash A$，记为$\pi \vDash \Gamma$，称π是Γ的一个单赋值模型。

如果任一真值赋值都是 A 的单赋值模型，称 A 是有效式（永真式）。如果任一真值赋值都不是 A 的单赋值模型，称 A 是矛盾式（永假式）。

定义 2 Γ语义后承 A 指：Γ的单赋值模型都是 A 的单赋值模型，即对任一真值赋值π，若$\pi \vDash \Gamma$，则$\pi \vDash A$。又称Γ重言蕴涵 A，记为 $\Gamma \vDash A$。

系统 PC1 有无穷多条公理，任一公理都具有下列三种结构之一：

（1）$A\to(B\to A)$

（2）$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

（3）$(\sim A\to B)\to((\sim A\to\sim B)\to A)$

（1）、（2）和（3）也叫做公理模式。

PC1 有一条推导规则：

从 A 和 $A\to B$ 可得到 B，叫做分离规则，记为 MP。

定义 3 $\Gamma \vdash_{PC1} A$ 指：存在一个公式序列 $A_1,\cdots,A_n$ 使得：$A=A_n$ 并且对每一 A_i（$1\le i\le n$）都满足下列条件：A_i 或者为公理，或者属于Γ，或者为由在其前的公式 A_j 和 A_k 运用分离规则所得。记为 $\Gamma \vdash_{PC1} A$。称 A 是Γ的 PC1 语法后承。当Γ为空集时，称 A 为定理，亦称 A 在 PC1 中可证。定理集记为 Th(PC1)。

PC1 有演绎定理成立：如果 $\Gamma, A \vdash_{PC1} B$，则 $\Gamma \vdash_{PC1} A\to B$。

系统 PC2 有三条公理：

（1）$p_1\to(p_2\to p_1)$

（2）$(p_1\to(p_2\to p_3))\to((p_1\to p_2)\to(p_1\to p_3))$

（3）$(\sim p_1\to p_2)\to((\sim p_1\to\sim p_2)\to p_1)$

PC2 有两条推导规则：

R1：分离规则；

R2：代入规则：从 A 可得 A（B/p_1），记为 Sub。

定义 4：$\Gamma \vdash_{PC2} A$ 指：存在一个公式序列 $A_1,\cdots,A_n$ 使得：$A=A_n$ 并且对每一 A_i（$1\le i\le n$）都满足下列条件：A_i 或者为公理，或者属于Γ，或者为由在其前的公式 A_j 和 A_k 运用分离规则所得，或者为由在其前的公理运用代入规则所得。亦称 A 是Γ的 PC2 语法后承。当Γ为空集时，称 A 为定理，亦称 A 在 PC2 中可证。定理集记为 Th(PC2)。

PC2 亦有演绎定理成立。

可靠性又分弱的与强的两种。强的是指语法后承都是语义后承。当语法后承定义中的Γ为空集时即为弱的可靠性定义，也即为文章开头所述。完全性亦有类似的划分。

经典命题演算系统相对于 $\models$ 都具有弱的可靠性。我们说命题演算系统具有可靠性都是指这种意义下的可靠性。但是对于强可靠性，由于可使用的推导规则的不同，其中有细微之处需详加考察分析。

我们知道，分离规则不仅具有保有效性，而且具有保真性，即对任一真值赋值 π，如果 $\pi \models A$ 且 $\pi \models A \rightarrow B$，则 $\pi \models B$。但是代入规则仅具有保有效性，不具有保真性，即会这样的情况出现：$\pi \models A$，但是 $\pi \not\models A$（B/p_1）。因此，对有代入规则的经典命题演算系统，定义语法后承时对代入规则的使用一般都要受限制，即仅能对公理使用，如定义 4。这种语法后承与语义后承（$\models$）是相匹配的，也即有强的可靠性（当然也有强完全性）。如果在这样的形式系统中定义语法后承对代入规则的使用不受限制，则将导致没有强可靠性，而且如上述的演绎定理不成立。

定义 5 $\Gamma \vdash_{PC2}{}^{C} A$ 指：存在一个公式序列 A_1，…，A_n 使得：$A=A_n$ 并且对每一 A_i（$1 \leq i \leq n$）都满足下列条件：A_i 或者为 PC2 公理，或者属于 Γ，或者为由在其前的公式 A_j 和 A_k 运用分离规则所得，或者为由在其前的公式运用代入规则所得。此公式序列称为从 Γ 到 A 的一个 ${}_{PC2}{}^{C}$ 推导。称 A 是 Γ 的 $PC2^{C}$ 语法后承。当 Γ 为空集时，称 A 为定理。定理集记为 $Th(PC2^{C})$。

注意定义 5 定义的 $\Gamma \vdash_{PC2}{}^{C} A$ 与定义 4 定义的 $\Gamma \vdash_{PC2} A$ 的关系。当 Γ 为空集时，这二者是完全相同，也即 $Th(PC2)=Th(PC2^{C})$。但是，当 Γ 不为空集时，这二者一般地不同的。例如演绎定理对 $\vdash_{PC2}$ 成立，但对 $\vdash_{PC2}{}^{C}$ 不成立。简单的例子如：$p \vdash_{PC2}{}^{C} q$，但是并非 $\vdash_{PC2}{}^{C} p \rightarrow q$；而且 $p \not\models q$，所以也没有强可靠性。对于 $\vdash_{PC2}{}^{C}$ 仅有平凡的演绎定理成立。

定义 6 公式序列 A_1，…，A_n 是一个推导，公式 A_i 在该推导中依赖 A_k 指，或者 i 是 k，或者 A_i 是通过分离规则或代入规则从其中至少有一个是依赖 A_k 的（那些）公式中所得。

定理 1 如果 Γ，$A \vdash_{PC2}{}^{C} B$，并且存在一个从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的一个推导，其中 B 不依赖 A，那么 $\Gamma \vdash_{PC2}{}^{C} B$。进而有 $\Gamma \vdash_{PC2}{}^{C} A \rightarrow B$。

当然也可以特别地针对 $\vdash_{PC2}{}^{C}$ 来定义与之相匹配的语义后承。

定义 7 称公式 A（公式集 Γ）的所有单赋值模型组成的集合为 A（Γ）的全赋值模型。

称所有模型的集合为全模型。

$\Gamma \models^{C} A$ 指：如果 Γ 的全赋值模型是全模型，则 A 的全赋值模型也是全模型。称 A 是 Γ 的广语义后承 A。

易证若 $\Gamma \vdash_{PC2}{}^{C} A$ 则 $\Gamma \models^{C} A$，反之亦成立。

因此对于强可靠性一般地要依赖该形式系统的构造及对推理规则使用于一般公式上的规定。当然人们一般不会定义如 $\Gamma \vdash_{PC2}{}^{C} A$ 的语法后承。因为规则通常要具有保真性。另外代入规则不是必需的，所以为了简化元理论的讨论，现在一般都采用公理模式给出形式系统，不再使用代入规则。

接下来我们讨论语法完全性。首先明确一下语法完全性定义中所指的导致不一致应该是语法上的不一致。先看 PC1 的语法完全性问题。

显然 p_1 不是 PC1 可证的，将之作为公理添加到 PC1 中，假设所得系统不一致，则存在公式 B 和 $\sim B$，使得 $p_1 \vdash_{PC1} B$ 和 $p_1 \vdash_{PC1} \sim B$，由演绎定理可得 $\vdash_{PC1} p_1 \rightarrow B$ 和 $\vdash_{PC1} p_1 \rightarrow \sim B$，由公理模式（3）两次运用分离规则便得到 $\vdash_{PC1} \sim p_1$。矛盾于 $\sim p_1$ 在 PC1 中不可证。所以将 p_1 作为公理添加到 PC1 中，不会导致不一致，因此 PC1 不具有语法完全性。

对于 PC2，情况很不相同。任取一在 PC2 中不可证的公式 A，现将之作为公理添加到 PC2 中。据（弱）完全性知有一 A 不是有效式，于是存在一个代入，对 A 实施该代入会推导出一个矛盾式 B，进而可导致任一公式都在系统中可证，即导致系统不一致。因此 PC2 具有语法完全性。

可以看到同样是经典命题演算系统，P1 不具有语法完全性，而 P2 具有。因此命题演算系统是否具有语法完全性与该系统的语法构造有关，而与语言的解释无关。

一般地，对于一个演算系统，如果它有代入规则，则由上可知该系统具有语法完全性。对于经典命题逻辑而言，如果一系统是如 PC1 那样以公理模式方式构造的，由于语法完全性的定义要求添加的是公式，而不是公式模式，所以，该形式系统不具有语法完全性。当然，如果把一个不可证的公式模式，作为公理模式，则所得到的系统肯定是不一致的，但不能据此认为该系统就具有语法完全性，因为语法完全性要求添加的是公式，而不是公式模式或公理模式。

下面讨论经典谓词演算逻辑的语义完全性问题。

对于代入规则造成的影响如命题逻辑，不再赘述。下面就全称概括规则造成的影响作分析。先给出一个一阶语言 L2。两个以公理模式构造的谓词逻辑演算系统 QC1 和 QC2。

QC1 和 QC2 都是建立在同一语言 L2 之上。L2 的符号如下：

（1）可数无穷多个个体变元：v_1，v_2，…，v_n，…；

（2）联结词：~，→；

（3）量词：∀；

（4）对每一正整数 n，有可数无穷多个 n 元谓词符号；

（5）对每一正整数 n，有可数无穷多个 n 元函数符号；

（6）有可数无穷多个常元符号。

另外为便于阅读再加两个辅助符号：(,)。

（1）—（3）是逻辑符号；(4) —（6）是非逻辑符号。

项与公式的形成规则如常。

下面是对 L2 的语义解释。

定义 8 一个 L2 结构是一个有序对 Str=（S，τ），其中 S 是一非空集合，称为结构的（个体）域；τ是定义在 L2 的非逻辑符号上的一个映射，满足：

对 L2 的常元符号 c，τ（c）∈S

对 L2 的 n 元函数符号 f，τ（f）是 S 上的一个 n 元函数

对 L2 的 n 元谓词符号 P，τ（P）是 S 上的一个 n 元关系

τ（c）（τ（f），τ（P））称为常元符号（函数符号，谓词符号）在结构 Str 中的解释，也记为 c^{Str}（f^{Str}，P^{Str}）。

定义 9 结构 Str 的一个变元赋值π为一个从个体变元集到 Str 的个体域中的映射，即：

π：{ v_1，v_2，…，v_n，…}→S

定义 10 一个 L2 解释是一个有序对η=（Str，π），其中 Str 是一个 L2 结构，该结构的域也称为解释η的域，记为|η|，π是 Str 的一个变元赋值。也称π为解释η的变元赋值；c^{Str}、f^{Str}，P^{Str} 也记为 c^{η}、f^{η}，P^{η}

令η=（Str，π）是一个 L2 解释。为定义η满足一公式，先定义项 t 在η下的意义，即 t 在η下的所指η（t）。

t 是变元 v_1，η（v_1）=π（v_1）

t 是常元 c，η（c）= c^{η}

t 是 f $t_1\cdots t_n$，$\eta(f\, t_1\cdots t_n)=f^{\eta}$（$\eta(t_1)$，…，$\eta(t_n)$）

η为一解释，π是它的一个变元赋值。a 为其域的一元素，定义η的一个（新的）变元赋值π（a/x）如下：如 y≠x，则π（a/x）(y)= π（y）；如 y=x，则π（a/x）(y)= a。

η=（Str，π），则η（a/x）=（Str，π（a/x））。

定义 11 A 是一公式，递归定义η满足 A（记为η ⊨A），如下：

A 是原子公式 P$t_1\cdots t_n$，则η ⊨A 当且仅当（$\eta(t_1)$，…，$\eta(t_n)$）$\in P^{\eta}$

A 是~B，则η ⊨A 当且仅当并非η ⊨A

A 是 B→C，则η ⊨A 当且仅当η ⊨C 或者并非η ⊨B

A 是∀xB，当且仅当对任一 a∈|η|，η（a/x） ⊨B

η不满足 A 记为η ⊭ A。Γ 是一公式集，η满足 Γ 指对任一 A∈Γ 都有η ⊨A，记为η ⊨Γ。

定义 12 Γ ⊨A 指：对任一 L2 解释η都有：如果η ⊨Γ，则η ⊨A。称 A 是Γ的语义后承，又称Γ逻辑蕴涵 A。并非Γ ⊨A 也记为Γ ⊭ A。

QC1 由以下十类公式构成：

（1）A→（B→A）

（2）（A→（B→C））→（（A→ B）→（A→C））

（3）（~A→B）→（（~A→ ~B）→A）

（4）A→∀xA，x 不是 A 的自由变元

（5）∀xA→A[t/x]，t 对 x 在 A 中代入自由。

（6）∀x（A→B）→（∀xA→ ∀xB）

（7）∀$x_1\cdots x_n$A，A 是前 6 类公理之一。

推理规则仅有一条：分离规则。

定义 13 Γ $\vdash_{QC1}$A 指：存在一个公式序列 A_1，…，A_n 使得：A=A_n 并且对每一 A_i（$1\le i\le n$）都满足下列条件：A_i 或者为 QC1 公理，或者属于Γ，或者为由在其前的公式 A_j 和 A_k 运用分离规则所得。称 A 是Γ的 QC1 语法后承。当Γ为空集时，称 A 为定理，亦称 A 在 QC1 中可证。

QC1 有演绎定理成立。

系统 QC2 的构造如下：

公理是 QC1 的（1）—（6）

推理规则有两条：

（1）分离规则；

（2）全称概括规则：由 A 可得$\forall x$A。

定义 14　Γ $\vdash_{QC2}$A 指：存在一个公式序列 A_1，…，A_n 使得：A=A_n 并且对每一 A_i（$1\leq i\leq n$）都满足下列条件：A_i 或者为 QC2 公理，或者属于Γ，或者为由在其前的公式 A_j 和 A_k 运用分离规则所得，或者为由在其前的公式 A_j 运用全称概括规则所得。当Γ非空时称该公式系列为有前提的推导。称 A 是Γ的 QC2 语法后承。当Γ为空集时，称 A 为定理，亦称 A 在 QC2 中可证。

QC2 亦仅有如定理 1 那样的平凡的演绎定理成立，只是要将依赖的定义中的代入规则换为全称概括规则。

我们通常说的经典谓词演算具有可靠性也是指弱的语义可靠性，QC1 和 QC2 都具有弱的语义可靠性。而对于强可靠性这两个系统有不同的结果：QC1 具有强可靠性，而 QC2 不具有强可靠性。如 Px $\vdash_{QC2}\forall x$Px，但是 Px $\not\models\forall x$Px。

对如 QC2 这样的以概括规则作为初始规则的谓词演算系统如何获得强可靠性，有两种办法。一是限制全称概括规则的使用。具体地说，先定义特殊的语法后承，即空集的语法后承——证明（$\varnothing\vdash_{QC2}{}^{C}$A）；再定义定理；最后定义一般的语法后承——推导（Γ $\vdash_{QC2}{}^{C}$A），此时可以在推导中限制全称概括规则的使用，即只能对定理使用全称概括规则（这一步可等价地表示为，Γ $\vdash_{QC2}{}^{C}$A 当且仅当Γ中存在公式 B_1，…B_n，使得 $\vdash_{QC2}{}^{C}B_1\wedge\cdots\wedge B_n\rightarrow A$。）。由此所得的Γ $\vdash_{QC2}{}^{C}$A 具有下列结果：

1、演绎定理成立：如果Γ，A $\vdash_{QC2}{}^{C}$B，则Γ $\vdash_{QC2}{}^{C}A\rightarrow B$。

2、如果Γ $\vdash_{QC2}{}^{C}$A，则Γ $\models$A。反之也成立。

若Γ推导 A（即 A 是Γ的语法后承）则 A 是Γ的语义后承。关于此可参阅参考文献[8]。

另一种办法是修改语义后承定义。为此先定义一结构满足公式如下：

定义 15　一 L2 结构 Str 满足一 L2 公式 A 指：对任一解释η=（Str，π）都有$\eta\models$A。Str 满足 A 记为 Str $\models^{S}$A。类似地可定义 Str $\models^{S}$Γ。

定义 16　Γ $\models^{S}$A 是指：对任一 L2 结构 Str 都有：如果 Str $\models^{S}$Γ，则 Str $\models^{S}$A。称 A 是Γ的广语义后承。

易证对任一公式 A，任一变元 x 有：Str $\models^{S}$A 当且仅当 Str $\models^{S}\forall x$ A。

易证强可靠性：Γ $\vdash_{QC2}$A，则Γ $\models^{S}$A。

当然也有强完全性。

易见广语义后承使得全称量词失去意义。因此一般采用前一种方法，而不采用后一种修改语义后承的方法。

下面讨论模态逻辑系统的语义完全性问题。对作用于量词的全称概括规则上文已做讨论，以下仅讨论必然化规则对语义完全性带来的问题。我们将讨论仅限于模态命题逻辑系统

K，所得结果对一般正规模态逻辑系统都成立。

K 建立在模态语言 LM 之上。LM 的语言较 L1 增加了一个一元联结词 ，公式形成规则如常。全体公式记为 Form(LM)。

LM 的语义解释如下。一个框架 F 是一二元组，<W，R>，W 是一非空集，R 是 W 上的一个二元关系。一个模型 M 是一二元组<F，V>，其中 F 是一框架，V 是一从 Form(LM)×W 到{1，0}中的一个映射并满足：

（1）V（A，w）=1 当且仅当 V（~A，w）=0；

（2）V（A∧B，w）=1 当且仅当 V（A，w）=V（B，w）=1；

（3）V（A∨B，w）=1 当且仅当 V（A，w）=1 或 V（B，w）=1；

（4）V（A→B，w）=1 当且仅当 V（A，w）=0 或 V（B，w）=1；

（5）如果 V（ A，w）=1 当且仅当对任一 w_1∈W，若 wRw_1，则 V（A，w_1）=1。

称此模型为建立在框架〈W，R〉上的一个模型。

定义 17 令<W，R>为一 LM 框架，A 为 LM 的任一公式。如果存在〈W，R〉上的一个模型<W，R，V>和 W 中的一个元素 w，使得 V（A，w）=1，那么我们就称 A 是可满足的，可记为<W，R，V> ⊨A，或简单记为 w ⊨A，称<W，R，V>是 A 的模型。

如果<W，R，V>是公式集Γ中的任意公式 A 的模型，则称它是Γ的模型。记为<W，R，V> ⊨Γ。

如果对〈W，R〉上的任意一个模型<W，R，V>，任意 w∈W 都有 V（A，w）=1，就称 A 在框架<W，R>上有效，记为<W，R> ⊨A。

如果 A 在任意一个 LM 框架上有效，则称 A 是 LM 有效的，记为 ⊨A。否则，称 A 不是 LM 有效的，记为 ⊨/A。

定义 18 Γ ⊨A 指：Γ的模型都是 A 的模型。称 A 是Γ的语义后承。

系统 K 的公理：

（1）—（3）分别为 PC1 的公理模式（1）—（3），只是其中的公式为 LM 公式

（4） （A→B）→（ A→ B）

K 的推理规则有两条：

R1：分离规则：MP

R2：必然化规则：由 A 可得 A。也称为 N 规则，记为 RN。

定义 19 Γ $\vdash_K$A 指：存在一个公式序列 A_1，…，A_n 使得：A=A_n 并且对每一 A_i（1≤i≤n）都满足下列条件：A_i 或者为 K 公理，或者属于Γ，或者为由在其前的公式 A_j 和 A_k 运用分离规则所得，或者由在其前的公式 A_j 运用必然化规则所得。称 A 是Γ的语法后承。当Γ为空集时，称 A 为 K 定理，亦称 A 在 K 中可证。当Γ非空时称 A_1，…，A_n 为有前提的推导。

定义 20 公式序列 A_1，…，A_n 是一有前提的推导。公式 A_k 在该推导中依赖 A_i 指 k=i，或者 A_k 是通过 MP 或 RN 规则从其中至少有一个是依赖 A_k 的（那些）公式中所得。

对于 $\vdash_K$ 有如下的受限制的演绎定理：

定理 2　如果 Γ，A $\vdash_K$B，并且存在一个从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推导，其中运用了 m 次 RN 规则于那些依赖于 A 的公式，则有：$\Gamma \vdash_K {}^0A \wedge \cdots \wedge {}^mA \to B$。特别地当 RN 规则没有运用于依赖 A 的公式时，则 $\Gamma \vdash_K A \to B$。

K 有弱的可靠性，即 $\vdash_K$A，则 $\models$A。K 没有强的可靠性。如果欲得强可靠性，则如经典谓词逻辑系统 QC2 一样，有修改语法与修改语义两种办法。

将 QC2 的修改语法方法中的一些有关 QC2 的概念换为 K 的相应的概念即可得到关于 K 的语法修改方法。记所得推导为 $\vdash_K^C$，我们有：如果 $\Gamma \vdash_K^C A$，则 $\Gamma \models A$

修改语义的方法如下。

定义 21　令<W，R>为一 LM 框架，A 为 LM 的任一公式。如果存在〈W，R〉上的一个模型<W，R，V>和 W 中的一个元素 w，使得 V（A，w）=1，那么我们就称 A 在 w 中真，记为 w $\models$A，称<W，R，V>为 A 的单点模型；如果 A 在 W 中的任一元素中都真，则称<W，R，V>是 A 的全点模型，可记为 W $\models^A$A。

如果<W，R，V>是公式集Γ中的任意公式 A 的全点模型，则称它是Γ的全点模型。记为<W，R，V> $\models^A \Gamma$。

定义 22　$\Gamma \models^A A$ 指：Γ的全点模型都是 A 的全点模型。称 A 是Γ的语义后承。

定义 23　如果〈W，R〉上的任意一个模型都是 A 的全点模型就称 A 在框架<W，R>上有效，记为<W，R> $\models^A$A。

易见如果 $\Gamma \vdash_K A$，则 $\Gamma \models^A A$。

逻辑是刻画我们常用的推理中的一些概念的，例如，所有，必然等。因此一般总是先有语义概念来描述我们头脑中关于这些概念的直观想法，然后再去构造与这些语义概念相匹配的形式系统。所以一般不会采用修改语义的方法。

弱可靠性和弱完全性是仅针对系统来说的，它们是仅从公理出发，根据推导规则所得的公式集（定理集）与一语义解释下的有效性是否匹配的问题。一般常见的系统都具有弱的可靠性和弱的完全性。而对于强可靠性与强完全性，它不仅仅是就某个系统而言的，还牵涉到语法后承。如果系统的初始规则仅有分离规则，由于分离规则具有保真性，那么一般可将弱的可靠性较自然地推广到强的可靠性；但是，如果除了分离规则外还有其他的初始推导规则，那么在同一个系统上由于对这些规则是否可运用于公理以外的公式而会得到不同的语法后承（$\Gamma \vdash$A）。相对语法后承来说，语义关系一般有更为固定的含义，而且由于上面所述的逻辑研究步骤，一般上是先有直观语义，再有形式语义，最后有语法，因此一般来说无论怎样定义语法后承，总是朝着让语法后承跟这种先有的语义后承关系相匹配的目标出发的。

参考文献：

［1］王宪钧.数理逻辑引论［M］.北京：北京大学出版社，1982

［2］叶峰.一阶逻辑与一阶理论［M］.北京：中国社会科学出版社，1994

［3］陈慕泽.数理逻辑教程［M］.上海：上海人民大学出版社，2001

［4］张尚水.数理逻辑导引［M］.北京：中国社会科学出版社，1990

［5］宋文淦.符号逻辑基础［M］.北京：北京师范大学出版社，1993

［**6**］**周北海**.**模态逻辑导论**［M］.**北京：北京大学出版社，**1997

［**7**］**陈慕泽，余俊伟**.**数理逻辑基础**［M］.**北京：中国人民大学出版社，**2003

［**8**］**陈慕泽**.**全称概括规则和受限制的演绎定理——国内数理逻辑教材中的一个问题**［M］.**浙江社会科学** 2001.2.99—101

［**9**］H.B.Enderton, A Mathematical Introduction to Logic［M］.Academic Press, 1972.

［**10**］H.D.Ebbinghaus, J.Flum, W.Thomas,.Mathematical［M］.Lgoic(2rd editon), Springer-Verlag New York,Inc,1994

［**11**］C.Alexander and Z.Michael, Modal Logic［M］Oxford Univwrsity Press,Inc., New Yo rd,1997

On Formal Systems' Soundness and Completeness

Yu Jun-wei

(Philosophy Department, Renmin University of China, Beijing,100872, China)

Abstract: Syntactical completeness is only concerned with syntactics. The classical proposition logic systems with the rule of substitution are syntactical complete, while the ones without the rule are not. Whether the classical predicate logic systems with the primitive rule of universal generalization have the strong semantic soundness depends on the restriction of the rule. There exists the similar relation between the necessitation and modal logic.

Keywords: completeness; soundness; the rule of substitution; generalization rule; necessitation