一个极小的弗协调逻辑系统[1]

余俊伟

(中国人民大学哲学系，北京，100872)

摘要：从 C_ω.去掉双重否定律可得到一个比科斯塔弗协调逻辑系统 C_ω.更小的系统。它有一个克里普克语义解释；论文证明了该系统相对于该解释既是可靠的又是完全的。

关键词：弗协调逻辑; 可靠性; 完全性

中图分类号： B81　　**文献标识码：**A

弗协调逻辑开创者科斯塔建立了一系列弗协调逻辑系统 C_n（$1\leq n\leq\omega$），其中 C_ω为最小。C_ω是以直觉主义命题逻辑的正部分加上排中律和双重否定律得到的；北欧的 D.Batens 以经典命题逻辑的正部分加上排中律得到了弱的弗协调逻辑 CLuN，并以此为基础扩张得到了两个逻辑系统，它们都介于 CLuN 和经典逻辑之间。系统经典命题逻辑的正部分与直觉主义逻辑的正部分相比多了皮尔士律。笔者介绍的这个系统是以直觉主义命题逻辑的正部分仅加上排中律得到的。比 C_ω和 CLuN 都小，推理能力是最弱的，但它也说明还有比已知两种否定更弱的否定。

（一）L 语法：

1、MPL 建立在语言 L 之上，L 由以下三类符号组成：

第一类包括可数无穷多个命题符：

p_0，p_1，p_2，…，p_m，…，m 为自然数。

第二类包括四个联结词：

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$。

第三类包括两个标点符号：

(，　)；

它们依次被称为左括号和右括号。

由初始符号组成的有穷序列称之为符号。由全体符号形成的集合，我们将它记为 Expr(L)。

定义 1　L 的一个公式是也仅是按下列规则构成的符号：

（1）单独的命题符号是公式，

（2）若α是公式，则$\neg\alpha$是公式，

[1] 本文得到国家社会科学基金项目（04CZX010）的资助。

（3）若α，β是公式，则（$\alpha\wedge\beta$），（$\alpha\vee\beta$），($\alpha\to\beta$)是公式。

单独的命题符号是最简单的公式，被称为原子公式。由全体原子公式所组成的符号集记为 Atom(L)，全体公式组成的符号集记为 Form(L)。我们用α，β和γ等表示任意的公式。显然，Form(L)将包含 Atom(L)。

定义 2 对 L 中的公式α、β

（1）α中的联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$出现的总次数称为α的复杂度；

（2）α作为β的一个连续部分出现，我们就称α是β的子公式；如果α是β的子公式且α不等于β，就称α是β的真子公式；

（3）我们称只出现在α中而不出现在α的任何真子公式中的那个联结词为α的主联结词；我们称主联结词是$\neg$的公式为否定式；主联结词是$\wedge$的公式为合取式；主联结词是$\vee$的公式为析取式；主联结词是$\to$的公式为蕴涵式。

（4）α中某个$\neg$的辖域是指在α中紧随该$\neg$出现的α的子公式；α中某个$\to$的左辖域和右辖域是指在α中紧随该$\to$出现的α的左、右两个子公式，对$\wedge$与$\vee$的辖域定义类似。

MPL 的公理模式有如下九条：

（1） $\alpha\to(\beta\to\alpha)$，

（2） $(\alpha\to(\beta\to\gamma)\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$，

（3） $\alpha\to(\beta\to\alpha\wedge\beta)$，

（4） $\alpha\wedge\beta\to\alpha$，

（5） $\alpha\wedge\beta\to\beta$，

（6） $(\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\vee\beta\to\gamma))$，

（7） $\alpha\to\alpha\vee\beta$，

（8） $\beta\to\alpha\vee\beta$，

（9） $\alpha\vee\neg\alpha$，

MPL 的推理规则：

R（$\to$消去规则）：从α和$\alpha\to\beta$可推出β。

定义 3 MPL 的形式可推演关系定义如下。由公式集Γ到a的一个推演是一个有穷公式序列α_1，α_2，…，α_m，使得α_m是α并且对于各个 j(1≤j≤m)，α_j满足下列条件之一：

（1）α_j是 MPL 的公理，

（2）$\alpha_j\in\Gamma$，

（3）有小于 j 的 i 和 k 使得α_j可从α_i和α_k利用$\to$消去规则而得到。

如果有一个由Γ到α的推演，则称α在系统 MPL 中是由Γ形式可推演的，记为$\Gamma\vdash_{MPL}\alpha$，在不发生混淆的情况下简记为$\Gamma\vdash\alpha$。否则，称α在系统 MPL 中不是由Γ形式可推演的，记为$\Gamma\nvdash_{MPL}\alpha$，在不发生混淆的情况下简记为$\Gamma\nvdash\alpha$。当$\Gamma$为空集时，我们称这个有穷序列

为α的一个证明，也称α在 MPL 中是可证的。我们称一个可证的公式为 MPL 的一个定理。若$\Gamma=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，则$\Gamma\vdash\alpha$可记为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\vdash\alpha$。$\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$可记为$\Gamma, \alpha\vdash\beta$。若$\Gamma$为空集，$\Gamma\vdash\alpha$可记为$\vdash\alpha$。此时$\alpha$是 MPL 的一个定理。

定理 1 MPL 中有下列推演规则：

（1）如果$\alpha\in\Gamma$，那么$\Gamma\vdash\alpha$，

（2）如果Γ并且$\Gamma\subseteq\Delta$，那么$\Delta\vdash\alpha$，

（3）如果$\Gamma\vdash\alpha$，$\Gamma\vdash\alpha\to\beta$，那么$\Gamma\vdash\beta$。

定理 2 MPL 有演绎定理。对其成立

（二）L 语义：

定义 4 一个 L 框架是一个有序二元组〈W，R〉，其中 W 是一非空集，R 是 W 上的一偏序，即满足自返性和传递性。

定义 5 一个 L 模型是一个有序三元组〈W，R，V〉，其中〈W，R〉是一个 L 框架，V 是从 Form(L)×W 到{1，0}中的一个映射，满足以下条件：

（1）如果 V（α，w）=0，那么，对任一 $w_1\in W$，若 wRw_1，则 V（$\neg\alpha$，w）=1，

（2）V（$\alpha\wedge\beta$，w）=1 当且仅当 V（α，w）且 V（β，w）=1，

（3）V（$\alpha\vee\beta$，w）=1 当且仅当 V（α，w）=1 或 V（β，w）=1，

（4）V（$\alpha\to\beta$，w）=1 当且仅当对任一 $w_1\in W$，若 wRw_1，则 V（α，w_1）=0 或 V（β，w）=1，

（5）对 L 的任意公式α，W 中的任意两个元素 w_1，w_2，如果 w_1Rw_2 且 V（α，w_1）=1，那么 V（α，w_2）=1。

称此模型为建立在框架〈W，R〉上的一个模型。

定义 6 令<W，R>为一 L 框架，α为 L 的任一公式。如果存在〈W，R〉上的一个模型<W，R，V>和 W 中的一个元素 w，使得 V（α，w）=1，那么我们就称α是可满足的，可记为<W，R，V>$\models\alpha$，或简单记为 w$\models\alpha$，称<W，R，V>是α的模型。如果<W，R，V>是公式集Γ中的任意公式α的模型，则称它是Γ的模型；如果对〈W，R〉上的任意一个模型<W，R，V>，任意 $w\in W$ 都有 V（α，w）=1，就称α在框架<W，R>上有效，记为<W，R>$\models\alpha$。如果α在任意一个 L 框架上有效，则称α是 L 有效的，记为$\models_L\alpha$，在不发生混淆的情况下简记为$\models\alpha$。否则，称α不是 L 有效的，记为$\not\models_L\alpha$。

定理 3 如果$\vdash\alpha$，则$\models\alpha$，即 MPL 相对于 L 框架具有可靠性。

证明：假设$\vdash\alpha$。于是存在一个有穷公式序列$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，使得$\alpha_m$是$\alpha$并且对于各个 j($1\le j\le m$)，$\alpha_j$满足下列条件之一：

（1）α_j是 MPL 的公理，

（2）有小于 j 的 i 和 k 使得α_j可从α_i和α_k利用$\to$消去规则而得到。

我们施归纳于 j($1\le j\le m$) 证明对每一 j 都有$\models\alpha_j$。

当 j=1 时。α_j是 MPL 的公理。由下可得 α 是 L 有效的，因此$\models\alpha_j$。

如果它属公理模式（1）。假设它不是 L 有效的，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（$\alpha\to(\beta\to\alpha)$，w）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且 V（α，w_1）=1 且 V（$\beta\to\alpha$，w_1）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_2 满足：w_1Rw_2 并且 V（β，w_2）=1 且 V（α，w_2）=0，但根据定义 5（5）又有 V（α，w_2）=1。这样就产生矛盾。因此它是 L 有效的。

如果它属公理模式（2）。假设它不是 L 有效的，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（$(\alpha\to(\beta\to\gamma)\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$，w）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且 V（$\alpha\to(\beta\to\gamma)$，$w_1$）=1 且 V（$(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma)$，$w_1$）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_2 满足：w_1Rw_2 并且 V（$\alpha\to\beta$，w_2）=1 且 V（$\alpha\to\gamma$，w_2）=0，据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_3 满足：w_2Rw_3 并且 V（α，w_3）=1 且 V（γ，w_3）=0。但 L 框架具有传递性，因此，w_1Rw_3；又根据定义 5（5）有 V（$\alpha\to(\beta\to\gamma)$，$w_3$）=1 且 V（$\alpha\to\beta$，$w_3$）=1，与 V（α，$w_3$）=1 根据定义 5（4）和 L 框架具有自返性一起可以得到 V（β，w_3）=1 和 V（$\beta\to\gamma$，w_3）=1，进而 V（γ，w_3）=1。这样就产生矛盾。因此它是 L 有效的。

如果它属公理模式（3）。假设它不是 L 有效的，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（$\alpha\to(\beta\to\alpha\wedge\beta)$，w）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且 V（α，w_1）=1 且 V（$\beta\to(\alpha\wedge\beta)$，$w_1$）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_2 满足：w_1Rw_2 并且 V（β，w_2）=1 且 V（$\alpha\wedge\beta$，w_2）=0，但根据定义 5（5）又有 V（α，w_2）=1。这样就与定义 5（2）产生矛盾。因此它是 L 有效的。

如果它属公理模式（4）。假设它不是 L 有效的，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（$\alpha\wedge\beta\to\alpha$，w）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且 V（$\alpha\wedge\beta$，w_1）=1 且 V（α，w_1）=0，与定义 5（2）产生矛盾。因此它是 L 有效的。

类似可证如果它属公理模式（5），也同样是 L 有效的。

如果它属公理模式（6）。假设它不是 L 有效的，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（$(\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\vee\beta\to\gamma))$，w）=0，则据定义 5(4)存在一个 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且 V($\alpha\to\gamma$,w_1)=1 且 V($(\beta\to\gamma)\to(\alpha\vee\beta\to\gamma)$，$w_1$）=0，据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_2 满足：w_1Rw_2 并且 V（$\beta\to\gamma$，w_2）=1 且 V（$(\alpha\vee\beta\to\gamma$，$w_2$)=0，据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_3 满足：w_2Rw_3 并且 V（$\alpha\vee\beta$，w_3）=1 且 V（γ，w_3）=0，但 L 框架具有传递性，因此，w_1Rw_3；又根据定义 5（5）有 V（$\alpha\to\gamma$，w_3）=1 与 V（$\beta\to\gamma$，w_3）=1，V（$\beta\to\gamma$，w_3）=1 与 V（γ，w_3）=0 根据定义 5（4）和 L 框架具有自返性一起得到 V（β，w_3）=0；同理可得 V（α，w_3）=0，因此根据定义 5（3）有 V（$\alpha\vee\beta$，w_3）=0。这与 V（$\alpha\vee\beta$，w_3）=1 产生矛盾。因此它是 L 有效的。

如果它属公理模式（7）。假设它不是 L 有效的，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（$\alpha\to\alpha\vee\beta$，w）=0，则据定义 5（4）存在一个 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且 V（α，w_1）=1 且 V（$\alpha\vee\beta$，w_1）=0，与定义 5（3）矛盾。因此它是 L 有效的。

类似可证如果它属公理模式（8），也同样是 L 有效的。

如果它属公理模式（9）。假设它不是 L 有效的，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（$\alpha\vee\neg\alpha$，w）=0，则据定义 5（3）

有 V（α，w）=0 且 V（¬α，w）=0。因为 wRw，据定义 5（1）由 V（α，w）=0 可得 V（¬α，w）=1，这样就产生矛盾。因此它是 L 有效的。

假设 j=n 时成立，当 j=n+1 时，如果α_j是 MPL 的公理，如上已证得。如果有小于 j 的 i 和 k 使得α_j可从α_i和α_k利用→消去规则而得到，则由归纳假设已得 $\vdash\alpha_i$和 $\vdash\alpha_k$。不妨设 $\alpha_k=\alpha_i\rightarrow\alpha_j$。如果 $\not\vdash\alpha_j$，则存在一个 L 框架〈W，R〉，在它上有一模型〈W，R，V〉并且 W 中有一元素 w 使得 V（α_j，w）=0，但是α_i和$\alpha_i\rightarrow\alpha_j$是 L 有效的，因此 V（$\alpha_i$，w）=1 且 V（$\alpha_i\rightarrow\alpha_j$，w）=1，但 L 框架具有自返性，根据定义 5（4）有 V（α_j，w）=1，与刚才假设的 V（α_j，w）=0 矛盾。所以有 $\vdash\alpha_j$。

由上证明了：如果 ⊨α，则 ⊢α。

定义 7 一公式集Γ称为足道集，如果存在 L 公式α使得 $\Gamma\not\vdash\alpha$。如果足道集Γ对公式α有 $\Gamma\not\vdash\alpha$，也称Γ是α-足道的。

定义 8 一公式集Γ称为极大足道集，如果它满足：

（1）是足道集。

（2）对任一 L 公式α，如果 $\Gamma\vdash\alpha$，则$\alpha\in\Gamma$。

（3）对 L 公式α、β，若$\alpha\vee\beta\in\Gamma$，则有$\alpha\in\Gamma$或$\beta\in\Gamma$。

引理 1 对任一α-足道的公式集都能扩张为一α-足道的极大足道集。

证明：设Γ是任一α-足道的。我们现在来证明存在极大足道集Δ满足：$\Gamma\subseteq\Delta$并且$\Delta\not\vdash\alpha$。因而，Γ扩张为一α-足道的极大足道集Δ。

将 L 的所有形如$\alpha\vee\beta$的析取式排列如下：γ_1，γ_2，…，γ_n，…。下面构造公式集系列Γ_1，Γ_2，…，Γ_n，…，如下：

令$\Gamma_1=\Gamma$。

依次考察上述析取式排列中公式γ_1，γ_2，…，看是否可由Γ_1推演出，设γ_i是上述析取式排列的第一个可以由Γ_1推演出的公式，即$\Gamma_1\vdash\gamma_i$，但对每一 j<i 都有$\Gamma_1\not\vdash\gamma_j$。设$\gamma_i=\alpha\vee\beta$。如果$\Gamma_1$，$\alpha\not\vdash A$，则令$\Gamma_2=\Gamma_1\cup\{\alpha\}$；否则$\Gamma_2=\Gamma_1\cup\{\beta\}$；并将$\gamma_i$从排列中划去，然后再依次考察此时的析取式排列中$\gamma_{k1}$，$\gamma_{k2}$，…，看是否可由$\Gamma_2$推演出，…。一般地，假如$\Gamma_n$构造好了，我们依次考察此时的析取式排列中公式$\gamma_{t1}$，$\gamma_{t2}$，…，看是否可由$\Gamma_n$推演出，如$\gamma_{tj}$不能，则考察下一个，如果$\gamma_i$是第一个可由$\Gamma_n$推演出的析取式，设$\gamma_i=\alpha\vee\beta$，构造$\Gamma_{n+1}$如下：

$$\Gamma_{n+1}=\begin{cases}\Gamma_n\cup\{\alpha\}\text{，如果}\Gamma_n\text{，}\alpha\not\vdash A\text{；}\\ \Gamma_n\cup\{\beta\}\text{，否则。}\end{cases}$$

这样我们得到一个公式集序列Γ_1，Γ_2，…，并且有$\Gamma_1\subseteq\Gamma_2\subseteq\cdots\Gamma_i\subseteq\Gamma_{i+1}\subseteq\cdots$

令$\Delta=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i$。我们断定此Δ即为所求的极大足道集。

首先，据Δ的构造显然有$\Gamma\subseteq\Delta$。

其次，我们证明$\Delta\not\vdash A$。

我们先证明对如上所构造的每一Γ_i都有$\Gamma_i\not\vdash A$。施归纳于 i。当 i=1 时，由Γ_1的定义即得。如果$\Gamma_n\not\vdash A$，而γ_i是第一个可由Γ_n推演出的析取式，设$\gamma_i=\alpha\vee\beta$，考虑Γ_{n+1}的两种情况。

如果$\Gamma_{n+1}=\Gamma_n \cup \{\alpha\}$，则由定义知$\Gamma_n$，$\alpha \vdash\!\!/ A$，即$\Gamma_{n+1} \vdash\!\!/ A$。如果$\Gamma_{n+1}=\Gamma_n \cup \{\beta\}$，则由定义可知$\Gamma_n$，$\alpha \vdash A$。此时如果$\Gamma_{n+1} \vdash A$，即$\Gamma_n$，$\beta \vdash A$。根据演绎定理有：$\Gamma_n \vdash \alpha \to A$ 且$\Gamma_n \vdash \beta \to A$，运用公理模式（6）便得到$\Gamma_n \vdash \alpha \vee \beta \to A$，而由$\gamma_i$ 可由Γ_n可推演出又有$\Gamma_n \vdash \alpha \vee \beta$，因此$\Gamma_n \vdash A$。产生矛盾。因此$\Gamma_{n+1} \vdash\!\!/ A$。

现在如果$\Delta \vdash A$，因此存在Δ的某个有穷子集$\Delta' \vdash A$。Δ'中的每一公式都属于Δ的某一子集Γ_i中，设这些子集下标最大的的为 j，则$\Gamma_j \vdash A$。与上面所证的每一Γ_i都有$\Gamma_i \vdash\!\!/ A$ 矛盾。因此$\Delta \vdash\!\!/ A$。这表明Δ满足定义 8（1）。

第三，对任一析取式$\alpha \vee \beta$，如果$\alpha \vee \beta \in \Delta$。则有某个 m 使得$\alpha \vee \beta \in \Gamma_m$，因而$\Gamma_m \vdash \alpha \vee \beta$故$\{m \mid \Gamma_m \vdash \alpha \vee \beta\}$非空，取其最小元 i，因此对任一 $j \leq i$ 都有$\Gamma_j \vdash\!\!/ \alpha \vee \beta$，对任一的 $i \leq j$ 都有$\Gamma_j \vdash \alpha \vee \beta$。因此存在一 n（$i \leq n$）使得在$\alpha \vee \beta$恰在构造$\Gamma_{n+1}$后从析取式排列被划去。根据$\Gamma_{n+1}$的构造规则，如果$\Gamma_n$，$\alpha \vdash\!\!/ A$，则$\Gamma_{n+1}=\Gamma_n \cup \{\alpha\}$；否则$\Gamma_{n+1}=\Gamma_n \cup \{\beta\}$。对于前者$\alpha \in \Gamma_{n+1}$，对于后者有$\beta \in \Gamma_{n+1}$。而$\Gamma_{n+1} \subseteq \Delta$，所以有$\alpha \in \Delta$或$\beta \in \Delta$。这表明$\Delta$满足定义 8（3）。

第四，对任一公式α，如果$\Delta \vdash \alpha$，则$\Delta \vdash \alpha \vee \alpha$。（因为$\Delta \vdash \alpha \to \alpha \vee \alpha$）。由上第三所证知必有$\alpha \in \Delta$。这表明$\Delta$满足定义 8（2）。

综上，Δ即为所求的极大足道集。

引理 2 如果Γ是 MPL 的极大足道集，则有：

（1）如果 $\alpha \notin \Gamma$，则对任一满足条件$\Gamma \subseteq \Delta$的极大足道集Δ都有 $\neg\alpha \in \Delta$。

（2）$\alpha \wedge \beta \in \Gamma$，当且仅当 $\alpha \in \Gamma$且 $\beta \in \Gamma$。

（3）$\alpha \vee \beta \in \Gamma$，当且仅当 $\alpha \in \Gamma$或 $\beta \in \Gamma$。

（4）$\alpha \to \beta \in \Gamma$，当且仅当对任一满足条件$\Gamma \subseteq \Delta$的极大足道集$\Delta$都有 $\alpha \notin \Delta$或 $\beta \in \Delta$。

证明：（1）设 $\alpha \notin \Gamma$。因为$\Gamma \vdash \alpha \vee \neg\alpha$，由于$\Gamma$是极大足道集，所以定义 8（2）得到 $\alpha \vee \neg\alpha \in \Gamma$，再据定义 8（3）由 $\alpha \notin \Gamma$便得到 $\neg\alpha \in \Gamma$。因此对任一满足条件$\Gamma \subseteq \Delta$的极大足道集Δ自然都有 $\neg\alpha \in \Delta$。

（2）设 $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$，则$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$，根据公理模式（4）和（5）可得$\Gamma \vdash \alpha$且$\Gamma \vdash \beta$，由$\Gamma$是极大足道集，故 $\alpha \in \Gamma$且 $\beta \in \Gamma$。另一方面，假设 $\alpha \in \Gamma$且 $\beta \in \Gamma$，则$\Gamma \vdash \alpha$且$\Gamma \vdash \beta$，根据公理模式（3）易得$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$，由$\Gamma$是极大足道集，故 $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$。

（3）设 $\alpha \vee \beta \in \Gamma$，由于$\Gamma$是极大足道集，故 $\alpha \in \Gamma$或 $\beta \in \Gamma$。另一方面，如果 $\alpha \in \Gamma$，则$\Gamma \vdash \alpha$，根据公理模式（7）可得$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$，由$\Gamma$是极大足道集，故 $\alpha \vee \beta \in \Gamma$。同理，根据公理模式（8）可得如果 $\beta \in \Gamma$，则）$\alpha \vee \beta \in \Gamma$。

（4）设 $\alpha \to \beta \in \Gamma$。对任一满足条件$\Gamma \subseteq \Delta$的极大足道集$\Delta$都有 $\alpha \to \beta \in \Delta$，因此$\Delta \vdash \alpha \to \beta$。如果还有 $\alpha \in \Delta$，则$\Delta \vdash \alpha$，所以有$\Delta \vdash \beta$，因为Δ为极大足道集，所以 $\beta \in \Delta$。另一方面，设 $\alpha \to \beta \notin \Gamma$。此时有$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash\!\!/ \beta$。（否则将有$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$，进而 $\alpha \to \beta \in \Gamma$）。根据引理 1 可知存在一极大足道集$\Delta$满足：$\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \Delta$并且$\Delta \vdash\!\!/ \beta$，因此 $\alpha \in \Delta$而 $\beta \notin \Delta$，并且$\Gamma \subseteq \Delta$。

定理 4 如果 $\models \alpha$，则 $\vdash \alpha$，即 MPL 相对于 L 框架具有完全性。

证明：假设 $\vdash\!\!/ \alpha$。令 $M=<W, R, V>$，其中 $W=\{w \mid w$ 是 MPL 的极大足道集$\}$，$R=\{<w_1, w_2> \mid w_1, w_2 \in W, w_1 \subseteq w_2\}$，V 是从 $Form(L) \times W$ 到$\{1, 0\}$中的一个映射，满足以下条件：$V(\alpha, w)=1$ 当且仅当$\alpha \in w$。

如果 $V(\alpha, w)=0$，那么 $\alpha \notin w$，由引理 2（1）得对任一满足条件 $w \subseteq w_1$，也即 wRw_1

的极大足道集 w_1 **都有** $\neg\alpha\in w_1$**，因此** V（α，w_1）=1。

V（$\alpha\wedge\beta$，w）=1 **当且仅当**$\alpha\wedge\beta\in w$ **当且仅当**$\alpha\in w$ **且**$\beta\in w$ **当且仅当** V（α，w）**且** V（β，w）=1。 V（$\alpha\vee\beta$，w）=1 **当且仅当**$\alpha\vee\beta\in w$ **当且仅当**$\alpha\in w$ **或**$\beta\in w$ **当且仅当** V（α，w）=1 **或** V（β，w）=1。 V（$\alpha\to\beta$，w）=1 **当且仅当**$\alpha\to\beta\in w$ **当且仅当对任一满足条件** $w\subseteq w_1$，**也即** wRw_1 **的极大足道集** w_1 **都有** $\alpha\notin w_1$ **或** $\beta\in w_1$，**即** V（α，w_1）=0 **或** V（β，w）=1，

对 L **的任意公式**α，W **中的任意两个元素** w_1，w_2，**如果** w_1Rw_2 **且** V（α，w_1）=1，**那么据** R **定义和** V **的定义有** $w_1\subseteq w_2$ **且** $\alpha\in w_1$，**于是有** $\alpha\in w_2$，**因此** V（α，w_2）=1。

因此 M **为一** L **模型，由假设** $\vdash\!\!/\alpha$**得则存在一极大足道集**$\Gamma\vdash\!\!/\alpha$。**因此**$\Gamma\in W$，**并且** $\alpha\notin\Gamma$。**据** M **定义有** V（α，Γ）=0。**因此** $\models\!\!/\alpha$。

参考文献：

［**1**］.张清宇.弗协调逻辑[M].北京：中国社会出版社.2003

［**2**］.冯棉.经典逻辑与直觉主义逻辑[M].上海：上海人民出版社.1989

［**3**］张清宇，郭世铭，李小五.哲学逻辑研究[M].北京：社会科学文献出版社.1997

［**4**］刘壮虎.逻辑演算[M].北京：中国社会科学出版社.1993

［**5**］Max Urchs. Recent Trends in Paraconsistent Logic［A］. W. Heinrich.Essays on the Non-Classical Logic［C］.World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd ,2003.

［**6**］Araham Priest, Richard Routley, Jean Norman. Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent［C］.Philosophia Verlag GmbH, München.,1989

A Minimal Paraconsistent Logic System

Yu Jun-wei

(Philosophy Department, Renmin University of China, Beijing,100872, China)

Abstract: We get a weaker paraconsistent logic system MPL than C_ω. by dleting (removing)$\neg\neg\alpha\to\alpha$ from C_ω.We. give a Kripkle semantics and prove that MPL is sound and complete with respect to the semantics.

Keywords: paraconsistent logic; sound; complete

收稿日期: 2004-06-01;

基金项目：国家社会科学基金项目《弗协调相干道义逻辑研究》(04CZX010)。

作者简介：余俊伟，1974 年生，男，汉族，江西安义人，中国人民大学副教授。