逻辑图：从古典到形式化的发展

刘新文

（中国社会科学院哲学研究所，　北京　100732）

摘要：　本文考察逻辑图从其古典形式走向形式化的发展历程。

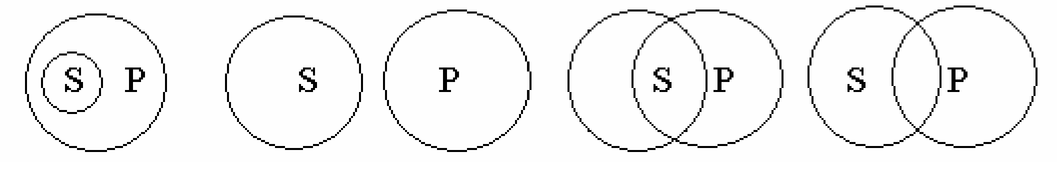
关键词：　逻辑图；图式逻辑；完全性

中图分类号：B81　**文献标识码：**A

图形在人类推理中扮演着非常重要的角色，是哲学、认知科学、心理学、计算机科学、人工智能、逻辑和数学等学科所共同研究的对象。逻辑图首先是为理解亚里士多德的范畴命题和三段论推理而发展起来的，其开端一般追溯到欧拉圈。在长期的历史发展过程中，经过莱布尼茨、欧拉、布尔、汉密尔顿、文恩和皮尔士等人的努力，逻辑图从最初的设想变成了现实、从最初的简单表述三段论发展成了关系逻辑和模态逻辑等的图式表示，而关系理论的建立是传统逻辑向现代逻辑转变的关键。当代的逻辑学家们更是在现代逻辑的基础上、运用现代逻辑的工具和技术形式化了逻辑图并把它运用到哲学、计算机科学和人工智能等领域，深刻地改变了许多重要的逻辑哲学概念，并提出了“图式逻辑（Diagrammatic Logic）”的新概念，为哲学逻辑增添了一个新的分支。

1　欧拉圈

至少在中世纪就有人用圆圈或封闭的曲线来表示古典三段论。1761 年，瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler，1707-1783）引入被后人称为“欧拉圈”的图形来表述三段论推理。在这一著作中欧拉用类似几何的方法通俗化了莱布尼茨图解逻辑关系的方案。这种方法对一般陈述句的外延（或类）解释特别注意，它既可以表示非空非全的类之间的关系，也可以解说三段论和表示直接推理。欧拉圈的基本形式以圆表示非空非全的类，即用圆表示三段论中词项的外延；圆中的点是类中的元素。欧拉圈是用两个圆的包含、排斥和交叉等拓扑性质来表示集合之间的包含、相异和相交关系的一种图解。也就是说，全称肯定命题（A）用一个圆包含另一个圆表示，全称否定命题（E）用两个互不相交的圆表示，而特称肯定命题（I）和特称否定命题（O）则用两个交叉的圆表示——前者把表示主词的字母写在交叉的区域，而后者把交叉区域留空，以此表示主词外延与谓词外延的交为空集。亚里士多德的四个范畴命题 A、E、I、O 的欧拉图解分别如下：



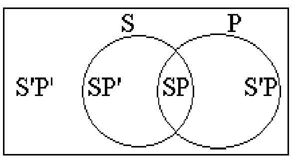
欧拉圈直观上相当清楚：圆之间的包含、相离表示全称，相交表示特称。在后面两个表

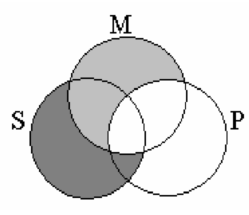
示特称命题的图中，圆中写有字母（比如 S）之处表示有某物属于 S。但是，欧拉圈不能表示全类和空类、不能表示补运算，这给表示涉及换质的直接推理带来困难。另外，欧拉圈的一个广为人知的缺陷在于，这一系统无法穷尽两个词项之间一切可能的关系：比如，所有事物或是 S 或是 P，等等。不过，在涅尔夫妇看来，穷尽一切可能关系倒不是欧拉的原意："在欧拉的逻辑学说中，空间图形的主要作用是使三段论原理从直观上看来一目了然，并没有想概括一切可能的外延关系。"[12]按照这一解释，上述缺陷也就消失了。但是，如果有需要，我们也想把这个系统扩张成一个表达一切可能关系的系统；从这一点上来看，欧拉圈系统还是有问题的：（1）在表示否定的特称命题的欧拉圈中，我们无法区分"有的 S 不是 P"和"有的 P 不是 S"；歧义性为逻辑学家所深恶痛绝。（2）与歧义性相关，矛盾命题的欧拉圈表示也出现了问题。在布尔代数中互相矛盾的命题以一种明显的方式表现出来，而在欧拉圈中，与肯定的全称命题和否定的全称命题相矛盾的两个命题都用一样的图表示出来。（3）我们可以通过处置欧拉圈来帮助我们解决有关于三段论推理的问题，但难于表示更复杂的推理关系。困难的根本在于，我们不能把多个图组合成一个图，并且有时还无法确定一个图应当如何转换。如我们无法把表示"所有 M 是 S"和"有的 M 是 P"的两个欧拉圈组合成一个从而检验"有的 S 是 P"是否是其结论。这个问题不仅出现在特称命题中，对于两个全称命题也有同样的情况。

如果说第一个问题可以通过表示主词和谓词的字母在图中出现的位置的不同而得到解决，而矛盾命题不必明显地表示出来，那么第三个问题可不那么容易。如果我们不能随意地把两个或更多的图结合在一起也不知道如何转换一个图，那么这样的系统在处理三段论演绎推理时就极其有限。欧拉圈的一部分困难将在文恩图中得到解决。

2 文恩图

1881 年，英国逻辑学家约翰·文恩（John Venn，1834~1923）在《符号逻辑》一书中使用了相交区域的图解（史称"文恩图"）来解释类之间或命题的真值之间的关系。文恩图的基本形式以矩形表示论域，矩形中的圆表示非空类；每一个圆把矩形分成两个类：任意一个类及其补类。文恩认为欧拉圈不能提供一种一般的方法在同一个图中表示两个类之间的更多关系。欧拉圈中的圆表示非全非空的类，圆之间的关系直接表示相应的类之间的实际关系，因而不能表示论域，也不能表示相应的类之间潜在的关系。为了克服欧拉圈这些表达方面的困难，文恩采用了一种"初始图"的办法。初始图表明了所涉及的类之间所有可能的关系，并且也不假定这些类一定都是非空的。下面左图就是涉及两个类 S 和 P 的初始图，表示了 S 和 P 之间所有可能的关系，其中把平面所划分成的四个区域表示了类 S、P、非 S（用 S′表示）和非 P（用 P′表示）相互之间四种可能的组合。





能否表示出类之间所有可能的关系，正是两种图解之差异所在，也是造成多个欧拉圈难以组合成一个图的根本原因。除了初始图外，文恩还利用在图的区域中加上阴影的语形办法来表示相应的类为空类。有了初始图和阴影这两种语形方面的准备，文恩图就可以用来验证换质推理和三段论的有效性。例如，上面右图就是第一格 AAA 的图解，其中 S、M 两圆连同深色阴影表示命题"所有 S 是 M"，M、P 两圆连同浅色阴影表示命题"所有 M 是 P"，把相应于这两个命题的阴影加到关于 S、M、P 的初始图中就得到 AAA 的图解。

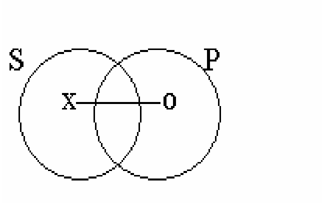
文恩图不同于欧拉圈的地方在于前者第一次用不同的区域表示所有可能的组合，并在各种区域中用记号表示：为使给定的命题成立，哪些组合必是空的，哪些组合不是。令人遗憾的是，文恩图跟欧拉圈一样也不能表示特称命题。后来的学者再给它添加其它的语形装置弥补了这一缺陷。

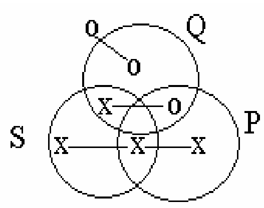
3　皮尔士-文恩图

1903 年，美国逻辑学家、哲学家皮尔士（C.S. Peirce，1839~1914）接受文恩对欧拉图的改进，并作了进一步的发挥，使得图的表达能力得到了提高，不仅可以表示特称命题而且可以进一步地表示选言的和联言的复合命题。经过皮尔士改进的图称为“皮尔士-文恩图”；所有的文恩图都是“皮尔士-文恩图”。在皮尔士-文恩图中，皮尔士在一个区域中画上符号“x”来表示该区域不空，并且用符号“o”代替文恩图中的阴影来断定一个区域为空区域。符号“x”和“o”可以用短线连接起来表示析取。单独一个“x”或者“o”也表示一条链。而在同一个皮尔士-文恩图中，由“x”和“o”组成的不同的链表示各条链的合取。例如，下图中左边的皮尔士-文恩图与句子“$SP'\neq\phi\vee SP'=\phi$”的意思相同，断定“或者有 S 是非 P 或者所有的 P 都是 S”。类似地，下图中右边的图形与句子

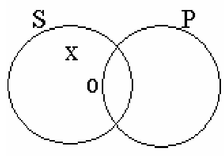
$$(SP'Q'\neq\phi\vee SPQ'\neq\phi\vee S'PQ'\neq\phi)\wedge(SP'Q\neq\phi\vee S'PQ=\phi)\wedge(S'P'Q'=\phi\vee S'P'Q=\phi)$$

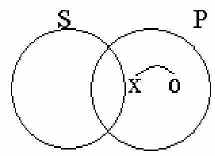
具有相同的意思；在这个合取式中第一个合取支由最下的一条链表示，第二个和第三个合取支分别由中间的和最上面的链表示。





一个图的某一个区域中如果同时出现没有用短线连接的“x”和“o”则该图断定了一个假命题，如下面左边的图形等于 $SP'=\phi\wedge SP'\neq\phi$；另一方面，如果其中的“x”和“o”被用短线连接了起来则断定了一个有效命题，如下面右边的图形断定了 $S'P=\phi\vee S'P\neq\phi$。





这样，所有的皮尔士-文恩图都可以找到一个与其等价的布尔公式；另一方面，所有的布尔公式也都可以用以上的皮尔士-文恩图表示出来。也就是说，在表达能力上皮尔士-文恩图等价于标准一阶逻辑的一元部分。当然，作为皮尔士-文恩图的一个对偶解释，“x”、“o”之间的连线也可以视为合取关系，而同一图中的各条链则被视为析取关系。这两种解释在语义上是等价的。

另外，皮尔士还引进了图形的变形规则，这些图形变形规则的使用完全像代数中的规则一样。皮尔士对逻辑图研究的一个重要贡献是他第一个讨论了图形的变形规则。这些规则为六条：1.“任何完整的断定指号（即一个叉、零或者叉和零的连接体）都可以被删除。”2.“对任何断定指号都可以为其添加新的指号。”3.“如果没有其它断定，任何许可的断定都

可以分开写成。”4.“一个指号在同一个区域中的不同出现，不管它们是否被联结在一起，都等价于一个出现；两个不同的指号在同一个区域中出现时，如果它们已经联结在一起，那么等价于没有任何指号出现，可以任意添加或删除它们，而如果它们各自分离则它们构成一个假命题；如果两个对立的指号在同一个区域中出现且一个与某个其它的指号如 P 联结在一起而另一个也与其它另外一个联结在一起，那么把其它两个指号联结起来，同时删除这两个对立者。”5.“任何表示词项的一条封闭曲线都可以被删除，只要满足以下条件：如果这样一来两个合并一起的区域包含有独立的零，那么可以联结这些零；如果被删除曲线的一边有一个零而由两个区域合并而成的区域不再包含其它独立的零，那么删除该零连同其所在的整个链。”6.“任何表示词项的一条封闭曲线都可以被添加到原来的图中；……如果该曲线穿过的区域包含有一个叉……那么应该添加一个新的叉使得添加的曲线位于这两个叉之间，不管原来的叉是不是位于其它链上。如果新的曲线穿过的区域包含有一个零，那么应该复制一个包含该零的整个链不与原来的链联结，而且使得两个零分别位于新添曲线两边。”[14]

实际上，皮尔士的这些规则在运用时相当于经典命题逻辑的消解（Resolution）证明程序。当然，它们还不是完善的。

4 图式逻辑

20 世纪 90 年代以前，皮尔士-文恩图并没有得到研究，欧拉圈由于其明显的缺陷也一直很少得到重视，而对文恩图的使用和研究却一直在进行。我们在前面已经看到，文恩图中所有表示词项的封闭曲线都必须两两相交。当讨论的词项的数量少于 5 时，其文恩图一般都很容易就能够画出；但是，当讨论的词项的数量为 5 或更多时是否可以画出其文恩图？对于这一问题文恩本人只从直观上作了肯定回答。[24]1959 年摩尔在《符号逻辑杂志》上给出了对任意多个两两相交的文恩图的一个拓扑构造方法；1965 年安德森和克里夫尔在同一杂志上给出了更直观的构造方法。这两个数学归纳证明为文恩图在后来的发展起了重要的作用。与此同时，20 世纪 60 年代，人们开始重新发现皮尔士的‘存在图（Existential Graphs）’。存在图是皮尔士对关系逻辑的图式表示。逻辑图与其表示的对象之间有某种一致性。在皮尔士看来，逻辑的目的不是发展一种有效的演算使得结论可以迅速而容易地从前提得出，逻辑的准确任务是尽可能逼真地、以一种“镜像（icon）”的方式来清楚地把推理的最基本的、元素性的构成成分分析并展示出来。文恩图既不能表示存在命题，也不能表示析取信息，更不能表示关系词的逻辑。因此，在改造文恩图的同时，皮尔士费十年（1886-1896）之功，运用自己在拓扑和图论中的研究发展出了自己的逻辑图式系统——存在图。存在图系统是可以在其上进行逻辑转换运算的一类图，每一个基本的运算都是在一个表示论域的任意平面上画上图的一个部分或擦掉图的一个部分。这是一个包罗广泛的系统，在这个系统中皮尔士相信任何可以想象得到的断言或逻辑论证都可以给出其几何表达式，“存在”一词即是指这种图在描述任何可能论域中的任何方面的任何存在状态的力量。存在图系统由 Alpha 图、Beta 图和 Gamma 图三个部分组成，各个部分都有自己初始的构图符号以及操作这些图的保真的图形转换规则，从而各自形成了一个证明系统，具有与经典命题演算、带等词的一阶谓词演算以及模态逻辑和高阶逻辑相同的表达能力。存在图的初始指号只有三个：一条表示否定的封闭曲线、一条既表示个体变元又表示存在量词的恒等线和一条表示“可能不”的封闭虚线。两个图的并置表示两者的合取。与那些公认的逻辑成就相比，皮尔士认为逻辑的图式化研究才是自己对于逻辑的最重要的工作，在自己最后的二十年中，贯注了他在逻辑方面的主要精力，1903 年他更是把这一图式系统称为“我的杰作（My Chef D′oeuvre）”。[14]齐曼（J. Zeman）1964 年的博士论文《皮尔士图的逻辑》和 1973 年罗伯茨（D.D. Roberts）在 1963 年博士论文基础上出版的《皮尔士的存在图》是从现代逻辑角度对存在图进行的开拓性研究。[16][26]但是，存在图的重要性直到计算机表示的图示推理得到发展后才得以确认。1984 年，索瓦（J.F. Sowa）在存在图的基础上创造出作为知识表示的概念图（Conceptual Graphs）系统，这一系统现在被全世界的计算机科学家作为一种知识表示模式应用于人工智能领域。

[21][22][27]

20 世纪 90 年代，对图的逻辑研究取得了长足进展。

1990 年，美国逻辑学家巴威思（J. Barwise，1942-2000）在印第安那大学建立跨学科研究的“可视推理实验室（VIL）”，认为可视表示信息（图式信息）一样可以从事弗雷格及其追随者们使用语言信息进行的有效推理。[4]1994 年，英国逻辑学家多夫·盖贝（Dov M. Gabbay）主编的《什么是一个逻辑系统？》一书出版。书中提到了 15 个关于“逻辑系统”的定义，其中巴威思和哈默（E.R. Hammer）认为：现在我们要定义的逻辑系统不仅应该包括大多数现有的系统，而且还要包括将要建立的系统。所以他们采取了一种尽可能宽泛的定义：“一个逻辑系统是非形式推理活动以及支持这些活动的已有的（或者可能的）直观推理后承关系的一个数学模型。”这种数学模型是对非形式推理活动的一种理想化，可以是语义的，也可以是语形的，具有多样性。对同一种推理活动，可以有不同的刻画。例如，不同的一阶逻辑系统有公理化系统、自然推演系统、表列系统、矢列系统等。巴威思和哈默还认为，形式刻画的系统还可以包括图式系统和异质系统（heterogeneous systems）。图式系统包括文恩图系统、欧拉圈系统、存在图系统等，异质系统既包括像公式那样的语言元素，也包括像图、表、列那样的非语言元素，如超证明系统（heyperproof systems）、图形系统（chart systems）和语句与文恩图混合的系统。[3][7]在巴威思这些思想的指导下，同一年，S.J.辛（Sun-Joo Shin）用现代逻辑的方法建立起了可靠而完全的文恩图系统。文恩图的这一新理论把文恩图构造成一个现代的形式系统，给出了严格的合式图定义、严格的塔尔斯基语义以及适用于文恩图的变形规则，并且证明了关于有限图集的完全性结果。[18]这一完全性结果随即得到了进一步的完善，被推广到一般的情形。[1] 1995 年哈默严格按照现代逻辑的工具和技术建立了欧拉圈系统的一个形式化，包括句法、语义和元逻辑研究，给出了欧拉圈的一个形式系统及其完全性证明。[11]同时，皮尔士为改造文恩图而提出的推演规则也得到了完善，现代形式的皮尔士-文恩图理论在文恩图的新理论上建立起来。[8]与此同时，存在图也得到了广泛的研究。[19][22][27]

逻辑研究有效推理。一个推理是有效的是因为结论所传达的信息与前提所传达的信息之间的必然关系，而传达这些信息的媒介不一定就是语言。日常推理是运用语句、图形甚至声音、气味等多种信息进行的多模态（multi-modal）推理，对这些多模态表示系统和推理的研究已经成为心灵哲学、认知科学、逻辑和计算机科学等领域的交叉地带，而关于逻辑图的这些工作把“图式逻辑”纳入哲学逻辑做了理论上的铺垫。2001 年，由多夫·盖贝和冈瑟纳（F. Guenthner）主编的、计划 18 卷的《哲学逻辑手册》第二版（*Handbook of Philosophical Logic*, 2nd Edition）开始出版，“图式逻辑”作为专门的一章出现在 2002 年出版的第四卷中。图式逻辑是刻画图形系统的语法、语义和证明论等的一个逻辑，其中的图形系统在目前主要包括欧拉圈、文恩图、皮尔士-文恩图、存在图、流程控制图、线图、电路图、范畴论图、哈斯（Hasse）图、概念图和几何图等。图型（type）在语法上具有二维特征，而它们的意义则可以通过模型论或代数得以刻画。图式逻辑系统主要以图形为对象，除此之外，它们与一般的逻辑系统并无根本的区别：两者都要对一类需要研究的表达式、表达式的意义以及表达式的运用和目的进行充分的刻画。

至此，逻辑图最终完成了它向形式化的转变，成为现代逻辑的一个分支。

5　结束语

在数学和逻辑领域，由来已久的观点是，图形仅仅是一种直观的教学辅助工具，精确的数学推理和逻辑演算根本就无法用图形来模拟。皮尔士的革命性思想不仅克服了逻辑图的重大缺陷，而且为逻辑图打开了一个新的天地：存在图是在现代意义上可靠的和完全的图式逻辑系统。换句话说，在现代逻辑草创时期，逻辑图就已经具备了与符号系统同样的表达能力，应该具有与符号系统同样的逻辑地位。不过，在其历史发展过程之中，随着表达能力的逐步

提高，特别是由于对否定的表示，逻辑图的直观性程度也在逐步降低，用弗雷格在《思想》中的话说，“ 科学越是严格，就越是枯燥 ”。 [28]

参考文献

[1] Allwein, G. & J. Barwise, eds. Logic Reasoning with Diagrams [N], Oxford University Press, 1996.

[2] Anderson, D.E. & F. L. Cleaver. Venn-type diagrams for arguments of *n* terms [J]. Journal of Symbolic Logic 30, 1965.

[3] Barwise, J. & E. M. Hammer. Diagrams and the Concept of Logical System [J]. in Dov M. Gabbay, ed., What is a Logical System?, Oxford University Press, 1994.

[4] Barwise, J. & J. Etchemendy. Visual Information and Valid reasoning [J]. in Visualization in Teaching and Learning Mathematics, Mathematical Association of America, 1991.

[5] Euler, L..Lettres à une Princesse d'Allemagne [M]. St. Petersburg, 1768. Translated by Sir David Brewster.

[6] Euler, L.. Letters of Euler to a German Princess, with a new introduction by Andrew Pyle [M]. 2 vol.s, Thoemmes Press, 1997.

[7] Gabbay, D. M., ed.. What is a Logical System? [M]. Clarendon Press, 1994.

[8] Gabbay, D. M. & F. Guenthner, eds.. Handbook of Philosophical Logic [M]. 2nd ed., Vol.4, Kluwer, 2002.

[9] Gardner, M.. Logic Machines and Diagrams [M]. McGraw-Hill Co. Inc., 1958.

[10] Haack, S. Philosophy of Logics [M]. Cambridge University Press, 1978.

[11] Hammer, E.M. Logic and Visual Information [M]. CSLI Publications, 1995.

[12] Kneale, W., & Kneale, M.. The Development of Logic [M]. Clarendon Press, 1962, 1988.

[13] Moor, T. Jr. . On the construction of Venn diagrams [J]. Journal of Symbolic Logic 24, 1959.

[14] Peirce, C. S.. Collected Papers of C.S. Peirce [M]. vols. 4, book 2, ed., Charles Hartshorne and Paul Weiss, Cambridge: Harvard, 1933.

[15] Quine, W.V.O.. Selected Logic Papers [C]. enlarged ed., Harvard University Press, 1995.

[16] Roberts, D.D. The Existential Graphs of Charles S. Peirce [M]. The Hague: Mouton, 1973.

[17] Shin, S-J. Peirce and the Logical Status of Diagrams [J]. History and Philosophy of Logic 15, 1994, pp.45-68.

[18] Shin, S-J. The Logical Status of Diagrams [M]. Cambridge University Press, 1994.

[19] Shin, S-J. The Iconic Logic of Peirce's Graphs [M]. The MIT Press, 2002.

[20] Shin, S-J & E. Hammer. Euler's Visual Logic [J]. History and Philosophy of Logic 19, 1998.

[21] Sowa, J.F.. Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine [M]., Addison-Wesley, Reading, 1984.

[22] Sowa, J.F.. Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations [M]. Brooks/Cole, 2000.

[23] van Heijenoort, J., ed.. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 [C]. Harvard University Press, 1966.

[24] Venn, J.. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings [J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 9, 1880.

[25] Venn, J.. Symbolic Logic [M]. MacMillan, London 1881, 2nd ed., 1894. Reprinted by Burt Franklin, 1971.

[26] Zeman, J. J.. The Graphical Logic of C. S. Peirce [D]. Doctoral Dissertation, University of Chicago, 1964.

[27] Øhrstrøm, P. & P. Hasle. Temporal Logic - From Ancient Ideas to Artificial Intelligence [M]. Kluwer Academic Publishers, 1995.

[28] 弗雷格. 弗雷格哲学论著选辑 [M]. 王路 译，北京：商务印书馆，1994。

[29] 威廉·涅尔，玛莎·涅尔. 逻辑学的发展 [M]. 张家龙，洪汉鼎 译，北京：商务印书馆，1985。

[30] 张清宇 等. 逻辑哲学九章 [M]. 南京：江苏人民出版社，2004。

Logic Diagrams: From Ancient Ideas to Formalism

LIU Xin-wen

(Institute of Philosophy, Chinese Academy of Social Sciences, Beijing 100732, China)

Abstract： This paper presents a view about the evolution of the logic diagrams.

Key words： logic diagrams; diagrammatic logic; completeness

收稿日期： 2004-05-19

作者简介： 刘新文（1972-），男（汉族），江西莲花人，中国社会科学院哲学所助理研究员，哲学博士，研究方向：符号逻辑。