自信性认知逻辑

许涤非

（中国人民大学哲学系，北京，100871）

提要　本文首先对一些认知逻辑的认知原则进行了分析，陈述了承认以及反对某些认知原则的理由。建立了认知逻辑语义学，在这种语义学下，所承认的认知原则成立，而反对的认知原则不成立。构造了自信性以及弱自信性认知逻辑系统，讨论了这两个系统的特点以及相互关系。

关键词　逻辑全能，认知逻辑语义，K-系统，典范框架，典范模型。

中图分类号：B813　文献标识码：A

1　逻辑全能与认知 T-原则

自古以来，人们一直都在探索关于认知的本质及其过程。哲学的这个研究领域就是通常人们所说的“认识论”，而这个词正是来源于希腊语“知识”。柏拉图把知识定义为“合理且真的信念”，这个定义一直影响着哲学家和逻辑学家。二十世纪，就像许多概念一样，“知识”开始借助于形式逻辑的分析。随着十九世纪下半叶形式逻辑的发展，形式化的方法开始用于哲学概念的分析。这些概念包括：时间，必然性，义务，还有认知。这些逻辑的大多数都归结为模态逻辑。虽然模态逻辑最初形成是以刘易斯 1912 年发表的那篇关于“严格蕴涵的公理化”论文为标志的，但是模态化的认知逻辑却开始于 1962 年，创始人是 Hintikka。

模态化认知逻辑是用模态的方法表达认知语句，即在命题前加认知算子来表达认知语句。例如 $B_a\alpha$ 表示主体 a 认知 α。第一本详尽讨论模态化认知逻辑的书是 Hintikka 所著的《知识和信念》出版于 1962 年。这是一部非常有创意和令人深受启发的著作。Hintikka 所建立的关于知识和信念的逻辑是仿照模态逻辑对“必然”和“可能”的处理方法在技术上对知识和信念进行分析。它集中刻画知识和信念的内在性质。他把知识和信念区分开来，认为知识是经过验证为真的信念；信念却是可以撤销、可以修正的。由于这些逻辑系统在语法上采用了 K 公理和认知概括规则，所以在这些系统中，认知主体具有极端理想化的性质。这些性质包括：认知所有的逻辑真理；认知其已有知识的所有逻辑后承。对于一个实际的认知主体，无论是个人主体、集体主体还是人工智能主体，这显然都是过强的性质。这些性质，Hintikka 本人当时早已认识到了，他把这个问题称为逻辑全能问题（Logical Omniscience Problem）。正是存在问题才使得这本著作更加吸引人。

下面就逻辑全能问题作一个简单的介绍：

用正规模态逻辑系统对认知进行刻画，会有这样的结果：认知对于逻辑后承是封闭的并且逻辑定理一定是被认知的。

事实上，这种方法还能得到许多其它的性质。因为所有这些性质与理想化的认知主体有关，所以，它们被集中称为逻辑全能问题。（这里 B 代表的是认知算子）：

LO1：$\vdash B\alpha\wedge B(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow B\beta$

LO2：$\vdash\alpha\Rightarrow\vdash B\alpha$

LO3：$\vdash\alpha\rightarrow\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\rightarrow B\beta$

LO4：$\vdash\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\leftrightarrow B\beta$

LO5：$\vdash B\alpha \wedge B\beta \rightarrow B(\alpha \wedge \beta)$

LO6：$\vdash B\alpha \rightarrow B(\alpha \vee \beta)$

LO1 是说如果认知φ以及蕴涵式：$\alpha \rightarrow \beta$，那么一定会认知β。LO2 是说如果α是逻辑定理，那么α一定被认知。LO3 性质看似 LO1 类似，但是意思有很大的不同：如果认知α，那么就会认知α的所有逻辑后承β。也就是说，不管蕴涵式的逻辑定理能否被认识，一旦主体认知了某个公式，他就会认知这个公式的所有逻辑后承。LO4 是说，要么认知某个公式的所有逻辑等值式，要么全不认知它们。也就是说，如果认知某个公式，那么就会认知这个公式的所有逻辑等值式，否则，就对这些公式都一概不知，当然包括这个公式本身。LO5 是说，如果认知φ并且认知ψ，那么就会认知φ与ψ的合取式。LO6 是说，如果认知φ，那么就会认知φ与ψ的析取式。（事实上，这条性质可以由 LO3 直接得出。）虽然这些性质统称为逻辑全能问题，但是我认为并不是所有这些性质都与理性的认知主体有关，相反，有些性质对于一般认知主体或者对于有一定推理能力的认知主体来说，都是可以成立的。我认为 LO1，LO5 以及 LO6 对于有逻辑推理能力的认知主体来说，都是成立的。比如说 LO1，我们假设主体已经认知了α以及蕴涵式：$\alpha \rightarrow \beta$，而β是一个比$\alpha \rightarrow \beta$简单的公式，如果主体有逻辑推理能力，有什么理由不能认知β呢？我们在避免逻辑全能的同时，没有理由假设认知主体逻辑无能。逻辑全能与逻辑无能是认知的两个极端，承认一个而舍弃另一个的做法并不理想。LO5 对于理性的认知主体也是可以成立的。认知主体认知了两个命题，那么他当然会认知这两个命题的合取，除非他不是理性的，内心的想法矛盾。LO6 的性质相对来说较强，因为它要求认知主体认知$\alpha \vee \beta$是α的逻辑后承，而前面两条性质都未要求认知主体认知某些逻辑定理。然而本文承认这条性质是因为这条逻辑定理是如此简单，只要有一定逻辑推理能力的主体，就可能有这样的认知性质。因此，在本文所构造的逻辑系统中，这些性质都是系统的定理。

本文反对其余的三条性质。LO3 与 LO4 都可从 LO2 得到，因此 LO2 是最强的性质。LO2 赋予了认知主体认知所有的逻辑定理。这些性质都不现实。举个例子来说，人作为认知主体，不可能认知他所认知命题的所有逻辑后承。假设一个公式φ与另一个长度大于 1000 万个字符的公式ψ等值，虽然认知主体认知公式φ，但是认知主体却无法搞清楚ψ是什么。在认知主体资源有限的基础上，有时人们会否认或者消弱 LO2－LO4。这三条性质都是正规模态逻辑系统的推理规则。由于本文反对这三条性质，因此在本文所构造的逻辑系统中，它们都不是系统的推理规则。

有些模态化认知逻辑著作可能是受柏拉图的影响，认为区分“知道”与“相信”的标志是：知道的都是真的，而相信的未必是真的。也就是说，不会知道假的事件而可以相信假的事件。“知道”的这种认知原则，我们称之为 T-原则，公式表示为：$B\alpha \rightarrow \alpha$。然而一般的认知，即使是科学知识也没有如此强的性质，因为认知主体无法保证它所认知的就一定是真的。但是认知主体在主观上，却可以有这样的自信，即认知主体相信他的认知都是真的，公式表示为：B（$B\alpha \rightarrow \alpha$）。注意：我们这里的认知算子代表的是最抽象的“认知”，它是抽取了“相信”，“知道”，“认为”等这些认知的共同特征的认知。形如 $B\alpha$的公式都是主观公式，它表达了是认知主体主观上的想法。一般模态化认知逻辑的公理都是客观公式，我们希望建立一种刻画认知主体对自己认知自信的系统，因此 B（$B\alpha \rightarrow \alpha$）可以作为我们系统的公理。由于 T-原则太强，不适于一般的认知特点，所以我们还希望所建立的逻辑系统的任何扩充都不应含有 T-原则。

上面是在直观上对所要构造的系统作了简单的分析。那么下面我们需要找到一种语义学，它能够很好地解释我们刚才所分析的那些思想。

2　认知逻辑语义学背后思想

通过学习模态逻辑，我们知道：LO2-LO4 的推理规则在任一标准可能世界语义框架上有保有效性。因此，如果我们要找的语义是可能世界语义的话，它一定是非标准的可能世界语义学。我们采用的确实是一种可能世界语义学，它与标准的可能世界语义学的不同之处主要有两方面 ：

（1）区分了现实世界与认知可能世界。现实世界不是认知可能世界。它与可能认知世界具有不同的性质。（2）有效性定义的不同。标准的可能世界语义学的模型有效性需要在所有的可能世界上都真，而认知逻辑的语义学的模型有效性只需要在现实世界上真就可以了。

我们使用这样的语义学有一个较令人满意的结果，那就是我们构造的认知逻辑不但不会出现 $B\alpha\rightarrow\alpha$，而且保证他们的扩充都不会出现 $B\alpha\rightarrow\alpha$。

这一部分，我们要考察模态化认知逻辑背后的基本思想。

认知逻辑语义学中心概念有两个：“现实世界”和“认知可能世界”。其它的语义概念都是从这两个概念得到的。因此，我们首先来分析这两个概念。

现实世界在认知过程中占有特殊的地位。首先它是客观存在的，它不以认知主体的主观意志而改变。每一个认知主体所处的现实世界是一样的。

这里的认知逻辑语义学是一种静态的语义学，现实世界代表的是一种“最根本”的客观世界的本质，它不会随时间的改变而改变，并且这种最根本的客观存在是无法被认知主体完全认知的。

所有命题都有“真假”之分，判断命题正误是以现实世界为标准的。现实世界代表的是一种最根本的客观实在，从这种最根本的客观存在出发，会得到无穷多的与现实世界“一致”或“不冲突”的性质。当命题与现实世界“一致”，命题就是“真”的，反之，就是“假”的。

“认知可能世界集”W 是所有认知主体所能认识到的所有认知可能世界。每一个认知主体在现实世界上，都有一个特定的认知可能世界集 U，它是 W 的子集。这个认知可能世界集 U 决定了认知主体的认知范围和认知内容。不同的认知主体虽然同处于一个现实世界，但是由于认知能力的差异，所处环境的差异等等，导致了认知可能世界的不同，因而认知范围和内容就会不同。就像双胞胎的兄弟，因为先天的因素或者后天生活条件的差异，一个人拿到了博士学位，而另一个人还在农村务农。那么虽然他们同处于一个现实世界，但是一个人认为自己将来成为教授是可能的，而另一个则认为不是可能的。对于一个逻辑学家提出一套崭新的逻辑理论是可能的，但是对于一个音乐学家大概就不是可能的。同样，对于一个音乐家，谱写出一篇美妙的乐章是可能的，但是对于逻辑学家，大概也不可能。

“认知主体认知了命题α”，符号表示为：$B\alpha$。$B\alpha$的真值完全取决于 U 以及α在 U 中的真值。一个在北京的人知道现在北京在下雨，但是他对上海的天气一无所知。此时他的认知可能世界集就会有这样两个认知可能世界：w_1（在 w_1 上，北京在下雨而上海没下雨），w_2（在 w_2 上北京和上海都在下雨）。现在的实际状态是：北京在下雨而上海没下雨。值得注意的是，现在状态并不是现实世界，现在状态可以改变，并且它是认知可能世界，可以被认知主体认知。现实世界是不会改变的，它是一种永恒的存在，不会被认知主体认知。

在认知逻辑语义中，还有一个由认知可能世界集 W 生成的概念—认知通达关系。它是认知可能世界集 W 上的二元关系。$\langle w, w'\rangle\in R$，表示的是认知主体如果处在 w 的状态，那么他就会认为 w' 是认知可能的。例如在上面的例子中，$\langle w_1, w_2\rangle\in R$ 并且$\langle w_1, w_1\rangle\in R$ 但是$\langle w_1, w_3\rangle\notin R$（在 w_3 上，北京没下雨并且上海没下雨）。认知主体处在状态 w_1 上，知道北京在下雨，此时他不会认为 w_3 是认知可能世界，因为在 w_3 上，北京没下雨。认知主体处在状态 w_1 上，不知道上海是否下雨，因此就会认为有两种可能：一种上海在下雨，一种上海没下雨。这种对信息的不确定性就表现为多种认知可能。一般来说，一个认知主体如果对 n 个命题不确定的话，他就会认为有 2^n 个认知可能世界。

认知主体认知命题α，当且仅当在他的所有认知可能世界集上α都真。例如在上面的例子中，认知主体知道北京在下雨，那么在他的认知可能世界集 U 中的任一认知可能世界上，α都真。认知主体可以怀疑认知可能世界的真假，但是不会怀疑自己所认知的命题。

3 认知逻辑语义学

下面是其严格定义。

3.1 定义 框架 框架 K 是四元组 $<o, W, U, R>$，其中 W 是非空集合，U 是 W 的子集，R 是 W 上的二元关系，$o\notin W$。

W 称为认知可能世界集，W 的元素称为认知可能世界，R 称为认知通达关系，o 称为现实世界，U 称为主体所认知的世界。

3.2 定义 赋值和模型 $K = <o, W, U, R>$ 是框架。V 是全体公式的集合 Form 到 $W\cup\{o\}$ 的幂集 $P(W\cup\{o\})$ 的映射，如果 V 满足以下条件，则称 V 是 K 上赋值：

(1) $u\in V(\neg\alpha)$ 当且仅当 $u\notin V(\alpha)$；

(2) $u\in V(\alpha\rightarrow\beta)$ 当且仅当 $u\notin V(\alpha)$ 或 $u\in V(\beta)$；

(3) 对于 $u\in W$ 有

$u\in V(B\alpha)$ 当且仅当 任给 $v\in W$，如果 uRv，则 $v\in V(\alpha)$；

对于 o 有

$o\in V(B\alpha)$ 当且仅当 任给 $v\in U$，都有 $v\in V(\alpha)$。

$V(\alpha)$ 称为 α 在 V 下的值。$M = <K, V>$ 称为模型。

条件(3)说明：在认知可能世界 s 上或现实世界 o 上，主体知道公式 α 是真的，当且仅当在所有的可能世界 v（v 是主体深信的认知可能世界）上，α 都真。换句话说，尽管认知主体可能会怀疑认知可能世界的真实性（如果他认为至少存在一种认知可能），但是他并不怀疑 α 的真实性：这个公式在所有认知可能世界上都成立。所以，在这种情况下，我们确实可以说，主体认知公式 α。

3.3 定义 有效 $K = <o, W, U, R>$ 是框架。

(1) V 是 K 上赋值，$M = <K, V>$ 是模型。$M \models \alpha$ 当且仅当 $o\in V(\alpha)$。

(2) $K \models \alpha$ 当且仅当任给 K 上赋值，都有 $<K, V> \models \alpha$。

所以 $K \not\models \alpha$ 当且仅当存在 K 上赋值 V，使得 $<K, V> \not\models \alpha$，也就是存在 K 上赋值 V，使得 $o\notin V(\alpha)$。

3.4 引理 K 是框架。

(1) 如果 α 是重言式的代入，则 $K \models \alpha$。

(2) $K \models B(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(B\alpha\rightarrow B\beta)$。

(3) 如果 α 是重言式的代入或 K-公理，则 $K \models B^n\alpha$。

(4) 如果 $K \models \alpha$ 且 $K \models \alpha\rightarrow\beta$，则 $K \models \beta$。■

在认知逻辑框架上认知概括规则不具有保有效性。即“如果 $K \models \alpha$，则 $K \models B\alpha$”不成立。

3.5 定理 存在框架 $K = <o, W, U, R>$ 使得 $K \models \alpha$ 并且 $K \not\models B\alpha$。

证 取框架 $K = <o, W, U, R>$，其中 $U \neq \varnothing$，R 是 W 上的空关系。取 $\alpha = \neg(Bp \wedge B\neg p)$。

任给 W 上赋值 V，取 $u \in U$，就有

$u \notin V(p)$ 或 $u \notin V(\neg p)$。

所以

$o \notin V(Bp)$ 或 $o \notin V(B\neg p)$。

所以

$o \notin V(Bp \wedge B\neg p)$。

所以

$o \in V(\neg(Bp \wedge B\neg p))$。

因此 $K \models \neg(Bp \wedge B\neg p)$。

取 K 上赋值 V，取 $u \in U$，因为 R 是空关系，所以

不存在 $v \in W$，使得 uRv。

所以

$u \in V(Bp)$ 且 $u \in V(B\neg p)$。

所以

$u \in V(Bp \wedge B\neg p)$。

所以

$u \notin V(\neg(Bp \wedge B\neg p))$。

所以

$o \notin V(B\neg(Bp \wedge B\neg p))$。

因此 $K \not\models B\neg(Bp \wedge B\neg p)$。■

3.6 定义　自返框架 持续框架

$K = <o, W, U, R>$ 是框架。

（1）任给 $u \in U$，都有 uRu，则称 K 是自返框架。

（2）任给 $u \in U$，都存在 $v \in W$，使得 uRv，则称 K 是持续框架。

3.7 引理

（1）如果 K 是自返框架，则 $K \models B(B\alpha \rightarrow \alpha)$。

（2）如果 K 是持续框架，则 $K \models B\neg(B\alpha \wedge B\neg\alpha)$。■

4　自信系统 BT

自信系统 BT 有以下公理和推演规则组成：

一、 公理

1、 重言式公理 所有重言式的代入。

2、 K-公理 $B(\alpha\to\beta)\to(B\alpha\to B\beta)$。

3、 认知公理 $B^n\alpha$ （α是 1，2 形式的公理）

4、 自信公理 B（$B\alpha\to\alpha$）

二、 推理规则

分离规则 从α，$\alpha\to\beta$得到β。

$B^0\alpha=\alpha$，$B^1\alpha=B\alpha$，$B^n\alpha=BB^{n-1}\alpha$。

每个认知逻辑系统的有效性是由某个框架类所确定的。BT 系统的有效性（称为 BT-有效性）是由全体自返框架类所确定的有效性。

4. 1 引理 自信系统 BT 的公理是 BT-有效的。

证 见引理 3.4(1)(2)(3)，引理 3.7(1)。■

4. 2 定理 可靠性 如果$\vdash_{BT}\alpha$，则α是 BT-有效性的。

证 设α的证明序列是$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，归纳证明任给 $1\le i\le n$，α_i都是 BT-有效的。

(1) 如果α_i是公理，则由引理 4.1 得α_i是 BT-有效的。

(2) 如果存在 $1\le j, k<i$，使得$\alpha_k=\alpha_j\to\alpha_i$，则由归纳假设得$\alpha_j$和$\alpha_j\to\alpha_i$都是 BT-有效的，由引理 3.4(4)得$\alpha_i$是 BT-有效的。■

4.3 定理 $\vdash_{BT}\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\vdash_{BT}B\alpha\leftrightarrow B\beta$ 不是 BT 的导出规则。

证 （$p\leftrightarrow p$）$\leftrightarrow$ B（$Bp\to p$）是 BT 的内定理，但是 B（$p\leftrightarrow p$）$\leftrightarrow$BB（$Bp\to p$）不是 BT 的内定理。这是因为 B（$p\leftrightarrow p$）$\to$ BB（$Bp\leftrightarrow p$）不是 BT-有效性的。

取自返框架 $M=\langle o, W, U, R, V\rangle$，其中 $W=\{s, t\}$，$U=\{s\}$，$R=\{\langle s, s\rangle$，$\langle s, t\rangle\}$，$t\notin V(p)$。

因为（$p\leftrightarrow p$）是重言式，所以它在任一世界上都是真的。所以 $s\in V(p\leftrightarrow p)$。所以 $o\in V(B(\alpha\leftrightarrow\alpha))$。

因为 t 没有可及世界，所以 $t\in V(Bp)$。但是 $t\notin V(p)$，所以 $t\notin V(Bp\to p)$。因为$\langle s, t\rangle\in R$，所以 $s\notin V(B(Bp\to p))$。因为 $s\in U$，所以 $o\notin V(BB(Bp\to p))$。

因为 $o\in V(B(p\leftrightarrow p))$并且 $o\notin V(BB(Bp\to p))$，所以 $o\notin V(B(p\leftrightarrow p)\to BB(Bp\to p))$。■

4. 4 定理 $\vdash_{BT}\alpha\to\beta\Rightarrow\vdash_{BT}B\alpha\to B\beta$ 不是 BT 的导出规则。

证 与定理 4.3 可得。■

至此，我们已经证明了 BT 系统没有 L02－L04 性质。

虽然系统没有 L02－L04 性质，但是系统却有较弱的类似于 L02－L04 的性质。

4.5 定理

（1）$\vdash_p \alpha \Rightarrow \vdash B\alpha$

（2）$\vdash_p \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash B\alpha \rightarrow B\beta$

（3）$\vdash_p \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash B\alpha \leftrightarrow B\beta$ ■

$\vdash_p \alpha$表示重言式，P 表示经典命题演算系统。

在前面，我们曾经承认了逻辑全能的三种性质，第一条已经体现在系统的公理上，即 K-公理，我们现在来证明其它两条性质使系统的定理。

4.6 定理

（1）$\vdash_{BT} B\alpha \wedge B\beta \rightarrow B(\alpha \wedge \beta)$

（2）$\vdash_{BT} B\alpha \rightarrow B(\alpha \vee \beta)$ ■

4.7 定义 无概括规则的证明 在 K 系统中，概括规则只用于形如 $B^n\alpha$ 的公式（其中 $n \geq 0$，并且α是 K 系统的公理）的证明称为无概括规则的证明。

在无概括规则的证明的公式序列中，认知概括规则作用的公式要么是公理，要么是 $B^n\alpha$，其中α是公理。

4.8 引理 每一个 K 系统的定理α都有一个无认知概括规则的证明。

证 施归纳于定理的证明长度。证明的基始很明显，这种情况下公式序列就是公理。

假设当长度大于 1 小于 n 时结论成立，$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是$\alpha=\alpha_n$ 的证明。如果α是由前面的公式α_i，α_j 经分离规则得到的，$1 \leq i$，$j<n$。根据归纳假设，存在α_i，α_j 的无概括规则证明。这两个证明合在一起再使用分离规则，就得到α的无概括规则证明。

如果α是由前面的公式α_i 经概括规则得到的，$\alpha = B\alpha_i$。假设$\beta_1 \cdots \beta_m$，$\alpha_i=\beta_m$，是α_i 的无概括规则的证明，并且$\chi_1 \cdots \chi_k$ 是证明序列中的所有公理。那么$\chi_1 \cdots \chi_k, B\chi_1 \cdots B\chi_k, B\beta_1 \cdots B\beta_m$就是$\alpha$的无概括规则证明。这是因为从 $B(\varphi \rightarrow \psi)$，$B\varphi$可以得到 $B\psi$。■

4.9 定理 K 系统是 BT 的子系统。■

4.10 引理 x 是 K 极大和谐集，如果 $B\alpha \rightarrow \alpha \in x$，则 $x^- \subseteq x$。

证 任给$\alpha \in x$，都有 $B\alpha \in x$，由 $B\alpha \in x$ 和 $B\alpha \rightarrow \alpha \in x$ 得$\alpha \in x$，所以 $x^- \subseteq x$。■

4.11 定理 x 是 K-极大和谐集，如果 $B\alpha \notin x$，则存在 K-极大和谐集 A，使得 $x^- \subseteq A$ 且$\alpha \notin A$。■

4.12 引理 如果$\nvdash_{BT} \alpha$ ，则 $Th(BT) \cup \{\neg\alpha\}$是 K-和谐的。

证　假设 Th (BT)$\cup\{\neg\alpha\}$**不是** K-**和谐的。那么** Th (BT)$\cup\{\neg\alpha\}$**不是** BT-**和谐的。所以** Th (BT) $\vdash_{BT}$ α**，因此**$\vdash_{BT}$ α**。矛盾。■**

4.13 引理　设 M = <K′, V′>**是标准的** K **典范模型，其中** K′ = <W, R>**，则**

(1) **任给** $u\in V'(\alpha)$ **当且仅当** $\alpha\in u$**。**

(2) **如果**$\nvdash_{BT}\alpha$**，则存在** $x\in W$**，使得** $Th(BT) \subseteq x$ **且**$\alpha\notin x$**。**

证　(1)**可参见**[2]**有关** K **系统完全性的证明。**

(2) **由引理** 4.12 **以及** lindenbaum **定理（每一个** K **和谐集都可以扩充为** K **极大和谐集）得到。■**

4.14 引理　如果$\nvdash_{BT}\alpha$ **，则存在自返框架** K=<o, W, U, R>**，**$K \not\models\alpha$ **。**

证　$\nvdash_{BT}\alpha$ **，则**$\nvdash_{K}\alpha$**。利用典范模型的方法，可以得到标准的典范框架** K′=<W, R>**，使得** K′, x $\not\models\alpha$**，并且** Th (BT)$\cup\{\neg\alpha\}\subseteq x$**。在框架** K′=<W, R>**的基础上，可以得到单主体认知框架** K=<o, W, U, R>**。将框架** K′=<W, R>**上增加一个点** o**，**$o\notin W$**。**$u\in U$ **当且仅当** $x^{-}\subseteq u$**。在** K **上的赋值** V**，如下：**

任给 $u\in W$**，**$u\in V(p)$ **当且仅当** $u\in V'(p)$**；**$o\in V(p)$ **当且仅当** $x\in V'(p)$**。**

通过归纳可以得到 $u\in V(\alpha)$ **当且仅当** $u\in V'(\alpha)$**；**$o\in V(\alpha)$ **当且仅当** $x\in V'(\alpha)$**。**

(1) **任给** $u\in W$**，对**α**作归纳。**

α**是命题变项，由定义直接可得，**$\alpha = \neg\beta$**，**$\alpha = \beta\to\gamma$**显然，略。这里只证**$\alpha = B\beta$**时的情况。**

$u\in V'(\alpha)$**，即** $u\in V'(B\beta)$**。根据定理** 4.11**，**$u\in V'(B\beta)$**当且仅当任给** uRv**，都有** $v\in V'(\beta)$**。由归纳假设，可得** $v\in V'(\beta)$**当且仅当** $v\in V(\beta)$**。任给** uRv**，都有** $v\in V(\beta)$**当且仅当** $u\in V(B\beta)$**。所以** $u\in V'(B\beta)$ **当且仅当** $u\in V(B\beta)$**。**

(2)**对于现实世界** o**，对**α**作归纳。**

α**是命题变项，由定义直接可得，**$\alpha = \neg\beta$**，**$\alpha = \beta\to\gamma$**显然，略。这里只证**$\alpha = B\beta$**时的情况。**

$O\in V'(\alpha)$**，即** $o\in V'(B\beta)$**。根据定理** 4.11**，**$o\in V'(B\beta)$ **当且仅当 任给** $u\in U$**，都有** $u\in V'(\beta)$ **当且仅当给** xRu**，都有** $u\in V'(\beta)$**。由**(1)**，可得** $u\in V'(\beta)$**当且仅当** $u\in V(\beta)$**。所以** $o\in V'(B\beta)$ **当且仅当 任给** xRu**，都有** $u\in V(\beta)$**当且仅当** $x\in V(B\beta)$**。**

任给 $u\in U$**，则** $x^{-}\subseteq u$**。**$B(B\alpha\to\alpha)\in Th(BT)$**，所以** $B(B\alpha\to\alpha)\in x$**。所以** $B\alpha\to\alpha\in u$**。**

由引理 4.10**，可得** $u^{-}\subseteq u$**。**

因此 K **是自返框架。■**

4.13 定理　完全性　**BT **系统具有完全性。

证　由引理 4.13 **直接可得。■**

5　弱自信系统 BD

认知主体相信自己的认知都是真的体现了认知主体对自己认知的自信。认知主体还可以有一种较弱的自信，那就是认知主体相信自己的认知没有矛盾，即相信自己不会同时认知一个命题和其否定，公式表示为：$B\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha)$**。可以建立刻画认知主体弱自信的逻辑系统** BD**。**

弱自信系统 BT 有以下公理和推演规则组成：

一、公理

1、 重言式公理　所有重言式的代入。

2、 K-公理　$B(\alpha\to\beta)\to(B\alpha\to B\beta)$。

3、 认知公理　$B^n\alpha$　（α是 1，2 形式的公理）。

4、 弱自信公理　$B\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha)$。

二、 推理规则

分离规则　从α，$\alpha\to\beta$得到β。

系统内的证明以及系统内定理的定义如常，这里不再赘述。

BD 系统的有效性（称为 BD-有效性）是由全体持续框架类所确定的有效性。

5.1 引理 弱自信系统 BD 的公理是 BD-有效的。

证 见引理 3.4(1)(2)(3)，引理 3.7(2)。■

5.2 定理 可靠性 如果$\vdash_{BD}\alpha$，则α是 BD-有效性的。■

5.3 定理 $\vdash_{BD}\alpha\to\beta\Rightarrow\vdash_{BD}B\alpha\to B\beta$ 不是 BD 的导出规则。■

5.4 定理 $\vdash\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\leftrightarrow B\beta$ 不是 BD 的导出规则。■

所以，BD 系统也没有 L02－L04 性质。同样，BD 系统也有 L02－L04 弱推理规则。

5.5 定理

（1）$\vdash_p\alpha\Rightarrow\vdash B\alpha$

（2）$\vdash_p\alpha\to\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\to B\beta$

（3）$\vdash_p\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\leftrightarrow B\beta$ ■

5.6 定理

（1）$\vdash_{BD}B\alpha\wedge B\beta\to B(\alpha\wedge\beta)$

（2）$\vdash_{BD}B\alpha\to B(\alpha\vee\beta)$ ■

给出了这两个系统，人们自然会想到它们之间的关系。直观上说，自信是相信自己认知的都是真的，因此也就会相信自己认知无矛盾，因为矛盾不可能真。事实上，可以证明弱自信公理是 BT 系统的内定理。

5.7 定理 $\vdash_{BT}B(\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha))$。■

5.8 定理 BT 是 BD 的真扩充。

证 由上面的定理，我们只需证自信公理不是 BD 的内定理就可以了。

取 $K = \langle o, W, U, R\rangle$满足：

$W = \{u, v\}$，$U = \{u\}$，$R = \{\langle u, v\rangle, \langle v, v\rangle\}$，

则 K 是持续框架。

取 K 上赋值 V，满足 $v\in V(\alpha)$且 $u\notin V(\alpha)$，则 $u\in V(B\alpha)$，所以

$u\notin V(B\alpha\to\alpha)$，

所以

$K \not\models B(B\alpha\to\alpha)$。

因为 K 是持续框架，所以 $B(B\alpha\to\alpha)$不是 BD-有效的，由 BD 的可靠性定理，$B(B\alpha\to\alpha)$不是 BD 的内定理。■

5.9 引理 x 是 K-极大和谐集，如果$\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha)\in x$，则存在 K-极大和谐集 A，使得 $x^{-}\subseteq A$。

证 如果$\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha)\in x$，则

$B\alpha\notin x$ 或 $B\neg\alpha\notin x$，

由定理 4.11 存在 K-极大和谐集 A，使得 $x^{-}\subseteq A$。■

5.10 引理 如果$\nvdash_{BD}\alpha$，则 $Th(BD)\cup\{\neg\alpha\}$是 K-和谐的。■

5.11 引理 如果$\nvdash_{BD}\alpha$，则存在持续框架 $K=\langle o, W, U, R\rangle$，$K\not\models\alpha$。

证 $\nvdash_{BD}\alpha$，则$\nvdash_{K}\alpha$。利用典范模型的方法，可以得到标准的典范模型 $M'=\langle K', V'\rangle$，使得$\langle K', V'\rangle \not\models_{x}\alpha$，并且 $Th(BD)\cup\{\neg\alpha\}\subseteq x$。在框架 $K'=\langle W, R\rangle$的基础上，可以得到单主体认知框架 $K=\langle o, W, U, R\rangle$。将框架 $K'=\langle W, R\rangle$上增加一个点 o，$o\notin W$。$u\in U$ 当且仅当 $x^{-}\subseteq u$。在 K 上的赋值 V，如下：

任给 $u\in W$，$u\in V(p)$ 当且仅当 $u\in V'(p)$；$o\in V(p)$ 当且仅当 $x\in V'(p)$。

通过归纳可以得到 $u\in V(\alpha)$ 当且仅当 $u\in V'(\alpha)$；$o\in V(\alpha)$ 当且仅当 $x\in V'(\alpha)$。

任给 $u\in U$，则 $x^{-}\subseteq u$。$B\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha)\in Th(BT)$，所以 $B\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha)\in x$。所以$\neg(B\alpha\wedge B\neg\alpha)\in u$。由引理 5.9，可得存在 $v\in W$，使得 $u^{-}\subseteq v$。因此 K 是持续框架。■

5.14 定理 完全性 BD 系统具有完全性。

证 由引理 5.11 直接可得。■

6 讨论

自信性系统 BT 与弱自信性系统 BD 完全性的证明非常相似，这是由这两个系统的共同特征决定的。

自信性系统 BT 和弱自信性系统 BD 都是 K 系统的扩张，同时它们又都是非正规的模态逻辑系统。自信性公理表达的是认知主体主观认为自己的认知都是真的，弱自信性公理表达的是认知主体认为自己的认知无矛盾。这两个系统的特征公理表达的都是认知主体主观认为的性质，它们都是形如 $B\alpha$的公式，我们称这样的公式为主观公式。因为这两个系统都是非正规系统，更确切地说这两个系统没有认知蕴涵规则：$\vdash\alpha\rightarrow\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\rightarrow B\beta$ 因此无法用典范模型的方法证明其完全性能。但是这两个系统有一个显著的特征，即都是 K 系统的扩张，并且特征公理是主观公式，因此可以通过 K 系统的典范模型的方法构造两个系统的非定理的反模型。具体的思路如下：

$\nvdash_s\alpha$ ，则$\nvdash_k\alpha$ 。所以$\neg\alpha$是 K-一致的。因为 K 系统是正规系统，所以 K 系统有典范模型。因此就有 K 系统的α的反模型。我们希望从 K 系统的α的反模型造出 S 系统的α反模型。两者之间的联系就是：$\neg\alpha$是 S-一致的，一定有 $TH(S)\cup\neg\alpha$是 K-一致的。所以 $TH(S)\cup\neg\alpha$可以扩张为 K-极大和谐集 x。此时，在 K 系统的α-反模型（典范模型）的 x 点上，α假。我们可以在这个典范模型的框架上，增加一个点 o，$o\notin W$，并且把 x“模拟”为现实世界 o。也就是说，把与 x 有认知关系的认知可能世界“复制”成现实世界的认知可能世界集 U。这样，我们就得到了认知语义框架<o, W, U, R>，其中<W, R>是 K 系统的典范框架。两种框架上的赋值的关系是：在每一个认知可能世界上，公式的赋值都相同；在现实世界上的赋值与 x 的赋值相同。此时就找到了α-反模型（认知语义模型）。要证 S 系统的完全性，我们还需要证这个α-反模型的框架属于 S 有效框架类。S 系统的特征公理都是主观公式 $B\alpha$，并且 $B\alpha$在此模型中是有效的，因此任给 $u\in U$，都有$\alpha\in u$。这样根据模态公式与框架对应关系，就可以判断出此模型属于 S 有效框架类，从而证出完全性。

这种完全性证明方法适用于这样的系统 S：S 是 K 系统的非正规系统，并且系统的特征公理是主观公式。

我们所构造的两个系统分别刻画了主体自信以及弱自信。在这两个系统中，消弱了逻辑全能问题。LO2-LO4 在这两个系统中不再成立。但是，它们对认知主体仍然赋予了很强的认知性质：

（1）$\vdash_p\alpha\Rightarrow\vdash B\alpha$

（2）$\vdash_p\alpha\rightarrow\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\rightarrow B\beta$

（3）$\vdash_p\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\vdash B\alpha\leftrightarrow B\beta$

这三条性质可以说都是由重言式公理，K-公理以及分离规则得到的。既然我们已经承认了 K-公理，那么我们就来考虑重言式公理。认知主体可以认知所有的重言式，这是一条非常强的认知性质。试想假设重言式是一个长度大于 1000 万个字符的公式，一般的认知主体在资源有限的基础上是无法认知这样的公式的。因此，我们所构造的系统只是在某种程度上减弱了逻辑全能问题。

参考文献

［1］许涤非，双主体认知逻辑研究 [J]，《自然辩证法研究》2002 年增刊，1-6。

［2］Alexander Chagrov, Michale Zakharyashev [M]. Modal Logic, Clarendon Press, 1997. ISBN:0 19 853779 4

［3］ G. E. Hughes, M. J. Cresswell, A New Introduction to Modal Logic [M]. T. J. Press(Padstow) Ltd., 1996. ISBN: 0-415-12599-5(hbk) ISBN: 0-415-12600-2(pbk)

［4］ Edited by Lou Goble, The Blackwell Guide to Philosophical Logic [M]. Blackwell Publishers Ltd., 2001. ISBN:0-631-20692-2(alk. Paper)－ISBN 0-631-20693-0(pb,: alk. Paper)

Self-belief epistemic logics

XU Di-fei

(Philosophy Department, Renmin University of China, Beijing, 100871)$

Abstract： In this paper, the author analyzes some epistemic principles and states why she accepts some principles and opposes the others. Then introduces semantics of epistemic logic. In this semantics, the principles accepted hold, while the ones opposed do not. Finally two self-belief epistemic logics are constructed. Some properties of the logics and the relation between the two logics are discussed.

Key Word Logic Omniscience, semantics of epistemic logic, K-system, Canonical Frame, Canonical Model

作者简介：许涤非(1975－)，**女**(**汉族**)，**河南安阳人，中国人民大学讲师，博士，研究方向：符号逻辑**。