论 Dempster-Shafer 理论的一个悖论

熊卫 [1] **鞠实儿** [1] **罗旭东** [2]

(中山大学逻辑与认知研究所 哲学系 广州 510275)[1]

(南安普顿大学电子与计算机系 英国 南安普顿)[2]

摘要： 基于 D-S 理论的随机译码器解释，我们可以利用概率论表达该理论的基本概念和证据组合规则。在此基础上，我们分析 D-S 理论中一个悖论产生的原因。

关键词： Dempster-Shafer 理论；不确定推理；悖论

中图分类号： B81 **文献标识码：** A

1 引言

Dempster-Shafer 理论 (又称为信念函数理论，以下简称 D-S 理论) 是 Shafer[1] 在 Dempster[2, 3] 理论的基础上而构建起来的。目前，它是不确定推理研究领域中的主流理论之一 [4] ，其要点是： (1) 根据已有的证据或知识 (可能是不完备的) ，把基本概率指派给一个集合的幂集的成员，并由此而得到信念函数和似然函数： (2) 应用 Dempster 规则组合两个信念函数，从而利用这个组合结果来表达多主体之间的意见。八十年代后，该理论引起了计算机科学等领域的专家的关注和研究，并在这个领域中得到应用 (参见 [5, 6, 7]) 。然而，有时应用 D-S 理论会产生不合理的结果，这是它所受到的主要责难之一，具有代表性的是文献 [8] 中所表明的悖论。

对于一个恰当的不确定推理形式化理论来说，一个重要的任务在于给出信念度的语义，也就是说明确信念度的度量方法，在这一基础上才能合理地为信念度的传播规则作出辩护，才能理解应用该理论所得到的结果 [4] 。例如，概率论中的条件公式就可以在概率的主观解释下得到辩护 (参见 [9]) 。本文将在 Shafer 的随机译码器的解释之基础上将分析这一困境所产生的原因。

2 D-S 理论的基本概念及其一个悖论

设 Θ 是由某一问题的可能解集，称为识别框架，它具有如下特点： (1) 有穷性和封闭性， (2) 其中的元素相互排斥。

定义 1 令 Θ 为识别框架，函数 $m: 2^{\Theta} \longrightarrow [0,1]$ 是一个基本概率指派，当且仅当满足：
(i) $m(\phi)=0$,
(ii) $\sum_{A\subseteq\Theta}(A)=1$.
若 $m(A)>0$, 则称 A 为该函数的一个焦元。

定义 2 函数 $Bel: 2^{\Theta} \longrightarrow [0,1]$ 称为信念函数，如果 $Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B)$. 这里称 $Bel(A)$ 为 A 的信念度。

定义 3 令 m_1 和 m_2 为 Θ 上的两个基本概率指派，它们的焦元分别为 $A_1,...,A_m$ 和 $B_1,...,B_n$，Bel_1，Bel_2 及 $Bel_{12}=Bel_1\oplus Bel_2$ 分别为 m_1、m_2 和 $m_{12}=m_1\oplus m_2$ 所诱导的信念函数。如果 $\sum_{A_i\cap B_j=\phi}m_1(A_i)m(B_j)<1$，那么 $m_{12}=m_1\oplus m_2$ 定义为：

$$m_{12}(\emptyset)=0,$$

$$m_{12}(A)=K\sum_{A_i\cap B_j=A}m_1(A_i)m_2(B_j),^1$$

这里 $A\subseteq\Theta,\ K=\left(\sum_{A_i\cap B_j\neq\emptyset}m_1(A_i)m_2(B_j)\right)^{-1}$.

上述公式即为 Dempster（证据）组合规则。它可推广至多个 m 函数或 Bel 函数的组合，应用它综合多个专家的意见。在 D-S 理论中，由一个证据可确定一个基本概率指派，从而确定一个信念函数。因此，Dempster 组合规则又称为证据的组合规则，D-S 理论称为证据理论或信念函数理论。然而，应用该理论导致一些不合理的结果，其中具有代表性的是由 Kyburg[8] 提出的一个著名的悖论。

某地区发生凶杀案，嫌疑人为 a,b 和 c。有两人向警方提供证据：

E_1: 证人 e 为住在被害人屋子对面的老妇，称事发时透过窗户看见嫌疑人 a 在凶杀现场.

E_2: 证人 f 为被害人的邻居，称在事发时段看见嫌疑人 c 在凶杀现场.

假设我们得到如下基本概率指派：

$$m_1(\{a\})=0.99,m_1(\{b\})=0.01, \tag{1}$$

$$m_2(\{b\})=0.01,m_2(\{c\})=0.99, \tag{2}$$

那么由 Dempster 组合规则组合 (1) 和 (2) 得：

$$m_{12}(\{a\})=0,m_{12}(\{b\})=1,m_{12}(\{c\})=0.$$

这一结果表明嫌疑人 b 确定为杀人犯！然而，实际情况是：上述证据同时认为该嫌疑人为凶手的可能性是很小的. 显然，这是一个悖论.

3 悖论产生的原因

在出版经典著作 [1] 后，Shafer [10, 11, 12] 致力研究信念函数的解释。为此，他给出了一个随机译码器模型：假设我们从一列译码器 $c_1,...,c_n$ 中随机地选择某个来译解所给定的证据 E，然后输出结果。译码器的选择是不确定的，但是我们知道 c_i 被选的概率 $P(c_i)$ 为 p_i，$i=1,...,n$。设证据 E 经译码器 c_i 译解后所得的结果为 A_i, 并且它是有意义的。$m(A_i)$ 解释为 E 经译码器译解后结果为 A_i 的概率，$Bel(A)$ 可以解释为信号经译解后的结果为 A_i 的概率和，这里 A_i 蕴涵 A.

依据这一解释，给定一个证据 E，我们可引人定义在 Θ 上信念函数的一个解释结构 (下文简称为解释结构)(Δ,P,I), 其中 $\Delta=\{c_1,\cdots,c_n\}$ 称为潜在集，P 为 Δ 上的概率分布，$I:\Delta\to 2^\Theta$ 称为相容函数. 这样，有关潜在集 Δ 上的不确定信息就可以迁移到 2^Θ 上来：

$$m(A)=\sum_{I(c_i)=A}P(c_i), \tag{3}$$

$$Bel(A)=\sum_{I(c_i)\subseteq A}P(c_i), \tag{4}$$

[1]严格地说，这个公式表述为 $m_{12}(A)=K\sum_{i,j}m_1(A_i)m_2(B_j)$, 这里 i,j 使得 $\mathrm{A}_i\cap B_j=A$.

让我们回到前文悖论所涉及的事例中。考虑到证人 e 的视觉因素，警察怀疑证据 E_1 的可靠性。若 E_1 可靠，它将直接指向 a；若 E_1 不可靠，此时并不意味着 E_1 为假，这时不直接指向特定的嫌疑人。由此分析，我们可构造一个解释结构：(Δ, P, I), 这里，$\Delta = \{c_1, c_2\}$, c_1 和 c_2 分别为 " 证据是可靠的 " 和 " 证据是不可靠的 ", $I(c_1) = \{a\}$, $I(c_2) = \Theta(\Theta = \{a, b, c\})$. 假设 $P(c_1) = 0.6$, $P(c_2) = 0.4$, 从而可得：

$$\begin{aligned}
m(\{a\}) &= \sum_{I(c_i)=\{a\}} P(c_i) = P(c_1) = 0.6, \\
m(\Theta) &= \sum_{I(c_i)=\Theta} P(c_i) = P(c_2) = 0.4, \\
Bel(\{a\}) &= \sum_{I(c_i)\subseteq\{a\}} P(c_i) = P(c_1) = 0.6, \\
Bel(\Theta) &= \sum_{I(c_i)\subseteq\Theta} P(c_i) = P(c_1) + P(c_2) = 1.
\end{aligned}$$

特别地，正如 Shafer[11] 的观点，如果我们可以在识别在框架上建立一个可信赖的概率函数，就可把它视为一个信念函数。例如，基本概率指派 (1) 和 (2) 所诱导的信念函数。在这种情况下，潜在集和识别框架是相同的，我们称这样的潜在集为平凡潜在集。

随机译码器解释中，既然信念度的度量归结到一个定义在潜在集的概率函数，那么进一步的问题在于这一概率函数分别是如何获得的，是象 Carnap 一样通过逻辑的角度来获取呢，还是象 Ramsey 和 Savage 一样从主观行为的角度来获取？事实上，在 Shafer 那里频率主义的观点更受到欢迎 [11] 。在上述例子中，我们必须通过考察证人的诚实、视觉和所处的特定环境等因素来评判该证人所提供证词的相对可靠性。

接下来，我们将考察等式 (3) 和 (4) 成立的预设。我们的目的是明确的：就是要阐明识别框架 Θ 的所有子集 A_i 的不确定性的度量方法。事实上，上述信念函数解释涉及三个元素：证据 E 、潜在集 Δ 和识别框架 Θ 。根据概率论和我们的目的，就是要计算 $P(A_i \mid E)$ ，这里， P 为集合 $\Delta \times \Theta \times E$ 的概率分布。这时，

$$\begin{aligned}
P(A_i \mid E) &= P(A_i \cap \Delta \mid E) \\
&= \sum_j P(A_i \cap c_j \mid E) \\
&= \sum_j P(A_i \mid c_j \cap E) P(c_j \mid E)
\end{aligned}$$

由随机译码器解释得：

$$\sum_j P(A_i \mid c_j \cap E) = \begin{cases} 1 & I(c_j) = A_i, \\ 0 & I(c_j) = \overline{A_i}. \end{cases}$$

因此可得：

$$P(A_i \mid E) = \sum_{I(c_j)=A_i} P(c_j \mid E)$$

这样，要使得由等式 3 成立，必须假设：

$$\sum_{I(c_j)=A_i} P(c_j \mid E) = \sum_{I(c_j)=A_i} P(c_j) \tag{5}$$

因而，要使等式 (3) 和 (4) 成立必须预设等式 (5) 成立。特别地，当只有唯一的 c_j 使得 $I(c_j) = A_i$ 时，有 $P(c_j \mid E) = P(c_j)$ 。这一式子的含义是选择译码器于给定的信号（即证据）是不相关的。

于是，在考虑上述预设的情况下，我们将基本概率指派和信念函数的解释作出如下修改。假设有证据 E ，令 (Δ, P, I) 为 Θ 上的解释结构， P 为集合 $\Delta \times E \times \Theta$ 的概率分布，我们选择 Δ 中的译码器来译解证据 E ，那么，

$$m(A) = \sum_{I(c_i)=A} P(c_i \mid E), \tag{6}$$

$$Bel(A) = \sum_{I(c_i)\subseteq A} P(c_i \mid E), \tag{7}$$

令 (Δ_1, P_1, I_1) 和 (Δ_2, P_2, I_2) 为 Θ 上的两个解释结构，分别对应于 E_1 和 E_2，且它们诱导的基本概率指派分别为 m_1 和 m_2 。令 (Δ, P, I) 为 Θ 上的解释结构，其中 $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ ，P 为集合 $\Delta \times (\cup E_i) \times \Theta$ 的概率分布， $I(\omega_k) = I_1(c_i) \cap I_2(d_j)$，这里 $\omega_k = (c_i, d_j) \in \Delta, c_i \in \Delta_1, d_j \in \Delta_2$. $m_{12} = m_1 \oplus m_2$ 。由等式 (6)，我们选择译码器 $\omega(\omega = (c_i, d_j))$ 来译解证据 $E_1 \cap E_2$ ，那么，在随机译码器解释下， Dempster 组合规则可表达为：

$$m_{12}(A) = \sum_{I(\omega)=A} P((c_i, d_j) \mid E_1 \cap E_2), \tag{8}$$

让我们回到前文的悖论中。问题出在什么地方？撇开随机译码器解释，从定义的形式上看，基本概率指派 (1) 和 (2) 是合法的，并且可以应用 Dempster 组合规则来组合它们。但是，这个结论的断定在随机译码器解释下就显得草率。事实上，这些基本概率是概率函数，它们所对应的潜在集是两个平凡潜在集，分别为 $\Delta_1 = \{a, b\}$ 和 $\Delta_2 = \{b, c\}$ 。这时，它们所对应的解释结构分别为 (Δ_1, P_1, I_1) 和 (Δ_2, P_2, I_2) ，组合结构为 (Δ, P, I) 。由于证据 E_1 和 E_2 是不相容的，因而， $E_1 \cap E_2 = \phi$ ，即有 $P(E_1 \cap E_2) = 0$ 。根据条件概率的定义，等式 (8) 是没有意义的。因此，不能应用 Dempster 组合规则组合基本概率指派 (1) 和 (2) 。否则，将导致前文中的悖论。

4 相关工作的比较及结论

Smets[8] 解决这个困境的方法是：在 D-S 理论中引入了开放世界预设和封闭世界预设. 其要点是：在识别框架 Θ(Θ 为一个非穷竭集) 的基础上引入一个剩余集 S ，使 $\Theta \cup S$ 为穷竭集，这时有，

$$Bel(S) \geq 0, Bel(\Theta) \leq Bel(\Theta \cup S), Bel(\Theta \cup S) = 1$$

由此得到一个封闭世界，则必然事件为 $\Theta \cup S$，因而指派给 $A(A \subseteq \Theta)$ 的信念度实际上是指派给 $A \cup S$ 。记识别框架 Θ 的不可能事件为 ϕ_Θ ，那么指派给 ϕ_Θ 的信念度就是指派给 $\phi_\Theta \cup S$ ，这样在开放世界预设下应用 Dempster 规则无需正则化。依这一观点，在这个悖论中实际情况是：嫌疑人名单可能是

不完备的。因此基本概率指派应该为：

$$m_1(\{a\} \cup S) = 0.99, m_1(\{b\} \cup S) = 0.01,$$
$$m_2(\{b\} \cup S) = 0.01, m_2(\{c\} \cup S) = 0.99,$$

那么由 Dempster 组合规则得：

$$m_{12}(\phi_\Theta \cup S) \approx 0.99, m_{12}(\{b\} \cup S) \approx 0.01.$$

这里的 S 为已有嫌疑人的延长清单。组合基本概率指派表明，凶手不在嫌疑人名单之中的可能性大约有百分之九十九，从而前文中的悖论得以消除。

不可否认，如果抛弃识别框架的封闭性这一预设，上述解决方法具有一定的启发性及合理性。但是，倘若嫌疑人的名单是 **完备** 的，这一悖论仍然没有得到解决；而本文在这个预设下分析了悖论所产生的原因。

基于 D-S 理论的随机译码器解释，我们可以利用概率论表达该理论的基本概念和组合规则。撇开随机译码器解释，从定义的形式上看，基本概率指派 (1) 和 (2) 是合法的，并且可以应用 Dempster 组合规则来组合它们。但是在随机译码器解释下，由于这些基本概率指派所对应的证据 E_1 和 E_2 是不相容的，这使得组合规则表达式 (8) 失去意义。此时，倘若坚持应用组合规则来组合它们将导致上述悖论。这就是产生上述悖论的原因。

参考文献

[1] Shafer, G, A mathematical theory of evidence. Princeton University Press, 1976

[2] Dempster, A., Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, Ann. Math. Statist. 38, 325-339, 1967

[3] Dempster, A., A generalization of Bayesian inference, J. R. Statist. Soc. B30, 204-247, 1967

[4] Walley, P. Measures of Uncertainty in expert systems, Artificial Intelligence, pp. 1-58, 1996.

[5] Hsia, Y. and Shenoy, P., An evidential language for expert systems, in Z. Ras, eds., Mathodologies for Intelligent systems 4, North- Holland, New York, 9-16, 1989

[6] Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence, edited by Yager, R., kacprzyk, J., and Fedrizzi, M., John Wiley & Sons, Inc., 1994

[7] Gordon, J and Shortliff, E., A method for managing evidential reasoning in a hierarchial hypothesis space, Artificial intelligence, 26: 323-358, 1985

[8] Smets, P. Belief Functions. Non-Standard Logic for Automated Reasoning. Academic Press Limited. 253-289, 1988.

[9] L, Savage, *The Foundations of Statistics*, Jony Willey and Sons, Inc., 1954.

[10] Shafer, G&Tversky, A. Languages and Designs for Probability Judgment. Cognitive Science.Vol 9,309-319. 1985

[11] Shafer, G &Srivastava, R. The Bayesian and Belief-Function Formalisms: A General Perspective for Auditing. in: Reading in Uncertain Reasoning Morgan Kanfmann,San Mateo California. 480-520, 1990

[12] Shafer, G., Constructive Probability, Synthese 48: 1-60. 1981

Analysis of a Paradox in Dempster-Shafer Theory

XIONG Wei[1] JU Shi-Er[1] LUO Xu-Dong[2]

(Institute of Logic and Cognition, Dept. of Philosophy, Zhongshan University, Guangzhou 510275)[1]

(Dept. of Electronics and Computer Science, University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK)[2]
Abstract: Based on the random code, an interpretation of belief functions given by Shafer, we can represent basic concepts and the combination rule of evidence of Dempster-Shafer Theory, by which we will show the cause of a paradox in Dempster-Shafer theory.
Key words: Dempster-Shafer Theory, Uncertainty Reasoning, Paradox

收稿日期：2004-9-10

基金项目：广东省教育厅社科青年基金项目 (No 。 02SJC720002); 中山大学重大项目：不确定推理系统及其应用。

作者简介：熊卫 (1970-), 男 (汉族) , 江西崇仁人, 哲学博士, 中山大学逻辑与认知研究所专职研究员, 中山大学哲学系讲师, 主要研究方向是逻辑学和科学哲学。