一阶逻辑的一个表列系统

张清宇

（中国社会科学院哲学所， 北京 100732）

摘要： 本文把系统Z的括号记法推广到一阶情形，建立了一阶逻辑的一个表列系统。

关键词： 括号记法；一阶逻辑；表列系统

中图分类号：B81 **文献标识码：**A

在本文中，我们的形式对象语言 L 是一个任意固定的一阶语言。我们的论述将从它的初始符号开始。

1 初始符号

一阶语言 L 的初始符号划分成下述四类：

（1）可数无穷多个（个体）变项：

$$v_1，v_2，v_3，\cdots，v_n，\cdots；$$

这里所表明的次序叫做它们的字母表顺序。

（2）对各个自然数 n，有一组 n 元函项符。这些组相互不相交，而且有些组或所有组还可以是空的。0 元函项符叫做（个体）常项。

（3）对各个正自然数 n，有一组 n 元谓词符。这些组互不相交，但至少有一组不空。

（4）逗号、分号和左右方括号： ， ； [ ]。

可以指定一个具体的二元谓词符=为等号；在此情形下，L 也将被称为带等词的语言。我们规定，当 L 至少有一个并非常项的函项符时，L 一定是带等词的语言。函项符和谓词符统称外逻辑符（extraLogicaL symboLs），等号和其它初始符统称逻辑符。

等号“＝”和变项符等应看作句法常项（syntactic constant），属于元语言。“＝”不应被看作 L 中的等号，而是表示 L 中的等号的句法常项。同样，“v_1”是表示 L 的第一个变项（按字母表次序来看）的句法常项。初始符号也许根本就没有什么书写形式。

注意“＝”和“=”之间的区别，前者是元语言中等号的名字，而后者则对象语言中的等号，当然二者都在元语言中。

两个不同的一阶语言在逻辑符方面的差异是非本质的，因而假定所有一阶语言都拥有同样的逻辑符将不失一般性。对于带等词的语言，不妨假定它们都拥有同样的等号。

2 符

符就是由初始符号组成的有穷序列。对我们有意义的有两类符：项和公式（简称式）。

项是根据下述两个规则构造起来的符：

（1）（个体）变项都是项；

（2）若f是 n 元函项符并且 t_1，t_2，…，t_n都是项，则符$f t_1 t_2 \cdots t_n$亦是项。

在项$f t_1 t_2 \cdots t_n$中，t_1、t_2、…、t_n依次被称为它的第一个变目、第二个变目、…、第 n 个变目。当 $n = 0$ 时，规则（2）表明（个体）常项亦都是项。

项 t 的复杂度 degt 是指 t 中出现的函项符的总数。

公式是根据下述两个规则构造起来的符：

（1）若 P 是 n 元谓词符并且 t_1，t_2，…，t_n都是项，则符 $Pt_1t_2 \cdots t_n$是公式；这样的公式被称为原子公式（简称原子式）；当 P 是等号=时，原子公式$=t_1t_2$也叫作等式，可按通常方式记为 $t_1=t_2$，t_1为它的左侧，t_2为它的右侧；

（2）若 x_0，x_1，…，x_{m-1}是任意 m 个不相同的（个体）变项并且β_0，β_1，…，β_{n-1}是任意 n 个公式，则符$[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}]$亦是公式；这样的公式叫作特称析舍式（具体地说是，$\beta_0$，$\beta_1$，…，$\beta_{n-1}$经 x_0，x_1，…，x_{m-1}的特称析舍），x_0，x_1，…，x_{m-1}依次被称为它的第 1 个量化变项、第 2 个量化变项、…、第 m 个量化变项，这些量化变项的辖域一直到β_{n-1}末；β_0，β_1，…，β_{n-1}统称为它的析舍支，依次为第 1 个、第 2 个、…、第 n 个析舍支。当 m =0 或 n =0 时，$[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}]$将简记成$[\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}]$或$[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}]$。我们约定以粗黑体 **x** 表示序列‘$x_0$，$x_1$，…，$x_{m-1}$’、粗黑体**b**表示序列‘$\beta_0$，$\beta_1$，…，$\beta_{n-1}$’，则特称析舍式$[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}]$可简记成$[\mathbf{x}; \mathbf{b}]$。类似地，我们约定：当一序列由白体字母附带下标显示时，该字母的粗黑体表示该序列本身。例如，序列 u_0，…，u_{m-1}可简记为 **u**；序列 a_0，…，a_{n-1}可简记为 **a**。

公式α的复杂度 degα是指出现在α中的左括号及（个体）变项的总数。由于括号在公式中成对出现，公式中的左括号总数也就是出现在该公式中的括号对的总数。

项和式统称为言（或叫词语、表达式）（expression）。

3　基本语义

一阶语言当得到适当解释时，可以用来“讨论”数学结构（或叫一阶结构）。

对 $n \geq 1$，类 A 上的一个 n 元运算是指从 A^n到 A 的一个映射。f是 A 上的一个 n 元运算，当且仅当，f是 A 上的一个 n+1 元关系，使得对任意的 a_1，a_2，…，$a_n \in A$，有唯一的 $a \in A$ 满足$\langle a_1, \cdots, a_n, a\rangle \in f$。A 上的 0 元运算是指 A 的元素。

一个数学结构（或叫一阶结构）就是由下述成分组成的一个复合实体 U：

（1）一个非空集合 U，被称为 U 的个体域或论域，U 中的元素被称为 U 的个体；

（2）U 上的一组运算；被称为 U 的基本运算；

（3）U 上的一组关系，该组不空；被称为 U 的基本关系。

0 元基本运算是 U 中的元素，被称为 U 的特指个体。

结构论观点（StructuraList view）认为，数学本质上就是研究这些结构。

就本身而言，L 是无意义的，它的项和式也不表达什么，都是一些无意义的符，是根据句法规则组合而成的初始符号序列。一阶语义将给这些符以意义。

L 的一个解释（或结构）是由下述三个成分组成的一个三元序组 U：

（1）一个非空集合 U，被称为 U 的个体域或论域，U 中的元素叫作个体；

（2）一个映射，为 L 的各个函项符f指定 U 上的一个运算f^U；特别地，对 L 中的常项 c

指定 U 中的个体 c^U。形如f^U的运算叫作 U 的基本运算，形如 c^U 的个体叫作特指个体；

（3）一个映射，为 L 的各个谓词符 P 指定 U 上的一个关系 P^U，使得 P 和 P^U 的元数相同；形如 P^U 的关系叫作 U 的基本关系。当 L 有等号=时则$=^U$为 U 上的恒等关系 id_U＝{(u，u)：u∈U}。

L 的一个赋值（vaLuation）σ是由 L 的一个解释 U 和一个映射组成的序对，该映射为 L 的各个（个体）变项 x 指定 U 中的一个个体 x^σ。这个 U 被称为σ的基础结构，也称σ以 U 为基础，σ的论域是指 U 的个体域 U；对于 L 的各个函项符f和谓词符 P，我们令$f^\sigma =_{df} f^U$，$P^\sigma =_{df} P^U$。

若σ是一个赋值且 u 是它的论域中的一个个体，则σ(x/u)是指这样的赋值：它的基础结构同于σ的，并且对所有不同于 x 的变项所指定的值与σ的相同，但 $x^{\sigma(x/u)}$＝u。我们称σ(x/u)为σ的 x-变异。更一般地，当 u_0，u_1，…，u_{m-1}都是个体并且对任意 i，j＜m，若 x_i＝x_j则 u_i＝ u_j时，σ(x_0/u_0，…，x_{m-1}/u_{m-1})是指除在 x_0，…，x_{m-1}处的值分别为 u_0，…，u_{m-1}外而与σ相同的赋值。

下述的基本语义定义（BSD）在一阶语义中具有中心的重要地位。它由塔斯基于 1933 年明确表述，不过，在此以前很久就已经被不言而喻地加以引用。

基本语义定义（BSD）

令σ是以 U 为论域的一个赋值。

（1）若 x 是变项，则 x^σ 已有定义；

（2）若f是 n 元函项符，并且 t_1，t_2，…，t_n都是项，则

$$(f t_1 \cdots t_n)^\sigma = f^\sigma t_1^\sigma \cdots t_n^\sigma;$$

（3）若 P 是 n 元谓词符，并且 t_1，t_2，…，t_n都是项，则

$$(Pt_1t_2\cdots t_n)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{当}\langle t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma\rangle \in P^\sigma\text{时，} \\ 0 & \text{否则；} \end{cases}$$

特别有，

$$(s=t)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{当 } s^\sigma=t^\sigma\text{ 时，} \\ 0 & \text{否则；} \end{cases}$$

（4）

$$([x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}])^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{当有 } u_0, \cdots, u_{m-1}\in U \text{ 和某个 } i<n \text{ 使得 } (\beta_i)^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=0 \text{ 时，} \\ 0 & \text{否则；} \end{cases}$$

特别地，当 m＝0 时有

$$([\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}])^\sigma = 0\text{，当且仅当，}(\beta_0)^\sigma = \cdots = (\beta_{n-1})^\sigma = 1\text{。}$$

定义

1. 若φ是公式且赋值σ使得$φ^σ=1$，则称σ满足φ，记成σ ⊨φ；若赋值σ满足公式集Φ中任一公式，则称σ满足Φ，记成σ ⊨Φ；

2. 若公式α为任一赋值所满足，则称α为逻辑真（或逻辑有效），记成⊨α；

3. 若满足公式集Φ的任一赋值也一定满足α，则称α为Φ的逻辑后承，记为Φ ⊨α；Φ∪{φ}⊨α可简记成Φ,φ ⊨α；

4. 若公式集Φ为某个赋值所满足，则称Φ为可满足的；若Φ不为任一赋值所满足，则称Φ为不可满足的，记成Φ ⊨ ；

5. 若α ⊨β且β ⊨α，则称α与β逻辑等值，记成α≡β。

常见的联结词和量词可以定义如下：

1.α∧β$=_{df}$[[α，β]]；2.α∨β$=_{df}$[[α]，[β]]；3.∼α$=_{df}$[α]；

4.α→β$=_{df}$[α，[β]]；5.α? β$=_{df}$[[α，β]，[[α]，[β]]]；

6.∃xα$=_{df}$[x；[α]]；7.∀xα$=_{df}$[[x；α]]。

不难验证，在 BSD 下这些联结词和量词有通常的意义。

称一公式β为一公式α的一个子公式，是指β作为α的一个相继连续的部分出现。BSD 的一个鲜明的特征是，并非原子的公式α在赋值σ下的值$α^σ$由它的某些子公式在σ和某些其它赋值下的值所决定。因此，假定公式β′使得β′≡β并且令α′是将β在α中的某个出现换成β′而得的结果，则α′≡α。

4　变项的自由出现和约束出现

称两赋值σ和τ在变项 x（或函项符f、或谓词符 P）上为一致的（agree），是指σ和τ有相同的论域并且 $x^σ=x^τ$（或$f^σ=f^τ$、或 $P^σ=P^τ$）。

定理　如果两赋值σ和τ在所有出现在项 t 的函项符和变项上都一致，则 $t^σ=t^τ$。

证明：施归纳于 degt 上。□

不含变项的项被称为闭项。若 t 是闭项且 U 是一个结构，则对于任两个以 U 为基础的赋值σ和τ都有，$t^σ=t^τ$。因此对闭项 t，我们可定义 $t^U=_{df}t^σ$，这里σ是某个以 U 为基础的赋值。

一变项在一公式中的出现有约束和自由之分，两种出现对于公式在赋值下的值有不同影响。约束出现和自由出现的定义如下。

定义

一变项 x 在一公式α中的出现分成互不相交的两种：自由出现和约束出现；这两种出现的递归定义如下：

（1）如果α是原子公式，则 x 在α中的所有出现都是自由的；

（2）当α＝$[x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}]$时，若 $x \in \{x_0, \cdots, x_{m-1}\}$，则 x 在α中的所有出现都是约束的；但若 $x \notin \{x_0, \cdots, x_{m-1}\}$，则 x 在α中的一个出现是自由的，当且仅当，该出现在$\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$之一中是自由的。

当一变项 x 在一公式α中有自由出现时，则称 x 在α中是自由的。所谓一公式的自由变项，是指在该公式中自由的变项。

定理　令α是公式，并且令赋值σ和τ在α的所有外逻辑符及自由变项上是一致的。那么$\alpha^\sigma=\alpha^\tau$。

证明：施归纳于 deg α上进行。有两种情形要分别处理。

情形 1：α是原子公式，设为 $Pt_1t_2\cdots t_n$。则有

$$
\begin{aligned}
\alpha^\sigma=1 &\Leftrightarrow \langle t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma\rangle \in P^\sigma && \text{(BSD)}\\
&\Leftrightarrow \langle t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma\rangle \in P^\tau && \text{(前提)}\\
&\Leftrightarrow \langle t_1^\tau, t_2^\tau, \cdots, t_n^\tau\rangle \in P^\tau && \text{(归纳假设)}\\
&\Leftrightarrow \alpha^\tau=1
\end{aligned}
$$

情形 2：α是特称析舍式，设为$[x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}]$。此时，对于任一 $i<n$，σ和τ在β_i的所有外逻辑符上是一致的，因为这些外逻辑符都出现在α中。α的任一自由变项必在某个β_i($i<n$)中是自由的，但公式$\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$中还可以有另外的自由变项，也就是$x_0, \cdots, x_{m-1}$。σ和τ在 $x_0, \cdots, x_{m-1}$上虽不一定是一致的，但如果取定 $u_0, \cdots, u_{m-1}$为 U 中成员，则$\sigma(x_0/u_0, \cdots, x_{m-1}/u_{m-1})$和$\tau(x_0/u_0, \cdots, x_{m-1}/u_{m-1})$在 $x_0, \cdots, x_{m-1}$上是一致的，并且对于任一 $i<n$ 它们在β_i的所有外逻辑符及自由变项上也都是一致的。因此，根据归纳假设我们有

$$\beta_i^{\,s(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=\beta_i^{\,t(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})},\qquad i=0,\cdots,n-1。$$

所以，

$$
\begin{aligned}
\alpha^\sigma=1 &\Leftrightarrow \text{对某个 } u_0, \cdots, u_{m-1}\in U \text{ 和某个 } i<n,\ \beta_i^{\,s(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=0 && \text{(BSD)}\\
&\Leftrightarrow \text{对某个 } u_0, \cdots, u_{m-1}\in U \text{ 和某个 } i<n,\ \beta_i^{\,t(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=0 && \text{(归纳假设)}\\
&\Leftrightarrow \alpha^\tau=1 && \text{(BSD)}\ \square
\end{aligned}
$$

由此定理可知，如果公式α没有自由变项（以至于变项在其中的出现都是约束的）并且赋值σ和τ以同一结构为基础，那么$\alpha^\sigma=\alpha^\tau$。

定义　如果一个公式没有自由变项，则称该公式为句子（简称句）。如果α是句子，U 是结构，并且α为某个以 U 为基础的赋值所满足，则称α在 U 中成立（或得到满足），也称 U 为α的模型，记成 U ⊢α。

令Φ是一个句子集（即，由句子组成的集合）。如果Φ中任一句子都在 U 中成立，则称 U 为Φ的模型。

关于逻辑等值，我们有下述结论：如果 x_0，…，x_{m-1}在β中都不是自由的，那么有

$$[x_0，…，x_{m-1}；\beta_0，…，\beta_{n-1}，\beta]\equiv[[[x_0，…，x_{m-1}；\beta_0，…，\beta_{n-1}]]，\beta]$$

和

$$[[x_0，…，x_{m-1}；[\beta_0，…，\beta_{n-1}，\beta]]]\equiv[[x_0，…，x_{m-1}；[\beta_0，…，\beta_{n-1}]]，\beta]，$$

从而有$[x；\alpha，\beta]\equiv[[[x；\alpha]]，\beta]$和$[[x；[\alpha，\beta]]]\equiv[[x；[\alpha]]，\beta]$（即，$\exists x[\alpha，\beta]\equiv[\forall x\alpha，\beta]$、$\forall x[\alpha，\beta]\equiv[\exists x\alpha，\beta]$）。

5　代入

代入只是一种句法运算，它把一变项在一给定公式或项中的出现换成项的出现。下面，我们先讨论在项中进行的代入，然后再过渡到在公式中的代入。

定义　令 s 是一个项。对任意变项 x 和任意项 t，项 s{x/t}的递归定义如下：

（1）x{x/t}=t，y{x/t}=y，这里 y 是不同于 x 的变项；

（2）若 $s=f s_1\cdots s_n$，这里f是 n 元函项符，s_1，…，s_n都是项，则

$$s\{x/t\}=f s_1\{x/t\}\cdots s_n\{x/t\}。$$

有关 s{x/t}的最重要的事实是它的语义行为：它在一赋值σ下的值如何依赖于 s、x、t 和σ。

一般情况下，s{x/t}和 s 是两个不同的项，所以我们不能期望$(s\{x/t\})^\sigma$跟 s^σ一定相同。但是，s{x/t}跟 s 的区别就在于 x 在 s 中所占的位置为 t 所占，因此我们有理由指望$(s\{x/t\})^\sigma$相同于 s 在赋值$\sigma(x/t^\sigma)$下的值，即$(s\{x/t\})^\sigma=s^{s(x/t^s)}$。

定理 1　对一切 s、x、t 和σ有，

$$(s\{x/t\})^\sigma=s^{s(x/t^s)}。$$

证明：施归纳于上进行。degs 有三种情形需要处理：

（1）s 是变项 x。则$(s\{x/t\})^\sigma=(x\{x/t\})^\sigma=t^\sigma$；另一方面，我们有 $s^{s(x/t^s)}=x^{s(x/t^s)}=t^\sigma$。所以，$(s\{x/t\})^\sigma=s^{s(x/t^s)}$。

（2）s 是不同于 x 的变项 y。则有$(s\{x/t\})^\sigma=(y\{x/t\})^\sigma=y^\sigma$；另一方面，我们有 $s^{s(x/t^s)}=y^{s(x/t^s)}=y^\sigma$。所以，$(s\{x/t\})^\sigma=s^{s(x/t^s)}$。

（3）s 是$f s_1\cdots s_n$，则有

$$\begin{aligned}(s\{x/t\})^\sigma &= (f s_1\cdots s_n\{x/t\})^\sigma\\ &= (f s_1\{x/t\}\cdots s_n\{x/t\})^\sigma\\ &= f^\sigma(s_1\{x/t\})^\sigma\cdots(s_n\{x/t\})^\sigma\\ &= f^\sigma(s_1^{s(x/t^s)})\cdots(s_n^{s(x/t^s)})\\ &= f^{s(x/t^s)}s_1^{s(x/t^s)}\cdots s_n^{s(x/t^s)}\end{aligned}$$

$= (f s_1 \cdots s_n)^{s(x/t^s)}$。□

此定理表明，$s\{x/t\}$的定义是正确的，达到了预先想要的语义效果。关于公式，要想有同样的效果就不那么容易了，原因主要在于变项在公式中的出现有自由和约束两种。克服这一困难的过程可以概述如下。

首先，当对α中的 x 代入 t 时只用 t 替换 x 在α中的自由出现。这样做的理由就在于，α^σ依赖于 x^σ 是因为 x 在α中有自由出现。此外，如果用 t 替换 x 在α中的所有出现，那么所产生的结果也许根本就不是一个公式。只有 t 本身是一个变项时，用 t 替换 x 在α中的约束出现才可能产生公式。

那么能否将$\alpha\{x/t\}$定义为用 t 替换 x 在α中的所有自由出现所产生的结果呢？答案是不能。当α的某个量化变项 y 出现在 t 中并且 x 落入 y 的辖域中时，如果直接以 t 替换 x 的这样的出现，那么 y 在新公式中所产生的出现就被俘虏了（即，成为 y 的约束出现)。因此，当 t 中的变项在代换后发生被俘现象时，等式$(\alpha\{x/t\})^\sigma=\alpha^{s(x/t^s)}$就不会成立。被俘现象并不总能发生，因此为了保证那个等式成立，我们可以分阶段来定义$\alpha\{x/t\}$，首先就不发生被俘现象时的情形进行定义，然后再处理一般情形。

定义　如果 x 在α中的任一自由出现都没有落入出现于 t 的变项的量化辖域，则称 t 对α中的 x 是可代入的（或叫自由的)；此时，我们定义$\alpha\{x/t\}$为将 x 在α中的所有自由出现同时换成 t 而得的结果。

由此定义可知，如果 t 对α中的 x 是可代入的，则 t 中的自由变项在代入后是$\alpha\{x/t\}$的自由变项，这也就是说 t 的自由变项不会因代入而被俘。施归纳于 deg α上，我们也可以更严格地作出上述定义：

（1）如果α是原子公式 $Ps_1\cdots s_n$，则 t 对α中的 x 是可代入的；此时，$\alpha\{x/t\}$定义为 $Ps_1\{x/t\}\cdots s_n\{x/t\}$。（这里，对于 n=2，P 也可以是等号=。）

（2）如果α是特称析舍式$[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$，那么 t 对α中的 x 是可代入的，当且仅当下述条件之一成立：

(a）x 在α中不是自由的；

(b）x 在α中是自由的(从而，特别地有 $x\notin\{x_0,\cdots,x_{m-1}\}$)，对每一个 $i<n$ 而言，t 对β_i中的 x 可代入，并且 $x_0,\cdots,x_{m-1}$都不出现在 t 中。

在情形（a）下，$\alpha\{x/t\}$定义为α；而在情形（b）下，$\alpha\{x/t\}$定义为

$$[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0\{x/t\},\cdots,\beta_{n-1}\{x/t\}]。$$

易见，如果出现在 t 中的任一变项都不在α中约束出现，则 t 对α中的 x 是可代入的。另外，x 对α中的 x 总是可代入的，并且有$\alpha\{x/t\}=\alpha$。当 t 中没有不同于 x 的变项时，t 对α中的 x 也总是可代入的。

定理 2　如果 t 对α中的 x 是可代入的，那么对每一个赋值σ有，

$$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=\alpha^{s(x/t^{s})}。$$

证明：施归纳于 deg α。有三种情形要分别处理。

（1） α是原子公式 $Ps_1\cdots s_n$。此时，$\alpha\{x/t\}= Ps_1\{x/t\}\cdots s_n\{x/t\}$。因此有

$$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=1 \Leftrightarrow \langle (s_1\{x/t\})^{\sigma}, \cdots, (s_n\{x/t\})^{\sigma}\rangle \in P^{\sigma}$$

$$\Leftrightarrow \langle s_1^{s(x/t^{s})}, \cdots, s_n^{s(x/t^{s})}\rangle \in P^{s(x/t^{s})}$$

$$\Leftrightarrow (Ps_1\cdots s_n)^{s(x/t^{s})}=1$$

所以，$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=\alpha^{s(x/t^{s})}$。

（2）x 在α中不是自由的且α是特称析舍式$[x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}]$。此时，$\alpha\{x/t\}=\alpha$；因而，据 1.4.的定理可知，$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=\alpha^{\sigma}=\alpha^{s(x/t^{s})}$。

（3） α是特称析舍式$[x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}]$，x 在α中自由，对每一个 $i<n$ 而言 t 对β_i中的 x 可代入，并且 $x_0, \cdots, x_{m-1}$ 都不出现在 t 中。此时，

$$\alpha\{x/t\}=[x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_1\{x/t\}, \cdots, \beta_{n-1}\{x/t\}]。$$

因而据 BSD 和归纳假设可得，

$$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=1 \Leftrightarrow ([x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0\{x/t\}, \cdots, \beta_{n-1}\{x/t\}])^{\sigma}=1$$

$\Leftrightarrow$对某个 $u_0, \cdots, u_{m-1}\in U$ 和某个 $i<n$ 有，

$$(\beta_i\{x/t\})^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=0 \qquad \text{(BSD)}$$

$$\Leftrightarrow \beta_i^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})(x/t')}=0 \qquad \text{(归纳假设)}$$

$$\Leftrightarrow \beta_i^{s(x/t')(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=0 \qquad \text{(因为 } x\notin\{x_0, \cdots, x_{m-1}\}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow ([x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}])^{s(x/t')}=1 \qquad \text{(BSD)}$$

即 $\alpha^{s(x/t')}=1$。

这里，$t'=t^{s(x_0/u_0,\cdots x_{m-1}/u_{m-1})}$。所以，

$$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=\alpha^{s(x/t')}。$$

由于 $x_0, \cdots, x_{m-1}$ 都不出现在 t 中，因此有

$$t'=t^{s(x_0/u_0,\cdots x_{m-1}/u_{m-1})}=t^{\sigma};$$

从而有

$$\alpha^{s(x/t')}=\alpha^{s(x/t^{s})};$$

所以，$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=\alpha^{s(x/t^{s})}$。□

为了处理其余情形（即，t 对α中的 x 不是自由的）下的$\alpha\{x/t\}$，我们必须先修正α中有问题的部分。这些有问题部分的产生都是由于 x 在α中的自由出现落入α的某个量化变项 y 的辖域而 y 又出现在 t 中所造成的。为了保证代入顺利进行并达到预期要求，α中这样的子式必须先换成某个与之逻辑等值而不用 y 作量化变项的子式。下一个定义所做的就是这一工作。

定义　如果 z 是在各个β_i（i=0, …, n-1）中不自由但对β_i中的 x_j（$j<m$）可代入的变

项，那么我们称公式$[x_0,\cdots,x_{j-1},z,x_{j+1},\cdots,x_{m-1};\beta_0\{x_j/z\},\cdots,\beta_{n-1}\{x_j/z\}]$为公式$[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$经（量化变项）改名而得的结果。（注意，若 z 根本不在各个β_i（i=0, …, n-1）中出现，则 z 当然满足定义中的两个条件。）

改名运算是可逆的。改名所得的结果与原公式逻辑等值。

定理 3　如果公式$[x_0,\cdots,x_{j-1},z,x_{j+1},\cdots,x_{m-1};\beta_0\{x_j/z\},\cdots,\beta_{n-1}\{x_j/z\}]$是由公式$[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$经改名而得，则此两公式逻辑等值。

证明：任取一个赋值σ并令 U 是它的论域。则据 BSD 可得，

$$([x_0,\cdots,x_{j-1},z,x_{j+1},\cdots,x_{m-1};\beta_0\{x_j/z\},\cdots,\beta_{n-1}\{x_j/z\}])^\sigma=1$$

$\Leftrightarrow$对某个 $u_0,\cdots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\cdots,u_{m-1}\in U$ 和某个 $i<n$，有

$$(\beta_i\{x_j/z\})^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{j-1}/u_{j-1},z/u_j,x_{j+1}/u_{j+1},\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=0。$$

根据定理 2 可知，$(\beta_i\{x_j/z\})^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{j-1}/u_{j-1},z/u_j,x_{j+1}/u_{j+1},\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}$

$$=\beta_i^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{j-1}/u_{j-1},z/u_j,x_{j+1}/u_{j+1},\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})(x_j/z')},$$

这里，$z'=z^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{j-1}/u_{j-1},z/u_j,x_{j+1}/u_{j+1},\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=u_j$。因此，由 z 在$\beta_i$中不自由就可得，

$$\beta_i^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{j-1}/u_{j-1},z/u_j,x_{j+1}/u_{j+1},\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})(x_j/z')}=\beta_i^{s(x_0/u_0,\cdots,x_j/u_j,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}。$$

从而据 BSD 可得，

$$([x_0,\cdots,x_{j-1},z,x_{j+1},\cdots,x_{m-1};\beta_0\{x_j/z\},\cdots,\beta_{n-1}\{x_j/z\}])^\sigma=1$$

当且仅当

对某个 $u_0,\cdots,u_{m-1}\in U$ 和某个 $i<n$，有$\beta_i^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=0$，

当且仅当

$$([x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}])^\sigma=1。$$

所以，

$$[x_0,\cdots,x_{j-1},z,x_{j+1},\cdots,x_{m-1};\beta_0\{x_j/z\},\cdots,\beta_{n-1}\{x_j/z\}]$$

与

$$[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$$

逻辑等值。□

【附记：公式$[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$可记成$[x;b]$。如将公式

$$[x_0,\cdots,x_{j-1},z,x_{j+1},\cdots,x_{m-1};\beta_0\{x_j/z\},\cdots,\beta_{n-1}\{x_j/z\}]$$

记成$[x;b]\{x_j/z\}$，则定理是说$[x;b]$与$[x;b]\{x_j/z\}$逻辑等值。这样的记法易跟代入记号相混，也可将$[x;b]\{x_j/z\}$改成$[x\{x_j/z\};b\{x_j/z\}]$。以后将采用后一记法，公式$[x;b]$中量化变项 x 改名为 z 后的结果记成$[x\{x/z\};b\{x/z\}]$，定理则是说

$$[x;b]\equiv[x\{x/z\};b\{x/z\}]。】$$

考虑一个给定的公式α。假定α有一个形如[x_0，…，x_{m-1}；β_0，…，β_{n-1}]的子公式。令公式α_1是将[x；b]在α中的一个出现换成[x{x_j/z}；b{x_j/z}]而得，则称α_1为α经（一次）改名而得的结果。如果公式α′是由α经有穷多次改名而得的结果，则称α′为α的一个变式，记成α′～α。α自身也可看成是α经零次改名而得的结果，因此总可以有α～α。易证，这一关系～是一个等价关系，它的递归定义如下。

定义

（1）如果α是原子公式，则α是其自身唯一的一个变式；

（2）如果α为[x；b]，则α的变式是所有公式[x；b′]（这里，b′为序列β_0'，…，β_{n-1}'并且各个β_i'为β_i的一个变式）以及所有从这样的公式[x；b′]经改名而得的公式[x{x/z}；b′{x/z}]。

公式α与其变式α′之间的区别仅在于，某些变项在α中的约束出现被换成其它变项在α′中的约束出现。因此我们有下面的定理。

定理 4　如果α～α′ 则α与α′逻辑等值。

证明：利用定理 3，施归纳于 deg α上就可。□

对于任一公式α和有穷多个变项 y_0，…，y_{k-1}，我们总能找到α的一个变式α′使得 y_0，…，y_{k-1}都不在α′中约束出现。例如，假定α有一个子公式[x；b]使得 y_0∈{x_0，…，x_{m-1}}。那么我们可以把α′换成[x{y_0/z}；b{y_0/z}]，这里 z 根本不在b中出现（即，z 不在各个β_i（i=0，…，n-1）中出现）并且不同于 y_0，…，y_{k-1}。在有穷多次这样的替换后，α就转换成一个具有所要求性质的公式α′。特别地，如果项 t 中的所有变项都在 y_0，…，y_{k-1}之中，那么 t 对α′中的 x 是可代入的。

我们现在就 t 对α中 x 不可代入的情形来定义α{x/t}。办法就是直接取α的一个变式α′使得 t 对α′中的 x 可代入，然后定义α{x/t}为α′{x/t}。为了使α{x/t}唯一确定，我们必须按某种规则来选取α′。α{x/t}的递归定义如下。

定义　给定 x 和 t，对各个α定义α′如下：

(1)如果α是原子公式，则α′为α；

(2)如果α为[x；b]，那么分成三种情形来处理：

(a)当 x 在α中不是自由的时，取α′为α；

(b)当 x 在α中自由且 x_0，…，x_{m-1}都不在 t 中出现时，取α′为[x；b′]（这里b′指序列β_0'，…，β_{n-1}'，下同）；

(c)当 x 在α中自由且 x_0，…，x_{m-1}中有出现在 t 中者（设为 y_0，…，y_{k-1}）时，取α′为[x{y_0/z_0}…{y_{k-1}/z_{k-1}}；b′{y_0/z_0}…{y_{k-1}/z_{k-1}}]，这里，z_0，…，z_{k-1}为不在 t 中出现、并且使α′由[x；b′]经改名而得的最初 k 个变项。然后，我们定义α{x/t}为α′{x/t}，

后者在前面已经定义。

定理 5　对一切 α，x，t 和 σ 有，

$$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=\alpha^{s(x/t^{s})}。$$

证明：$(\alpha\{x/t\})^{\sigma}=(\alpha'\{x/t\})^{\sigma}$　　　（α′由上述定义给出）

$=\alpha'^{s(x/t^{s})}$　　　（定理 2）

$=\alpha^{s(x/t^{s})}$　　　（定理 4）。□

定义　令 c 是常项，t 是项，并且 α 是公式。

$\alpha\{c/t\}$是指将 c 在 α 中的各个出现都换成 t 的结果。

下面，我们讨论联立代入。假定我们想要在 α 中对 n 个互不相同的变项 x_0，…，x_{n-1} 同时分别代入项 t_0，…，t_{n-1}。当然，我们也希望能做得很好，以便使定理 5 的适当推广成立。一般说来，一个挨一个地逐次代入是不行的。例如，t_0 也许含有 x_1，这样在对 x_0 代入 t_0 后 $\alpha\{x_0/t_0\}$就会有 x_1 的新的自由出现。如果紧接着对 x_1 代入 t_1，那么 t_1 将替代 x_1 的这些新自由出现，从而不能达到我们原来的目的。因此，我们必须谨慎行事。

我们将施归纳于 n 上定义 $\alpha\{x_0/t_0，\cdots，x_{n-1}/t_{n-1}\}$（即，在 α 中对变项 x_0，…，x_{n-1} 同时分别代入 t_0，…，t_{n-1} 所得的结果）。对 n＝1 的情形，我们前面已经定义。对 n＞1，作为归纳假设，我们假定对一切项 s_0，…，s_{n-2} 而言 $\alpha\{x_0/s_0，\cdots，x_{n-2}/s_{n-2}\}$已经定义。然后，我们定义：

定义　如果 x_{n-1} 在 α 中不是自由的，则

$$\alpha\{x_0/t_0，\cdots，x_{n-1}/t_{n-1}\}=\alpha\{x_0/t_0，\cdots，x_{n-2}/t_{n-2}\}；$$

如果 x_{n-1} 在 α 中是自由的，则

$$\alpha\{x_0/t_0，\cdots，x_{n-1}/t_{n-1}\}=\alpha\{x_0/s_0，\cdots，x_{n-2}/s_{n-2}\}\{x_{n-1}/t_{n-1}\}\{z/x_{n-1}\}，$$

这里，z 是第一个既不在 α 中出现也不在 t_0，…，t_{n-1} 出现的变项，并且对 i＝0，…，n-2，有 $s_i＝t_i\{x_{n-1}/z\}$。

这一定义表明联立代入如何正确进行。首先，对 t_0，…，t_{n-2} 中的 x_{n-1} 代入 z；其次，对 α 中的 x_0，…，x_{n-2} 联立代入所产生的项 s_0，…，s_{n-2}（归纳假设保证我们知道如何进行这一步）；然后，对 x_{n-1} 代入 t_{n-1}；最后，用 x_{n-1} 替换 z。z 的作用就在于，在我们不想要 t_{n-1} 进入的地方替代 z 。在 t_{n-1} 安全地代入 x_{n-1} 的正确位置后，我们再把 x_{n-1} 放回 z 的位置。

下面的定理表明，上述定义确有所要求的语义性质。

定理 6

$$(\alpha\{x_0/t_0，\cdots，x_{n-1}/t_{n-1}\})^{\sigma}=\alpha^{s(x_0/t_0^{s})\cdots(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})}。$$

证明：施归纳于 n 上进行。

对于 n＝1,所要的结果已获证明(见定理 5)。现在令 n＞1。对于 x_{n-1} 在 α 中不自由的情形，利用归纳假设立得结论。下面处理 x_{n-1} 在 α 中自由的情形。

当 x_{n-1} 在 α 中自由时，据上述定义和定理 5，我们有

$$(\alpha\{x_0/t_0,\cdots,x_{n-1}/t_{n-1}\})^{\sigma}=(\alpha\{x_0/s_0,\cdots,x_{n-2}/s_{n-2}\}\{x_{n-1}/t_{n-1}\})^{s(z/x_{n-1}^{s})}$$

$$=(\alpha\{x_0/s_0,\cdots,x_{n-2}/s_{n-2}\})^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s(z/x_{n-1}^{s})})},$$

由于 z 不在 t_{n-1} 中出现，故而有 $t_{n-1}^{s(z/x_{n-1}^{s})}=t_{n-1}^{s}$。因此有

$$(\alpha\{x_0/t_0,\cdots,x_{n-1}/t_{n-1}\})^{\sigma}=(\alpha\{x_0/s_0,\cdots,x_{n-2}/s_{n-2}\})^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})}$$

$$=\alpha^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})(x_0/s_0')\cdots(x_{n-2}/s_{n-2}')} \qquad \text{（归纳假设）}$$

这里，$s_0'=s_0^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})}$，…，$s_{n-2}'=s_{n-2}^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})}$。但 $s_i=t_i\{x_{n-1}/z\}$，i=0，…，n-2，因而有

$$s_i'=(t_i\{x_{n-1}/z\})^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})}$$

$$=t_i^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})(x_{n-1}/z^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})})}$$

$$=t_i^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})(x_{n-1}/x_{n-1}^{s})}$$

$$=t_i^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/x_{n-1}^{s})}$$

$$=t_i^{\sigma} \qquad \text{（因为 z 不在 } t_i \text{ 中出现）}$$

从而有

$$(\alpha\{x_0/t_0,\cdots,x_{n-1}/t_{n-1}\})^{\sigma}$$

$$=\alpha^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})(x_0/t_0^{s})\cdots(x_{n-2}/t_{n-2}^{s})}$$

$$=\alpha^{s(z/x_{n-1}^{s})(x_0/t_0^{s})\cdots(x_{n-2}/t_{n-2}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})} \qquad \text{（因为 } x_0,\cdots,x_{n-2},x_{n-1} \text{ 互不相同）}$$

$$=\alpha^{s(x_0/t_0^{s})\cdots(x_{n-2}/t_{n-2}^{s})(x_{n-1}/t_{n-1}^{s})} \qquad \text{（因为 z 不在 α 中出现）。□}$$

6　欣迪卡集

定义　　一个欣迪卡集就是满足下述条件的一个公式集 Φ：

（1）若原子公式 α∈Φ，则[α]∉Φ；

（2）若公式$[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]\in\Phi$，则有项 $t_0,\cdots,t_{m-1}$ 和 i＜n 使得$[\beta_i\{x_0/t_0,\cdots,x_{m-1}/t_{m-1}\}]\in\Phi$；

（3）若公式$[[x_0,\cdots,x_{m-1};\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]]\in\Phi$，则对一切 $t_0,\cdots,t_{m-1}$ 和一切 i＜n 有 $\beta_i\{x_0/t_0,\cdots,x_{m-1}/t_{m-1}\}\in\Phi$；

（4）如果 L 是带等词的语言，则对任意项 t 有，t＝t∈Φ；

（5）若 n≥1，并且 $s_0,\cdots,s_{n-1}$ 和 $t_0,\cdots,t_{n-1}$ 是任意 2n 个项，它们使得对各个 i=0，…，n-1 有 $s_i=t_i\in\Phi$，则对每一个 n 元函项符 f 有，$fs_0\cdots s_{n-1}=ft_0\cdots t_{n-1}\in\Phi$；

（6）若 n≥1，并且 $s_0,\cdots,s_{n-1}$ 和 $t_0,\cdots,t_{n-1}$ 是任意 2n 个项，使得对各个 i=0，…，n-1 有 $s_i=t_i\in\Phi$，则对每一个 n 元谓词符 P 有，$Ps_0\cdots s_{n-1}\in\Phi\Rightarrow Pt_0\cdots t_{n-1}\in\Phi$。

欣迪卡集是可满足的。为了证明这一结论，我们先引进一些定义和引理。

定义　令Φ是一个欣迪卡集。项之间的关系 E 定义如下：

（1）若 L 不带等词，则 sEt 定义为 s 与 t 相同；

（2）若 L 带等词，则 sEt 定义为 s＝t∈Φ；

（3）$|t|=_{df}|t|_E=\{s：sEt\}$。

引理　E 是等价关系：它是自返的、对称的和传递的。

证明：利用欣迪卡集定义中的条件（4)、(5)、(6）立得。□

为了证明欣迪卡集Φ是可满足的，我们将定义一个特殊的赋值σ并证明σ ⊨Φ。为此必须确定它的各个成分：首先要确定它的论域 U；其次要确定各个变项 x 在σ下的值 $x^\sigma\in U$；然后要确定各个函项符f和谓词符 P 所对应的 U 上运算和关系。我们确定这些成分如下：

$U=_{df}\{|t|：t$ 是项$\}$，

$x^\sigma=_{df}|x|$，

$f^\sigma(|t_0|，\cdots，|t_{n-1}|)=_{df}[f t_0\cdots t_{n-1}]$，

$\langle|t_0|，\cdots，|t_{n-1}|\rangle\in P^\sigma\Leftrightarrow Pt_0\cdots t_{n-1}\in\Phi$。

这些成分的确定是合理的，$f^\sigma(|t_0|，\cdots，|t_{n-1}|)$和$\langle|t_0|，\cdots，|t_{n-1}|\rangle\in P^\sigma$都只依赖于$|t_0|，\cdots，|t_{n-1}|$而不依赖于项 $t_0，\cdots，t_{n-1}$。

引理　对每一个项 t，$t^\sigma=|t|$。

证明：施归纳于 degt 进行就可。□

定理　对任一公式φ，

（1）$\varphi\in\Phi\Rightarrow\varphi^\sigma=1$；

（2）$[\varphi]\in\Phi\Rightarrow\varphi^\sigma=0$。

证明：施归纳于 degφ上来同时证明这两个结论。

情形 1：φ是原子公式，设为 $Pt_0\cdots t_{n-1}$。

$\varphi\in\Phi\Rightarrow Pt_0\cdots t_{n-1}\in\Phi$

$\Rightarrow\langle|t_0|，\cdots，|t_{n-1}|\rangle\in P^\sigma$

$\Rightarrow\langle t_0^\sigma，\cdots，t_{n-1}^\sigma\rangle\in P^\sigma$

$\Rightarrow(Pt_0\cdots t_{n-1})^\sigma=1$，即$\varphi^\sigma=1$；

$[\varphi]\in\Phi\Rightarrow\varphi\notin\Phi$

$\Rightarrow Pt_0\cdots t_{n-1}\notin\Phi$

$\Rightarrow\langle|t_0|, \cdots, |t_{n-1}|\rangle \notin P^\sigma$

$\Rightarrow\langle t_0^\sigma, \cdots, t_{n-1}^\sigma\rangle \notin P^\sigma$

$\Rightarrow(Pt_0\cdots t_{n-1})^\sigma=0$，即$\phi^\sigma=0$。

情形 2：ϕ是特称析舍式，设为$[x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}]$。

$\phi\in\Phi\Rightarrow [x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}]\in\Phi$

$\Rightarrow$有项 $t_0, \cdots, t_{m-1}$和 $i<n$ 使得$[\beta_i\{x_0/t_0, \cdots, x_{m-1}/t_{m-1}\}]\in\Phi$

（欣迪卡集的条件（2））

$\Rightarrow (\beta_i\{x_0/t_0, \cdots, x_{m-1}/t_{m-1}\})^\sigma= 0$ （归纳假设）

$\Rightarrow\beta_i^{s(x_0/t_0^s)\cdots(x_{m-1}/t_{m-1}^s)}= 0$ （1.5.的定理 6）

即，$\beta_i^{s(x_0/|t_0|,\cdots,x_{m-1}/|t_{m-1}|)}= 0$

$\Rightarrow ([x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}])^\sigma=1$ （BSD）

即，$\phi^\sigma=1$；

$[\phi]\in\Phi\Rightarrow [[x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}]]\in\Phi$

$\Rightarrow$对一切项 $t_0, \cdots, t_{m-1}$和一切 $i<n$ 有$\beta_i\{x_0/t_0, \cdots, x_{m-1}/t_{m-1}\}\in\Phi$

$\Rightarrow (\beta_i\{x_0/t_0, \cdots, x_{m-1}/t_{m-1}\})^\sigma=1$ （归纳假设）

$\Rightarrow\beta_i^{s(x_0/t_0^s)\cdots(x_{m-1}/t_{m-1}^s)}=1$

$\Rightarrow\beta_i^{s(x_0/|t_0|,\cdots,x_{m-1}/|t_{m-1}|)}=1$

$\Rightarrow$对一切 $u_0, \cdots, u_{m-1}\in U$ 和一切 $i<n$ 有，$\beta_i^{s(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})}=1$

$\Rightarrow ([x_0, \cdots, x_{m-1}; \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}])^\sigma= 0$

即，$\phi^\sigma= 0$。□

由此定理可知，σ满足Φ。因此，任一欣迪卡集都是可满足的。

7 一阶表列

一个表列就是一个由一些被称为结点（nodes）的元素组成的偏序集，这些结点按如下所说分成若干层（LeveLs）。各个结点各与一个有穷公式集相配。我们通常将把一个给定的结点跟与它相配的有穷公式集视为同一；这虽有点不太严格（因为实际上同一个公式集可以与不同的结点相配），但不致引起混淆。

各个结点各自只属一个层，层用自然数作标记。第 0 层的结点只有一个，叫作表列的始点（initiaL)。第 n+1 层的结点各自只是一个第 n 层中结点的后继(successor)。(用图象表示表列时，可以把给定结点的后继放在该结点的下方，并用线段把它们联结起来。）如果某个结点没有后继，则该结点被称为终点（terminaL)。

如果一表列至少有一个第 d 层的结点但没有第 d+1 层的结点，则称 d 为该表列的深度（depth)。

所谓某表列的一条分枝（branch）是指一个由结点组成的有穷序列$\Phi_0, \cdots, \Phi_k$，使得

Φ_0是该表列的始点，而对于各个 i=1,…，k 而言，Φ_i是Φ_{i-1}的后继，并且Φ_k是终点。我们也称这条分枝终止于Φ_k。

显然，对于各个终点，总有唯一的一条分枝终止于它。

属于某分枝中一结点的公式被说成是该分枝的公式。属于始点的公式被称为表列的初始公式（initiaL formuLae)。

表列中的所有结点以后随关系（foLLowing）为偏序：各个结点后随以它的后继、它的后继的后继、等等。

以Φ_0为始点的表列被称为是Φ_0的表列。

下面，我们描述如何来构造一阶表列（first-order tabLeaux)。一阶表列可用来证明某个给定的有穷公式集是不可满足的（即，不能为任一赋值所满足)。

首先，如果Φ_0是任一有穷公式集，则仅以Φ_0为单独一个结点所形成的表列是Φ_0的一阶表列。此时，Φ_0既是始点又是终点，并且只有一条分枝。

其次，假定已有Φ_0的一阶表列 T，我们可以利用下述分枝扩充规则之一把 T 扩充成Φ_0的一个新的一阶表列 T′。原有结点之间的后继关系在 T′中跟在 T 中一样。新结点将被指定为 T 中的一终点的后继。这些规则可以图示如下：

规则[ ]：

$$\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ [x_0,\ \cdots,\ x_{m-1};\beta_0,\ \cdots,\ \beta_{n-1}]\end{array}$$

$$[\beta_0\{x_0/y_0,\ \cdots,\ x_{m-1}/y_{m-1}\}]\qquad\cdots\qquad[\beta_{n-1}\{x_0/y_0,\ \cdots,\ x_{m-1}/y_{m-1}\}]$$

这里，y_0，…，y_{m-1}是在所扩张分枝的任一公式中不自由的任意 m 个不相同的变项；这些变项被称为临界变项或关键变项。

规则[[ ]]：

$$\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ [[x_0,\ \cdots,\ x_{m-1};\beta_0,\ \cdots,\ \beta_{n-1}]]\\ |\\ \beta_0\{x_0/t_0,\ \cdots,\ x_{m-1}/t_{m-1}\}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_{n-1}\{x_0/t_0,\ \cdots,\ x_{m-1}/t_{m-1}\}\end{array}$$

这里，t_0，…，t_{m-1}是任意项。

如果 L 是带等词的一阶语言，那么我们还有另外三个规则可用，它们的图示如下：

规则 SI：

·

·

·

│

t＝t

规则 SF：

·

·

·

│

$[t_0=s_0, \cdots, t_{n-1}=s_{n-1}, [ft_0\cdots t_{n-1}=fs_0\cdots s_{n-1}]]$

这里，f是 n 元函项符，t_0，…，t_{n-1}，s_0，…，s_{n-1}为任意项。

规则 SP：

·

·

·

│

$[t_0=s_0, \cdots, t_{n-1}=s_{n-1}, Pt_0\cdots t_{n-1}, [Ps_0\cdots s_{n-1}]]$

这里，P 是 n 元谓词符，t_0，…，t_{n-1}，s_0，…，s_{n-1}为任意项。(对于 n=2，P 也可以是等号＝。)

当表列 T 扩充成 T′时,T 的某个具体的分枝就被扩充成一条更长的分枝，或被裂分成几条更长的分枝。所有其它的分枝保持不变。

由于我们这里将只涉及一阶表列而不涉及其它种类的表列,因此此后我们将把它们简称表列。

称某个一阶表列的一条分枝为封闭的,仅当有一个原子公式α使得α和[α]都属于该分枝。若Φ的某个一阶表列的所有分枝都是封闭的，则称该表列为Φ的一个一阶反驳(简称反驳).如果Φ有一个一阶反驳，则称Φ为可反驳的。

定理 1　表列方法是语义可靠的：如果有穷公式集Φ为可反驳的，则Φ不可满足。特别地有，如果Φ={[α]}（即，Φ仅由公式α组成)，则α逻辑永真。

证明：我们先证，如果一表列 T 的一分枝是可满足的（即，属于该分枝的全体公式是可满足的)，并且该分枝经一个分枝扩充规则而获扩充，则新分枝或新分枝之一也是可满足的。依据五个分枝扩充规则而作的新分枝，分别讨论如下。

对于利用规则 SI、SF 和 SP 而得的新分枝，由于引进的新公式都是逻辑真的，故而结论显然成立。

现在考虑规则[ ]。令ψ是由属于所扩充的分枝的全体公式形成的公式集，$[x;b]\in\psi$，y 是在ψ中的任一公式中都不自由的任意 m 个不同的变项。假定$\sigma\vdash\psi$。则$([x;b])^{\sigma}=1$，从而据 BSD 可知有 $u_0,\cdots,u_{m-1}\in U$ 和某个 $i<n$ 使得$(\beta_i)^{\sigma(x/t)}=0$；这里 U 是σ的论域，$\sigma(x/u)$是$\sigma(x_0/u_0,\cdots,x_{m-1}/u_{m-1})$。考虑$\sigma(y/u)$（即，$\sigma(y_0/u_0,\cdots,y_{m-1}/u_{m-1})$）。由于 $y_0,\cdots,y_{m-1}$是在ψ的任一公式中都不自由的任意 m 个不同的变项，故而$\sigma(y/u)\vdash\psi$。据 1.5.的定理 6 可知，

$$(\beta_i\{x_0/y_0,\cdots,x_{m-1}/y_{m-1}\})^{\sigma(y/u)}=\beta_i^{s(y/u)(x_0/u_0)\cdots(x_{m-1}/u_{m-1})}$$
$$=\beta_i^{\sigma(y/u)(x/u)}$$

若 x 同于 y，则$\sigma(y/u)(x/u)=\sigma(x/u)$，从而有，

$$(\beta_i\{x_0/y_0,\cdots,x_{m-1}/y_{m-1}\})^{\sigma(y/u)}=\beta_i^{\sigma(x/u)}=0;$$

因此有，

$$([\beta_i\{x_0/y_0,\cdots,x_{m-1}/y_{m-1}\}])^{\sigma(y/u)}=1。$$

若 x 不同于 y，则 y 中与 x 中相应变项不同的变项根本不能在β_i中是自由的（因为 y 在[x；b]中不是自由的），从而有

$$\beta_i^{\sigma(y/u)(x/u)}=\beta_i^{\sigma(x/u)}\qquad(1.4.的定理)；$$

因此有

$$([\beta_i\{x_0/y_0,\cdots,x_{m-1}/y_{m-1}\}])^{\sigma(y/u)}=1。$$

所以，无论在哪种情况下，我们都有

$$\sigma(y/u)\vdash[\beta_i\{x_0/y_0,\cdots,x_{m-1}/y_{m-1}\}];$$

从而可知新的分枝之一（即，含有$[\beta_i\{x_0/y_0,\cdots,x_{m-1}/y_{m-1}\}]$的那一新分枝）是可满足的。

最后考虑规则[[ ]]。令ψ是由属于所扩充分枝的全体公式形成的公式集。令$[[x;b]]\in\psi$并令 t 是任意 n 个项。假定$\sigma\vdash\psi$。则$([[x;b]])^{\sigma}=1$，从而据 BSD 可知对σ的论域 U 中的任意 u 和任一 $i<n$ 有

$$\beta_i^{\sigma(x/u)}=1。$$

据 1.5.的定理 6 又有，

$$(\beta_i\{x/t\})^{\sigma}=\beta_i^{s(x/t^{\sigma})};$$

这里，t^{σ}指序列 $t_0^{\sigma},\cdots,t_{m-1}^{\sigma}$。由于 $t_0^{\sigma},\cdots,t_{m-1}^{\sigma}$都属于 U，故而有$\beta_i^{\sigma(x/t)}=1$，因此$\sigma\vdash\beta_i\{x/t\}$，$i=0,\cdots,n-1$。所以，新分枝是可满足的。

由于Φ的任一表列都是从以Φ为仅有的结点的表列逐步扩充分枝而得，因此若Φ是可满足的则Φ的任一表列中必定至少有一个可满足的分枝。但是闭分枝显然是不可满足的。因此，如果Φ可被反驳，则它就不可满足。特别地，当Φ={[α]}时，[α]不可满足，即，α逻辑永真。□

定理 2　如果Φ是一个有穷公式集并且有某个公式α使得α和[α]都属于Φ，则Φ可被反驳。因而，在任一个表列中，若有一公式α使得α和[α]都在同一分枝中，那么即使α不

是原子的，该分枝也就相当于是封闭的。

证明：施归纳于 deg α 上。若 α 是原子的，则以 Φ 为仅有的结点的表列是 Φ 的一个反驳。

现在令 α=[x ;b]。取定 m 个在 Φ 的任一公式中都不自由的、不相同的变项 y_0，…，y_{m-1}，先对 α 引用规则[ ]，然后对[α]引用规则[[ ]]，我们就得到

Φ

[β_0\{x/y\}] … [β_{n-1}\{x/y\}]

β_0\{x/y\} … β_0\{x/y\}

.
.
.

β_{n-1}\{x/y\} … β_{n-1}\{x/y\}

根据归纳假设可知，这一表列中的各个分枝都相当于是封闭的。所以，Φ 可被反驳。□

在实际构造表列时，对相当于是封闭的分枝就不必再进行扩充。

当 m = 0 和 m = n= 1 时，规则[ ]和规则[[ ]]就成下述图示：

.
.
.

[β_0，…，β_{n-1}]　　　　[x；β]

.
.
.

[β_0] … [β_{n-1}]　　　　[β\{x/y\}] 变项 y 在所扩充分枝的任一公式中都不自由

.
.

[[β_0，…，β_{n-1}]]　　　　[[x；β]]

.

.

|

β_0 $\beta\{x/t\}$ **t 是任意项**

.

.

β_{n-1}

由此可得，有关于常见的联结词和量词的分枝扩充规则如下：

$\alpha\wedge\beta$	$\alpha\vee\beta$	$\alpha\to\beta$	α? β	$\exists x\beta$	$\forall x\beta$
α	α β	$\sim\alpha$ β	α $\sim\alpha$	$\beta\{x/y\}$	β {x/t}
β			β $\sim\beta$		

$\sim(\alpha\wedge\beta)$	$\sim(\alpha\vee\beta)$	$\sim(\alpha\to\beta)$	$\sim(\alpha$? $\beta)$	$\sim\exists x\beta$	$\sim\forall x\beta$
$\sim\alpha$ $\sim\beta$	$\sim\alpha$	α	α β	$\sim\beta\{x/t\}$	$\sim\beta\{x/y\}$
	$\sim\beta$	$\sim\beta$	$\sim\beta$ $\sim\alpha$		

这里，t 是任意项，y 是不在所扩充分枝的任一公式中自由的变项。

8 某些“薄记”引理

一阶表列方法实际引用时很方便，但这方法的理论研究在技术上却有点麻烦。当对公式[[x；b]]引用规则[[ ]]时，我们需要代入的项 t 也许对b中的 x 不是可代入的，因此所作的代入就可能涉及约束变项改名。类似的情形对于规则[ ]也发生。如果在同一个表列中这样的代入作得多了，那就很难追踪所有这些约束变项改名。

令 T 是Φ的一个表列。称 T 为纯表列，仅当下列两条件成立：

（1）T 中应用规则[ ]时所用到的临界变项都不在Φ中约束出现；

（2）T 中应用规则[[ ]]时所用到的项 t 都不含任一个在Φ中约束出现的变项。

纯表列中所用到的表列规则，没有一个能在它所扩充的分枝中引入新的变项使之在所得的分枝中约束出现。因此，一变项如果不在Φ中约束出现，则它也不在Φ的纯表列的任一个公式中约束出现。所以，在纯表列中不发生约束变项改名。

对于任一表列中约束变项改名的追踪问题，可以归结为对纯表列中约束变项改名的追踪。

令 T 和 T′都是表列。称 T′为 T 的一个变表列（记成 T～T′），仅当 T 能通过将 T 中各个公式α换成变式α′而转换成 T′，并且这一转换使得，T 中规则[ ]的各次应用被转换成带相同的项 t 的规则[[ ]]的应用。此定义中后两个条件实际上是多余的，不过保留它们比较方便。

类似地，我们称Φ～Φ′，仅当Φ能够通过将各个φ∈Φ换成φ′而转换成Φ′。

引理 1　如果α～α′，则α{x/t}～α′{x/t}。

证明：施归纳于 deg α上。

（1） α是原子公式时，α′=α，显然有α{x/t}～α′{x/t}

（2） α是[x；b]时，则α′为[x；b′]或[x{x_j/z}；b′{x_j/z}]，这里，b′为序列β_0'，…，β_{n-1}'并且各个β_i'为β_i的变式，z 是在各个β_i'（i=0，…，n-1）中不自由但对β_i'中的 x_j（j＜m）可代入的变项。考虑下述情形：

(a) x 在α中不是自由的。则

$$\alpha\{x/t\}=\alpha，\alpha'\{x/t\}=\alpha'，$$

结论显然。

(b) x 在α中是自由的且 t 对α及α′中的 x 可代入。此时，x 在α′中也是自由的。据 1.5. 中的定义可知，此时 x_0，…，x_{m-1}都不能在 t 中出现，并且

$$\alpha\{x/t\}=[x；b\{x/t\}]。$$

(i)当α′为[x；b′]时，则有

$$\alpha'\{x/t\}=[x；b'\{x/t\}]。$$

据归纳假设可知，b{x/t}～b′{x/t}（即，对各个 i＜n，β_i{x/t}～β_i'{x/t}。由 1.5. 中变式的定义立得，α{x/t}=α′{x/t}。

(ii)当α′为[x{x_j/z}；b′{x_j/z}]时，这里 z 是在各个β_i'（i=0，…，n-1）中不自由但对β_i'中的 x_j（j＜m)可代入的变项。则由 t 对α′中 x 可代入可知，z 不在 t 中出现且 t 对b′{x_j/z}的 x 是可代入的，因此有

α′{x/t}=[x{x_j/z}；b′{x_j/z}]

=[x{x_j/z}；b′{x/t}{x_j/z}]　　　　(1)

～[x；b′{x/t}]　　　　(2)

～[x；b{x/t}]　　　　(归纳假设)

即，$\alpha\{x/t\}$

(1)是因为，由 x 在α和α′中自由可得 x 不同于 x_j和 z，以及由 t 对α中 x 可代入可得 x_j 不在 t 中出现。(2)是因为，由 t 不含 x_j 且 z 在b′中不自由可得 z 在b′{x/t}不自由，以及 z 对b′{x/t}中的 x_j 可代入（这一点我们安排在下一个小引理之后作证）。

（c）x 在α中是自由的但 t 对α或α′中的 x 不可代入。

此时据§5.中关于一般情形下代入的定义可知，

$$\alpha\{x/t\}=\gamma\{x/t\}，\alpha'\{x/t\}=\gamma'\{x/t\}；$$

这里，α～γ，α′～γ′，并且 t 对γ和γ′中的 x 是可代入的。所以据已经证明的结论就有，

$$\alpha\{x/t\}=\gamma\{x/t\}\sim\gamma'\{x/t\}=\alpha'\{x/t\}。\square$$

由此引理立得，若α～α′则对任意的项序列 t_0，…，t_{m-1}和 m 个不相同的变项 x_0，…，x_{m-1}有$\alpha\{x/t\}\sim\alpha'\{x/t\}$。

小引理　如果 t 对α中 x 可代入，则α{x/t}中不为α的子式的子式[x；b⁻]一定形如[x；b{x/t}]，这里公式[x；b]是α的子式。

证明：施归纳于 deg α上。

对于原子的α，无须作证。

当α为[y；γ]时，考虑下述情形：

（1）x 在[y；γ]中不是自由的，则α{x/t}为α，无须作证。

（2）x 在[y；γ]中是自由的，则α{x/t}为[y；γ{x/t}]。故而当[x；b⁻]为α{x/t}的子式而非α的子式时，则[x；b⁻]是b{x/t}中公式的子式而非b中公式的子式。据归纳假设可知，[x；b⁻]形如[x；b{x/t}]，这里[x；b]是γ中公式的子式，从而是α的子式。□

推论　如果 t 对α中 x 可代入，y≠x 且 z 不在 t 中出现，项 s 对α中 y 可代入，则 s 对α{x/t}中 y 可代入。

证明：s 对α{x/t}中 y 不可代入

⇒s 有某个变项 x_j 使得α{x/t}的某个子式[x；b⁻]有 z 的自由出现

⇒s 有某个变项 x_j 使得α{x/t}的某个子式[x；b{x/t}]有 y 的自由出现,这里[x；b]是α的子式(这是因为 y≠x 且 y 不在 t 中出现)

⇒s 有某个变项 x_j 使得α的某个子式[x；b]有 y 的自由出现

⇒s 对α中 y 不可代入

引出矛盾。所以，s 对α{x/t}中 y 可代入。□

现在来补证引理 1 中未证明部分“z 对b′{x/t}中的 x_j 可代入”。由于 x_j 不在 t 中出现、$x_j\neq x$ 以及 z 对b′中的 x_j 可代入，故而小引理的推论只要证明 t 对b′中的 x 可代入就得，z 对b′{x/t}中的 x_j 可代入。我们用反证法来证：t 对b′中的 x 可代入。若否，则 t 有变项 y_k

使得 x 在b'(中某公式)的子式$[y;\gamma]$中自由出现。由 x 不同于 x_j 和 z 可知,x 在$[y;\gamma]\{x_j/z\}$中自由出现。因 z 对b'中 x_j 可代入，故而 z 对$[y;\gamma]$中 x_j 可代入，所以$[y;\gamma]\{x_j/z\}=[y;\gamma\{x_j/z\}]$，这是$b'\{x_j/z\}$（中某公式）的一个子式，故 t 对$b'\{x_j/z\}$中 x 不可代入，引出矛盾。

引理 2　令$\Phi\sim\Phi'$。给定Φ的一个表列 T，就能构作Φ'的一个表列 T'使得 $T\sim T'$。

证明：施归纳于 T 的结点的个数上。

若 T 以Φ为唯一的一个结点，则以Φ'为唯一的一个结点的表列 T'即为所求。

若 T 的结点个数大于 1，则 T 由分枝扩充规则之一扩充表列 T_0而得。据归纳假设可知，有Φ'的一个表列 T_0'使得 $T_0\sim T_0'$。以下按五个规则分情形来证明：所要求的 T'可以用把 T_0扩充成 T 的同一个规则来得到。

对于规则 SI、SF、SP 而言，结论是显然的。

规则[ ]：T_0的某个分枝中有公式$[x;b]$，T 由附加公式集$\{[\beta_0\{x/y\}]\}$、…、$\{[\beta_{n-1}\{x/y\}]\}$为该分枝终点的 n 个后继而得，这里，y_0，…，y_{m-1}是在该分枝的任一公式中都不自由的、m 个不同的变项。由于改名只把约束变项改成约束变项，且是可逆的，故而 y_0，…，y_{m-1}在 T_0'的相应分枝的任一公式中也不是自由的，所以，可对 T_0'引用规则[ ]且以 y_0，…，y_{m-1}为临界变项。由引理 1 可知，对各个 $i<n$ 有$[\beta_i\{x/y\}]\sim[\beta_i'\{x/y\}]$，从而 $T\sim T'$。

规则[[ ]]：T_0的某个分枝中有公式$[[x;b]]$，T 由附加公式集$\{\beta_0\{x/t\}$，…，$\beta_{n-1}\{x/t\}\}$为该分枝终点的后继而得，这里 t_0，…，t_{m-1}是任意项。T_0'的相应分枝中有$([[x;b]])'$。据定义可知，

$$([[x;b]])'=[[x;b']]$$

或者

$$([[x;b]])'=[[x\{x_j/z\};b'\{x_j/z\}]];$$

这里，b'为序列β_0'，…，β_{n-1}'并且各个β_i'为β_i的变式，z 是在各个β_i'($i=0$，…，$n-1$)中都不自由但对β_i'中的 x_j（$j<m$）可代入的变项。考虑下述情形：

(1) 当$([[x;b]])'=[[x;b']]$时，则对 T_0'可以引用规则[[ ]]而得 T'，据引理 1 可知 $b\{x/t\}\sim b'\{x/t\}$，从而有 $T\sim T'$。

(2) 当$([[x;b]])'=[[x\{x_j/z\};b'\{x_j/z\}]]$时，对 T_0'引用规则[[ ]](t 相同)可得 T'。只须证明

$$b\{x/t\}\sim b'\{x_j/z\}\{x\{x_j/z\}/t\}$$

就得 $T\sim T'$。

任取b''使得$b'\sim b''$且 z 及 t 中变项都不在b''中约束出现。则 z 在b''中的代入以及 t 在b''和$b''\{x_j/z\}$中的代入都不涉及约束变项改名。易见，

$$b''\{x_j/z\}\{x\{x_j/z\}/t\}=b''\{x/t\}$$

据引理 1 可得，

$$\begin{aligned}b'\{x_j/z\}\{x\{x_j/z\}/t\}&\sim b''\{x_j/z\}\{x\{x_j/z\}/t\}\\&=b''\{x/t\}\end{aligned}$$

$\sim b'\{x/t\}$

$\sim b\{x/t\}$。□

显然，若 T 是一个反驳且 T～T′，则 T′也是反驳。

如果 T 是Φ的一个表列，则总能找到Φ′使得Φ～Φ′并且使得引理 2 中的 T′是纯表列。

引理 3　令 y_0，…，y_{n-1}是任意 n 个变项。给定Φ的一个反驳，就能构造Φ的一个反驳使得任一 y_i（i＜n）都未被用作临界变项。

证明：由于Φ中自由变项不能用作临界变项，故可设 y_0，…，y_{n-1}都在Φ中不是自由的。我们有，

Φ有一个反驳 T

⇒ 有Φ′及它的反驳 T′使得Φ～Φ′，y_0，…，y_{n-1}都不在Φ′中约束出现，并且 T′是纯表列

⇒ 有Φ′及它的反驳 T″(T″由 T′中的 y_i 换成 z_i 而得，z_0，…，z_{n-1}跟 y_0，…，y_{n-1}都不相同且根本不在 T′中出现)

⇒Φ有一个反驳 T‴　　　(据引理 2 而得)

T‴即为所求，因为 T″未曾用 y_0，…，y_{n-1}为临界变项且引理 2 的作法也不引进新的临界变项。□

从现在起，我们记

$$\Phi\{x/t\}=\{\varphi\{x/t\}:\varphi\in\Phi\}$$

下述引理 4 是本节的最终结果。

引理 4　给定的Φ反驳，就能反驳Φ{z/s}.

证明：令 T 是给定的反驳。据引理 3 可设 s 中变项没有一个在 T 中被用作临界变项。暂设：

(1) T 是纯表列；

(2) s 中变项没有一个在Φ中约束出现。

因此，s 中变项没有一个能在 T 的任一个公式中约束出现。所以，s 对 T 的任一个公式中的 z 都可代入。

令 T*是从 T 通过将 T 中各个公式α换成α{z/s}而得。T*是Φ{z/s}的一个反驳，证明如下：

T*的始点是Φ{z/s}。我们将证明一个规则在 T 中的各次应用被转换成同一规则在 T*中的一次应用。

对于规则 SI、SF、SP 而言，结论是显然的。

规则[ ]：设 T 用[x；b]来产生[β_i{x/y}](i=0，…，n-1)。[x；b]被转换成[x；b]{z/s}，

而$[\beta_i\{x/y\}]$被转换成$[\beta_i\{x/y\}]\{z/s\}$。考虑下述情形：

（i）z 为某个 x_j（$j<m$）时，

$$[x;b]\{z/s\}=[x;b],$$

$$[\beta_i\{x/y\}]\{z/s\}=[\beta_i\{x/y\}];$$

后一等式的成立是因为，由 y 为临界变项可知，y 在$[x;b]$中不约束出现，因而 y 不同于任一 x_i（$i<m$）。由(2)可知 y 不在 s 中出现，故而 y 在 T*内先于$[\beta_i\{x/y\}]$的任一个公式中不是自由的。所以，结论成立。

（ii）　z 不同于任一 x_j($j<m$）时，

$$[x;b]\{z/s\}=[x;b\{z/s\}]。$$

不妨设 z 在Φ中是自由的（否则$\Phi\{z/s\}$就是Φ，无须作证）。因此，y 不同于 z（因为 y 在Φ中不是自由的），从而有 $y\{z/s\}=y$。由于 x 不在 s 中出现，故得

$$[\beta_i\{x/y\}]\{z/s\}=[\beta_i\{z/s\}\{x/y\}];$$

如前可知，y 不能在 T*内先于$[\beta_i\{x/y\}]\{z/s\}$的任一个公式中是自由的。故 y 在 T*中可用作临界变项，规则[ ]可用。

规则[[ ]]，设 T 中用$[[x;b]]$来产生$\beta_0\{x/t\}$，…，$\beta_{n-1}\{x/t\}$，这里 t 是任意项。$[[x;b]]$被转换成$[[x;b]]\{z/s\}$，而各个$\beta_i\{x/t\}$被转换成$\beta_i\{x/t\}\{z/s\}$，i=0，…，n-1。考虑下述情形：

（i）z 为某个 x_j（$j<m$）时，

$$[[x;b]]\{z/s\}=[[x;b]],$$

$$\beta_i\{x/t\}\{z/s\}=\beta_i\{x/t\}\{x_j/s\}$$

$$=\beta_i\{x/t\{x_j/s\}\},\ i=0,\dots,n-1。$$

因而，各个$\beta_i\{x/t\}\{z/s\}$就能从$[[x;b]]\{z/s\}$引用规则[[ ]]而得。

（ii）　z 不同于任一 x_j（$j<m$）时，

$$[[x;b]]\{z/s\}=[[x;b\{z/s\}]],$$

$$\beta_i\{x/t\}\{z/s\}=\beta_i\{z/s\}\{x/t\{z/s\}\};$$

这里，前一等式的成立是因为 s 对$[[x;b]]$中 z 可代入，而后一等式的成立则是因为 x 不在 s 中出现。因此，从$[[x;b\{z/s\}]]$引用规则[[ ]]就得$\beta_i\{z/s\}\{x/t\{z/s\}\}$，i=0，…，n-1，结论也成立。

现在取消上述(1)和(2)的假定。

我们能找到Φ的一个变集Φ′使得 s 的变项没有一个在Φ′中约束出现，并且使得引理 2 中从 T 构造起来的 T′是纯表列。由上面的结论，就能构造$\Phi'\{z/s\}$的一个反驳。据引理 2 可知，$\Phi\{z/s\}\sim\Phi'\{z/s\}$；再据引理 2 就得$\Phi\{z/s\}$的一个反驳。□

由此引理可知，对于 n 个不同的变项 z_0，…，z_{n-1}和任意的项列 s，若能反驳Φ则也能反驳$\Phi\{z/s\}$，这里 z 表示 z_0，…，z_{n-1}。

9　一阶表列的消去定理

先证几个引理。

引理 1　给定Φ的反驳，我们就能反驳Φ∪Ψ，这里Ψ是任一个有穷公式集。

证明：令 T 是Φ的一个反驳。据 1.7.中引理 3 可设 T 没有用Ψ的自由变项作临界变项。把Ψ加入 T 的始点中，就得到Φ∪Ψ的反驳。□

由引理 1 可知，如果我们对于给定分枝中部分公式形成的集合已有反驳，则这分枝相当于是封闭的。下面将不言而喻地利用这一结论。

引理 2　给定Φ,[[x；b]]的反驳，我们就能反驳Φ，$\beta_0\{x/t\}$，…，$\beta_{n-1}\{x/t\}$。

证明：令 T 是Φ,[[x；b]]的一个反驳。为了得到Φ，$\beta_0\{x/t\}$，…，$\beta_{n-1}\{x/t\}$的一个反驳，我们可以完全仿造 T，只是在[[x；b]]被用来得到结点{$\beta_0\{x/t\}$，…，$\beta_{n-1}\{x/t\}$}的地方，我们切去此结点。由于初始结点中有公式$\beta_0\{x/t\}$，…，$\beta_{n-1}\{x/t\}$，故而在每一个分枝仍然可以利用这些公式。□

引理 3　给定Φ,δ和Φ,[δ]的反驳，这里δ是原子公式。那么我们就能反驳Φ。

证明：为了得到Φ的反驳，我们可以仿造Φ,δ的给定反驳，除了用到δ的地方外完全相同。δ的唯一用处就是在有[δ]出现的分枝中用来封闭该分枝。但是，由于已经给定Φ,[δ]的反驳并且有Φ为初始结点，所以，用δ来封闭的分枝，即使不借助δ也相当于是封闭的。□

引理 4　给定Φ,[x；b]的反驳，我们就能反驳Φ,[$\beta_i\{x/t\}$]，这里 i=0，…，n-1。

证明：令 T 是给定的Φ,[x；b]的一个反驳。我们施归纳于 T 的深度 d 上来证明。据 1.7.中引理 3，我们可以假定出现在 t 中变项没有一个在 T 中用作临界变项。

若 d=0，则必有某个原子公式使得δ和[δ]都属于Φ，从而显然可知Φ、[$\beta_i\{x/t\}$]都可反驳，i=0，…，n-1。

若 d＞0，则可按 T 中第 1 层结点如何得到的情形来分别考虑。

首先，设 T 按如下方式开始：

$$\begin{array}{c}\Phi,[x；b]\\ |\\ \alpha\\ \cdot\\ \\ \\ \cdot\end{array}$$

这里，α是由规则 SI、SF 或 SP 而得。将 T 中始点跟第 1 层结点{α}混同起来，我们就可得到Φ,α,[x；b]的一个深度为 d-1 的反驳，从而据归纳假设可知Φ,α,[$\beta_i\{x/t\}$]都反驳，i=0，…，n-1。现在，我们如下开始来作Φ,[$\beta_i\{x/t\}$]的一个表列：

$$\begin{array}{c}\Phi,[\beta_i\{x/t\}]\\ |\\ \alpha\end{array}$$

这里，α按 T 中同样方式而得；由于Φ,α,[$\beta_i\{x/t\}$]可反驳，故而所作表列已相当于是封闭的。所以，Φ,[$\beta_i\{x/t\}$]都可反驳，i=0，…，n-1。

其次，设 T 按如下方式开始：

$$\begin{array}{c} \Phi,[x\,;b] \\ | \\ \alpha_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{k-1} \end{array}$$

这里，α_0，…，α_{k-1}是对Φ中某公式引用规则[[ ]]而得。这一情形完全可以仿照上一情形来处理，结论成立。

再次，设 T 按如下方式开始：

$$\begin{array}{ccc} & \Phi,[x\,;b] & \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{k-1} \end{array}$$

这里，α_0，…，α_{k-1}是对Φ中某公式引用规则[ ]而得。将 T 中始点跟第 1 层结点{x_j}（j=0，…，k-1）混合起来，我们就得到Φ，x_j，[x；b]的一个深度<d 的反驳，从而据归纳假设可知，Φ，x_j，[β_i{x/t}]都可反驳，i=0，…，n-1。现在，我们如下开始来作Φ，[β_i{x/t}]的一个表列：

$$\begin{array}{ccc} & \Phi,\ [\beta_i\{x/t\}] & \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{k-1} \end{array}$$

这里，α_0，…，α_{k-1}按 T 中同样方式而得；由于Φ，x_j，[β_i{x/t}]都可反驳，j=0，…，k-1，故而所作表列中各分枝已相当于是封闭的。所以，Φ，β_i{x/t}都可反驳，i=0，…，n-1。

最后，我们还要考虑 T 的第 1 层结点是对[x；b]引用规则[ ]而得的情形，此时 T 则按如下方式开始：

$$\begin{array}{ccc} & \Phi,[x\,;b] & \\ [\beta_0\{x/y\}] & \cdots & [\beta_{n-1}\{x/y\}] \end{array}$$

并且据§7.中引理 3 还可假定 y 根本不在[x ;b]中出现。将 T 的始点跟第 1 层结点{[β_i{x/t}]}混合，i=0，…，n-1，我们就得到Φ，[β_j{x/y}]，[x；b]的一个深度<d 的反驳 j=0,…,n-1；从而据归纳假设可知（以 y 替代 t），Φ，[β_j{x/y}]，[β_i{x/y}]都可反驳，i=0，…，n-1。所以，Φ，[β_i{x/y}]都可反驳，i=0，…，n-1。

据§7.中引理 4，我们现在可以反驳Φ{y/t}，[β_i{x/y}{y/t}]，i=0，…，n-1。但是 y 为 T 中的临界变项，因而 y 根本不在Φ中自由出现，所以Φ{y/t}=Φ。另外，取一个β′使得β～β′并且 y 和 t 中的变项都不在β′中约束出现（从而 y 根本不在β′中出现）。于是易见，

$$[\beta_i'\{x/y\}\{y/t\}]=[\beta_i'\{x/t\}]，i=0，\cdots，n-1；$$

因为这里的代入不涉及约束变项改名。另一方面，据§7.中引理 1 可得，

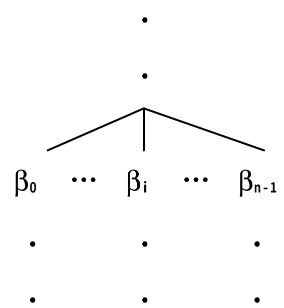
$$[\beta_i\{x/y\}\{y/t\}] \sim [\beta_i'\{x/y\}\{y/t\}]$$
$$\sim [\beta_i'\{x/t\}]$$
$$\sim [\beta_i\{x/t\}],\ i=0,\cdots,n-1。$$

由于Φ，$[\beta_i\{x/y\}\{y/t\}]$都可反驳，故据§7.中引理 2 可知，Φ，$[\beta_i\{x/t\}]$也都可反驳，$i=0,\cdots,n-1$。□

【下面的引理是引理 4 在 m=0 时的特例。

引理　给定Φ,$[\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$的一个反驳，我们就能反驳Φ,$[\beta_i]$，这里 $i=0,\cdots,n-1$。

证明：令 T 是Φ,$[\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$的一个反驳。为了得到Φ,$[\beta_i]$的反驳，我们可以仿造 T，只是在$[\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}]$被用来得到下图的地方：



我们切去结点$\{\beta_0\},\cdots,\{\beta_i\},\cdots,\{\beta_{n-1}\}$，以及在它们之后的所有的切点。所得到的表列就是Φ,$[\beta_i]$的一个反驳。□

引理 5（消去引理）　给定Φ,α和Φ,[α]的反驳，这里α是任一公式，我们能反驳Φ。

证明：施归纳于 deg α上。

α是原子公式时，由引理 3 立得结论。

α是公式[x；b]时，令 T_1和 T_2分别是给定的Φ,α和Φ,[α]的反驳。设 T_2有一个结点$\{\beta_0\{x/t\},\cdots,\beta_{n-1}\{x/t\}\}$是通过对[[x；b]]引用规则[[ ]]而得。在 T_2中的尽可能深的层次上取这形式的一个结点。令该层次为 k+1 层。令$\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_k$是先于$\{\beta_0\{x/t\},\cdots,\beta_{n-1}\{x/t\}\}$的结点，$\Phi_j$是第 j 层的结点，$j=0,\cdots,k$。特别有，$\Phi_0$=Φ,[α]。令$\Psi=\Phi\cup\Phi_1\cup\cdots\cup\Phi_k$。则得Ψ，$\{\beta_0\{x/t\},\cdots,\beta_{n-1}\{x/t\}\}$的一个反驳。据引理 4，由 T_1可得Φ,$[\beta_i\{x/t\}]$的反驳，从而能反驳Ψ,$[\beta_i\{x/t\}]$，$i=0,\cdots,n-1$。运用归纳假设 k 次可知，我们能反驳Ψ。从 T_2中切去结点$\{\beta_0\{x/t\},\cdots,\beta_{n-1}\{x/t\}\}$及跟随它的所有结点，则“截短后的”$\Phi_0,\cdots,\Phi_k$相当于是封闭的，无须用到公式[[x；b]]（即，[α]）。

经有穷多次这样的手续，就能得到Φ_0（即，Φ，[α]）的一个不用[α]的反驳，从该反驳的始点中去掉[α]，就得到Φ的反驳。□

由消去引理立得下述消去定理。

消去定理　给定Φ的一个用消去规则 EM 的反驳，我们能为Φ构造一个不用 EM 的反驳；这里的 EM 是指这样的分枝扩充规则：如果Φ是一表列 T 的一个终点，α是任一公式，则可以附加两个结点{α}和{[α]}为Φ的后继。EM 的图示如下：

规则 EM：

$$\frac{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}{\alpha \qquad\qquad\qquad [\alpha]}$$

消去引理的证明：令 k 是给定反驳中用到 EM 的最深层次。考虑在这一层次上的一个应用：

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \Phi_k \\ \hline \alpha \qquad\qquad\qquad [\alpha] \end{array}$$

在作出这一应用前，Φ_k是分枝Φ_0，…，Φ_k的终点。令Φ为这一分枝中全体公式所形成的公式集，即，$\Phi=\Phi_0\cup\cdots\cup\Phi_k$。根据 k 的选取可知，追随结点{α}的所有结点都不是利用 EM 得到的。因此，通过对给定反驳的仿造，我们能得到Φ,α的一个不用 EM 的反驳。类似地，可以得到Φ,[α]的一个不用 EM 的反驳。据消去引理可知，我们能构造Φ的一个不用 EM 的反驳。因此，在作出 EM 的那一应用前，分枝Φ_0，…，Φ_k已经相当于是封闭的，无须引用 EM。这样，我们就从Φ_0的给定反驳中消除了 EM 的一次应用。有穷多次重复这一过程，就得Φ_0的一个不用 EM 的反驳。□

规则 EM 可以帮助我们更快地得到反驳。

10　一阶表列的完全性

在这一节中，我们将描述一个过程，利用这个过程可以系统地来为任一给定的有穷公式集Φ寻求一个反驳。而且，我们将证明，如果这一系统搜索过程并不产生Φ的一个反驳，那么Φ是可满足的，从而是不可反驳的。

对于任一公式集Φ，我们定义 L_Φ为使得Φ仍在 L_Φ中的“最穷的”一阶语言。较精确地讲就是，L_Φ的外逻辑符恰好只是实际出现在Φ中的那些外逻辑符。如果等词符＝出现在Φ中或者有某个（并非常项的）函项符出现在Φ中，则我们令 L_Φ是一个带等词的语言。显然，L_Φ是最初语言 L 的一个子语言，即，每个 L_Φ-符都是 L-符。

就本节而言，令Φ是一个固定（但任意）的有穷公式集。此时，L_Φ的初始符号集是可数无穷的：它由有穷多个函项符、有穷多个谓词符（可能包括等词符＝）、逗号、分号、左右括号、以及可数无穷多个（个体）变项组成。

由于 L_Φ中每一个公式都是由 L_Φ中初始符号组成的有穷序列，故而可以按某个能行规则来枚举 L_Φ中的所有公式。类似地，L_Φ中的所有有穷多个项形成的序列也可能行枚举。就本节后文而言，我们固定这样两个枚举如下：

$$\{\alpha_n: n=0,1,\cdots\},$$

$$\{t_n: n=0,1,\cdots\};$$

这里，要求 L_Φ中各个公式在此枚举中重复出现无穷多次。当 L_Φ是带等词的语言时，我们还固定某个能行枚举如下：

$$\{\Psi_n: n=0,1,\cdots\};$$

这里，各个Ψ_n是能由分枝扩充规则 SI、SF、SP 引入表列的、L_Φ的所有公式。

下面，对各个自然数 n，我们描述如何为Φ构造一个表列 T_n。描述是施归纳于 n 上进行

的。

T_0就是以Φ为单独一个结点的表列。

设 T_n已经作出。首先，构造 T_n*如下：

（1）若α_n在 T_n中出现且α_n能为规则[ ]所用，那么我们就用该规则扩充 T_n的每一个含α_n的分枝，作为临界变项我们利用能作此用的（字母表顺序中的）最初若干各变项。所产生的表列就是 T_n*。

（2）若α_n在 T_n中出现且具形式[[x；b]]（这里为不重复起见，令b中有 k 项），那么我们通过相继附加结点{b_0\{x/t_i'\}，…，b_k\{x/t_i'\}}(i=0，1，…，n)来把 T_n的各个含α_n的分枝扩张 n 次，这里 t_0'，…，t_n'是枚举{t_n：n=0，1，…}中最初 n+1 个 k 元项列。所产生的表列就是 T_n*。

（3）在其余情形下（α_n不在 T_n中、或者α_n是原子公式或原子公式的否定），令 T_n*为 T_n。

得到 T_n*，再来构造 T_{n+1}。若 L_Φ不带等词，则令 T_{n+1}为 T_n*。若 L_Φ带等词，则通过对 T_n的各个分枝附加结点{Ψ_n}而得 T_{n+1}。

据§7.的定理 1 可知，若对某个 n 有，T_n的所有分枝都是封闭的，则Φ是不可满足的。

另一方面，设各个 T_n至少有一个开分枝。若 n≥m，则 T_n的每一个（开）分枝是 T_n的一个且仅一个（开）分枝的扩充。

引理 1　若各个 T_n有开分枝，则存在一个序列{B_n：n=0，1，…}使得对一切 n，B_n是 T_n的一个开分枝而 B_{n+1}是 B_n的一个扩充。

证明：令 B 是 T_n的一个分枝。我们称 B 为有利的，仅当对无穷多个 m＞n，T_m有一个为 B 的扩充的开分枝。

若 B 是 T_n的一个分枝，则有 T_{n+1}的有穷多个分枝扩充了 B，设为 B^1，…，B^k。若 B 是有利的，则诸 B^i中至少有一个必是有利的，因为 T_m(m＞n)中扩充 B 的各个开分枝有必是某个 B^i的扩充。

T_0只有一个分枝，叫它为 B_0。B_0是有利的。T_1中至少有一个扩充 B_0的分枝必是有利的，取其为 B_1。类似地，T_2有一个有利的分枝 B_2扩充 B_1，如此等等，以至无穷。□

【附注：这一引理是“寇尼希引理”的一种说法。本证明不是构造性的：有了 B_n后，我们仅能知道 T_{n+1}中扩充 B_n的分枝之一必是有利的，但由于要确定哪一个分枝有利必须检查所有 T_m(m＞n)，故无法确定。

本引理的证明，无需选择公理，在 B^1，…，B^k中选取“最左面的”那个有利分枝就行。】

定理　　若各个 T_n有开分枝，则Φ为一个带可数（有穷或无穷）论域的赋值所满足。

证明：取{B_n：n=0，1，…}如引理 1 所述。

令Φ_n是 B_n中全体公式所形成的公式集。特别有，Φ_0=Φ。作Ψ=Φ_0∪…∪Φ_n∪…（所有Φ_n的并集，n∈w）。从 T_n的作法及 B_n的性质可知，Ψ是 L_Φ中的一个欣迪卡集。由 1.6. 中的定理立得结论。□

推论　　有穷公式集能被反驳，当且仅当，该集是不可满足的。每个可满足的有穷公式集为某个带可数论域的赋值所满足。

上述结果并不提供一种能行的方法来决定一个给定的有穷公式集是否可满足。T_n的是构

造性的，我们可以依次构造 T_0，T_1，T_2 等等，当Φ是不可满足的时候我们总能在某个时候构造出Φ的一个反驳 T_n。但是，一般没有办法事先知道这个 n 究竟有多大。因此，如果我们已就某个相当大的 m 构造了 T_m 并发现它有一条开分枝，那么仍保留有两种可能：Φ实际上是可满足的，或者虽不可满足但仍能使 T_n 为反驳的第 1 个 n 比 m 大很多。

参考文献

[1] BeLL, J.L. & Machover, M.. A Course in MathematicaL Logic [M]. North-HoLLand, Amsterdam, 1977.

[2] 张清宇．经典命题逻辑的一个公理系统 [J]．哲学研究，1997 年第 8 期．

A Tabuleax System for First-order Logic

Zhang Qingyu

(Institute of Philosophy, Chinese Academy of Social Sciences, Beijing 100732, China)

Abstract：This paper extends the system Z to the first-order case for which presents a tabuleax proof.

Key words：bracket-notation; first-order logic; tabuleax proof

收稿日期：2004-05-20

作者简介：张清宇（1944-），男（汉族），上海人，中国社会科学院哲学所研究员。