反证法与归谬法的现代分析

杜国平 [1, 2]

（1. 南京大学哲学系 210093；2.南京航空航天大学计算机系 210016）

内容提要：本文以现代命题逻辑为分析工具，证明了：在正命题逻辑系统的基础上，反证法的证明能力强于归谬法，它们之间相差一个双重否定律；归谬律与不矛盾律加上充分条件否定后件律相等价；反证律与不矛盾律、排中律、充分条件否定后件律加上选言推理否定肯定律相等价。

关键词：反证法；归谬法；正命题逻辑系统；排中律；不矛盾律

中图分类号：B81 **文献标识码：**A

一．一般认为：反证法（indirect proof**）是一种间接证明的方法，而归谬法（**reduction to absurdity**）是一种直接反驳的方法。但是，若仅仅从证明的角度来看，它们又都是间接证明的方法。尤其是在高度技术化的今天，反证法和归谬法是哲学分析和数学证明中常用的并且是极其重要的两种证明方法。**

那么，作为证明的方法，它们之间存在着什么样的差别呢？它们内在的逻辑依据是什么？本文拟以现代命题逻辑为分析工具来对有关的问题进行探讨。

一般认为反证法的基本思路是：如要证明命题“q”，先假设反论题“并非q”，由此推出一个与前提或假设相矛盾的或显然不成立的命题，从而就证明了“q”；归谬法的基本思路是：如要证明命题“并非q”，先假设反论题“q”，由此推出一个与前提或假设相矛盾的或显然不成立的命题，从而就证明了“并非q”。在现代命题逻辑的公理系统中，刻画这两种证明方法的逻辑结构的是如下两个公式：

1、$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$；

2、$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$[1]。

这两个公式分别称为反证律(law of indirect proof)**与归谬律**(law of reduction to absurdity)。**而在自然推理系统中，则表现为如下两条推理规则：**

1'、 **如果**Σ，$\neg A \vdash B$，**并且**Σ，$\neg A \vdash \neg B$，**则**$\Sigma \vdash A$；

2'、 **如果**Σ，$A \vdash B$，**并且**Σ，$A \vdash \neg B$，**则**$\Sigma \vdash \neg A$[2]。

二．反证律和归谬律尽管在形式上非常相近，但它们的证明能力实际上是存在差异的。反证律比归谬律的证明能力强。这可以用如下的证明来说明这一点。

由推理规则（1）“如果$A \in \Gamma$，**那么**$\Gamma \vdash A$。”$(\in)$、（2）“**如果**$\Gamma \vdash \Gamma'$，$\Gamma' \vdash A$，**那么**$\Gamma \vdash A$。”$(Thansitive)$**和（3）“如果**Σ，$\neg A \vdash B$，**并且**Σ，$\neg A \vdash \neg B$，**则**$\Sigma \vdash A$。”$(\neg_{-})$**（反证律）可以证明：“如果**Σ，$A \vdash B$，**并且**Σ，$A \vdash \neg B$，**则**$\Sigma \vdash \neg A$。”$(\neg_{+})$**（归谬律）**。

证明1：1、Σ，$A \vdash B$ **前提**

2、 Σ，$A \vdash \neg B$ 前提

3、 Σ，$\neg\neg A$，$\neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

4、 Σ，$\neg\neg A$，$\neg A \vdash \neg\neg A$ $(\in)$

5、 Σ，$\neg\neg A \vdash A$ 3、4、$(\neg_{-})$

6、 Σ，$\neg\neg A \vdash \Sigma$ $(\in)$

7、 Σ，$\neg\neg A \vdash B$ 1、5、6、$(Thansitive)$

8、 Σ，$\neg\neg A \vdash \neg B$ 2、5、6、$(Thansitive)$

9、 $\Sigma \vdash \neg A$ 7、8、$(\neg_{-})$

但是由推理规则（1）"如果 $A \in \Gamma$，那么 $\Gamma \vdash A$。"$(\in)$、(2)"如果 $\Gamma \vdash \Gamma'$，$\Gamma' \vdash A$，那么 $\Gamma \vdash A$。"$(Thansitive)$ 和（3）"如果 Σ，$A \vdash B$，并且 Σ，$A \vdash \neg B$，则 $\Sigma \vdash \neg A$。"$(\neg_{+})$（归谬律）却无法证明"如果 Σ，$\neg A \vdash B$，并且 Σ，$\neg A \vdash \neg B$，则 $\Sigma \vdash A$。"$(\neg_{-})$（反证律）。即使在归谬律之外将推演加强到正命题逻辑系统也无法证明反证律。

这可以很容易得到证明。只需定义一个如下的语义解释：

定义 1：设 $Atomic(Lp)$ 是经典命题逻辑 Lp 的原子公式集，$Formula(Lp)$ 是命题逻辑的公式集。V 称之为 Lp 的一个语义解释，当且仅当 V 是满足以下条件的从 $Formula(Lp)$ 到 $\{1, 0\}$ 上的映射，即：

$$V:\ Formula(Lp) \rightarrow \{1, 0\}$$

对 $Formula(Lp)$ 中的任意公式 a、b，

V_{Atomic}：**若** $a \in Atomic(Lp)$，**则** $V(a) \in \{1,\ 0\}$；

$V_{\neg}$：**如果** $V(a)=1$，**或** $V(a)=0$，**那么** $V(\neg a)=1$；

$V_{\rightarrow}$：$V(a \rightarrow b)=1$ **当且仅当** $V(a)=0$ **或者** $V(b)=1$；

$V_{\wedge}$：$V(A \wedge B)=1$ **当且仅当** $v(A)=v(B)=1$；

$V_{\vee}$：$V(A \vee B)=1$ **当且仅当** $v(A)=1$ **或者** $v(B)=1$；

$V_{\leftrightarrow}$：$V(A \leftrightarrow B)=1$ **当且仅当** $v(A)=V(B)=1$ **或者** $V(A)=V(B)=0$。

容易验证归谬律和正命题逻辑系统的公理、推理规则都具有或保持这一性质：

如果 $\Sigma \vdash A$，那么 $V(\Sigma)=1$ 蕴涵 $V(A)=1$。（记为性质 Rt）

但是当我们令 $V(\Sigma)=1$，$V(B)=1$，$V(A)=0$ 时，有 $V(\Sigma \cup \{\neg A\}) = V(B) = V(\neg B) = V(\Sigma)=1$，但 $V(A)=0$。由此看见，反证律不保持性质 Rt。因此，在正命题逻辑外加归谬律的逻辑系统中，反证律是无法得到证明的。

三．那么，反证律比归谬律的证明能力强多少呢？

由推理规则：(1)"如果 $A \in \Gamma$，那么 $\Gamma \vdash A$。"$(\in)$、(2)"如果 $\Gamma \vdash \Gamma'$，$\Gamma' \vdash A$，那么 $\Gamma \vdash A$。"$(Thansitive)$ 和（3）"如果 Σ，$\neg A \vdash B$，并且 Σ，$\neg A \vdash \neg B$，则 $\Sigma \vdash A$。"$(\neg_{-})$（反证律）可以证明："如果 $\Sigma \vdash \neg\neg A$，则 $\Sigma \vdash A$。"$(\neg\neg_{-})$。

证明 2：1、$\Sigma \vdash \neg\neg A$　　　　前提

2、Σ，$\neg A \vdash \Sigma$　　　　$(\in)$

3、Σ，$\neg A \vdash \neg\neg A$　　　　$(Thansitive)$

4、Σ，$\neg A \vdash \neg A$　　　　$(\in)$

5、$\Sigma \vdash A$　　　　3、4、$(\neg_{-})$

而由推理规则："如果 Σ，$A \vdash B$，并且 Σ，$A \vdash \neg B$，则 $\Sigma \vdash \neg A$。" $(\neg_{+})$（归谬律）和"如果 $\Sigma \vdash \neg\neg A$，则 $\Sigma \vdash A$。"$(\neg\neg_{-})$ 也可以证明："如果 Σ，$\neg A \vdash B$，并且 Σ，$\neg A \vdash \neg B$，则 $\Sigma \vdash A$。" $(\neg_{-})$（反证律）。

证明 3：1 、Σ，$\neg A \vdash B$　　　　前提

2、 Σ，$\neg A \vdash \neg B$　　　　前提

3、 $\Sigma \vdash \neg\neg A$　　　　1、2、$(\neg_{+})$

4、 $\Sigma \vdash A$　　　　3、$(\neg\neg_{-})$

而在正命题逻辑系统中若加上反证律则可以证明归谬律和双重否定律。

所以，归谬律和反证律之间差别一个双重否定律 $(\neg\neg_{-})$。

一般认为：归谬法的逻辑依据是不矛盾律，而反证法的逻辑依据是不矛盾律和排中律。实际上，这需要具体分析。

四．由正命题逻辑系统加上排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 是不能证明反证律的。即反证律独立于由正命题逻辑系统加上排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 而得到的扩充系统 Lp'。

因为在如上定义的经典命题逻辑语义解释（定义 1）中，正命题逻辑系统的 12 条公理：

$Ax1$　$A \to (B \to A)$，

$Ax2$　$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$，

$Ax3$　$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$，

$Ax4$　$A \wedge B \to A$，

$Ax5$　$A \wedge B \to B$，

$Ax6$　$(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$，

$Ax7$　$A \to A \vee B$，

$Ax8$　$B \to A \vee B$，

$Ax9$　$(A \to C) \to ((A \to C) \to (A \vee B \to C))$，

$Ax10$　$(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$，

$Ax11$　$(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$，

$Ax12$　$(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$ [3]

以及排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 都永远取特征值 1，而分离规则 MP 也保持这一特征值。因而扩充系统 Lp' 中的定理都具有特征值 1。但是在 $V_1(A)=0$，$V_1(B)=1$ 时，有 $V_1((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)) = 0$。所以反证律 $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 不是扩充系统 Lp' 的定理。

五．尽管归谬律的证明能力弱于反证律，但是由正命题逻辑系统加上排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 是同样不能证明归谬律的。即归谬律同样独立于由正命题逻辑系统加上排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 而得到的扩充系统 Lp'。

我们定义三值语义解释 V' 如下：

定义 2：设 $Atomic(Lp)$ 是经典命题逻辑 Lp 的原子公式集，$Formula(Lp)$ 是命题逻辑的公式集。V' 称之为 Lp 的一个语义解释，当且仅当 V' 是满足以下条件的从 $Formula(Lp)$ 到 $\{0,\ 1,\ 2\}$ 上的映射，即：

$$V' \colon Formula(Lp) \to \{0,\ 1,\ 2\}$$

对 $Formula(Lp)$ 中的任意公式 a、b，

V'_{Atomic}：若 $a \in Atomic(Lp)$，则 $V'(a) \in \{0,\ 1,\ 2\}$；

A	$\neg A$
0	2
1	1
2	2

$A \vee B$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	2
2	2	2	2

$A \wedge B$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$A \to B$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

$A \leftrightarrow B$	0	1	2
0	2	1	0
1	2	2	1
2	0	1	2

在此语义解释之下，正命题逻辑系统的 12 条公理以及排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 都永远取特征值 2，而分离规则 MP 也保持这一特征值。但是在 $V_1'(A)=1$，$V_1'(B)=1$ 时，有 $V_1'((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)) = 1$。所以，归谬律也同样独立于由正命题逻辑系统加上排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 而得到的扩充系统 Lp'。

六．在由正命题逻辑系统加上排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 而得到的扩充系统 Lp' 中再增加公理 $Ax13$ $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$，可以证明归谬律。由于对于只有分离规则的正命题逻辑系统的扩充系统，演绎定理是成立的[4]。因此，在以下的证明中我们将直接使用演绎定理。

证明 4：1、$A \to B$ 前提

2、$A \to \neg B$ 前提

3、$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to B \wedge \neg B))$ $Ax6$

4、$(A \to \neg B) \to (A \to B \wedge \neg B)$ 1、3、MP

5、$A \to B \wedge \neg B$ 2、4、MP

6、$(A \to B \wedge \neg B) \to (\neg(B \wedge \neg B) \to \neg A)$ $Ax13$

7、$\neg(B \wedge \neg B) \to \neg A$ 5、6、MP

8、$\neg(B \wedge \neg B)$ 不矛盾律

9、$\neg A$ 7、8、MP

10、$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ 1~9 由演绎定理

公理 $Ax13$ 显然是独立于扩充系统 Lp' 的。因为在定义 2 的语义解释之下，当 $V_2'(A)=1$，$V_2'(B)=2$ 时，有 $V_2'((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))=1$。

另一方面，排中律 $A \vee \neg A$ 和不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ 也是独立于由正命题逻辑系统加上公理 $Ax13$ $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 而得到的扩充系统 Lp'' 的。如果我们将语义解释定义 1 中的 " $V_\neg$ ：如果 $V(a)=1$，或 $V(a)=0$，那么 $V(\neg a)=1$ "改为" $V_\neg$ ：如果 $V(a)=1$，或 $V(a)=0$，那么 $V(\neg a)=0$ "，那么扩充系统 Lp'' 中的公理永远都取特征值 1，分离规则 MP 也保持这一特征值。但是当 $V(A)=0$ 时，有 $V(A \vee \neg A)=0$ 并且 $V(\neg(A \wedge \neg A))=0$。

从上述证明中可以看出，归谬律证明中除了正命题逻辑系统实际只用到了不矛盾律和公理 $Ax13$。而由正命题逻辑系统加上归谬律也可以证明不矛盾律和公理 $Ax13$。

证明 5：1、$A \to B$ 前提

2、$\neg B$ 前提

3、$\neg B \to (A \to \neg B)$ $Ax1$

4、$A \to \neg B$ 2、3、MP

5、$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ 归谬律

6、$(A \to \neg B) \to \neg A$ 1、5、MP

7、$\neg A$ 4、6、MP

8、$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 1~7 演绎定理

1'、$(A \wedge \neg A \to A) \to ((A \wedge \neg A \to \neg A) \to \neg(A \wedge \neg A))$ 归谬律

2'、$A \wedge \neg A \to A$ $Ax4$

3'、$(A \wedge \neg A \to \neg A) \to \neg(A \wedge \neg A)$ 1'、2'、MP

4'、$A \wedge \neg A \to \neg A$ $Ax5$

5'、$\neg(A \wedge \neg A)$ 3'、4'、MP

所以，在正命题逻辑系统之上归谬律的证明能力与不矛盾律加上公理 $Ax13\ (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 的证明能力相当。

七．在正命题逻辑系统中增加排中律 $A \vee \neg A$、不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$、公理 $Ax13\ (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 和公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 可以证明反证律。

证明 6：1、$\neg A \to B$ 前提

2、$\neg A \to \neg B$ 前提

3、$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to B \wedge \neg B))$ $Ax6$

4、$(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to B \wedge \neg B)$ 1、3、MP

5、$\neg A \to B \wedge \neg B$ 2、4、MP

6、$(\neg A \to B \wedge \neg B) \to (\neg(B \wedge \neg B) \to \neg\neg A)$ $Ax13$

7、$\neg(B \wedge \neg B) \to \neg\neg A$ 6、7、MP

8、$A \vee \neg A$ 排中律

9、$(A \vee \neg A) \to (\neg(B \wedge \neg B) \to (A \vee \neg A))$ $Ax1$

10、$\neg(B \wedge \neg B) \to (A \vee \neg A)$ 8、9、MP

11、$(\neg(B \wedge \neg B) \to (A \vee \neg A)) \to$
$((\neg(B \wedge \neg B) \to \neg\neg A) \to (\neg(B \wedge \neg B) \to (A \vee \neg A) \wedge \neg\neg A))$ $Ax6$

12、$(\neg(B \wedge \neg B) \to \neg\neg A) \to (\neg(B \wedge \neg B) \to (A \vee \neg A) \wedge \neg\neg A)$

10、11、MP

13、$\neg(B \wedge \neg B) \to (A \vee \neg A) \wedge \neg\neg A$ 7、12、MP

14、$\neg(B \wedge \neg B)$ 不矛盾律

15、$(A \vee \neg A) \wedge \neg\neg A$ 13、14、MP

16、$(A \vee \neg A) \wedge \neg\neg A \to A$ $Ax14$

17、A 15、16、MP

18、$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A)$ 1~17 演绎定理

可以证明公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 是独立于扩充系统 Lp' 的。因为在语义解释定义 2 中，当 $V(A) = V(B) = 1$ 时，有 $V((A \vee B) \wedge \neg B \to A) = 1$，即公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 不具有系统 Lp' 定理的特征值 2。同样可以证明公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 是独立于扩充系统 Lp'' 的。因为在语义解释定义 1 中，当 $V(A) = 0$，$V(B) = 1$ 时，有 $V((A \vee B) \wedge \neg B \to A) = 0$，即公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 不具有系统 Lp'' 定理的特征值 1。所以在上述反证律的证明中公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 的增加不是可有可无的。

显然，在正命题逻辑系统中一旦增加了反证律，则排中律 $A \vee \neg A$、不矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$、公理 $Ax13\ (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 和公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 都可以得到证明[5]。

因此，在正命题逻辑系统之上反证律的证明能力与排中律、不矛盾律、公理 $Ax13\ (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 加上公理 $Ax14\ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 的证明能力相当。

八．在正命题逻辑系统中可以证明 $Ax13\ \ (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 等值于 $(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$。而 $(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$ 刻画的就是日常推理中常用的充分条件否定后件式。公理 $Ax14\ \ (A \vee B) \wedge \neg B \to A$ 刻画的就是日常推理中常用的选言推理否定肯定式。所以，也可以这样认为：在正命题逻辑系统和排中律、不矛盾律的基础上，归谬法的证明能力等价于充分条件否定后件式，而反证法的证明能力等价于充分条件否定后件式加上选言推理否定肯定式。

注释和参考文献

[1] 宋文坚. 逻辑学[M]. 人民出版社,1998. P86-92.

[2] 陆钟万. 面向计算机科学的数理逻辑[M]. 科学出版社,2002. P86-92.

[3] 周礼全. 逻辑百科辞典[M]. 四川教育出版社,1994. P685.

[4] A.G.Hamilton. Logic for Mathematicians [M]. 清华大学出版社,2003. P32-34.

[5] 张清宇 郭世铭 李小五. 哲学逻辑研究[M]. 社会科学文献出版社,1997.

Modern Analysis of Law of Indirect Proof and Reductio

Du Guo-ping [1,2]

(1.Nanjing University. Nanjing 210093,China; 2.Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016,China)

Abstract: By way of modern propositional logic, this paper proves three issues: Firstly, In positive propositional logical system, the indirect proof is more efficient than reductio, and the difference between them is that the former has the law of double negation. Secondly, reductio is equivalent to the law of non-contradiction with negative consequent of sufficient conditional additionally. At last, the law of indirect proof is equivalent to the combination of law of non-contradiction; excluded middle; negative consequent of sufficient conditional and negative affirmation form of disjunctive reasoning.

Key words: indirect proof, reduction to absurdity, positive propositional logical system , law of excluded middle, law of non-contradiction.

基金项目：国家社科基金项目（02CZX008）；南京大学引进人才基金项目；南京大学笹川青年教育基金项目。

作者简介：杜国平（1965-），男，汉族，江苏盱眙人，哲学博士，南京大学哲学系副教授、逻辑学教研室主任，南京航空航天大学计算机系计算机应用技术专业 2003 级博士研究生。

联系方式：Email: dgpnju@126.com **电话：**025-83597161　13851709631。