基于拉姆齐公理的效用理论

熊卫

（中山大学逻辑与认知研究所、哲学系， 广东 广州 510275）

摘要： 基于拉姆齐的概念和公理，我们论证存在一个效用函数，它定量地刻画了价值，并且合理地表达了价值的定性概念。

关键词： 贝叶斯理论；价值；偏好；效用

中图分类号： B81 **文献标识码：** A

1 问题的背景

在贝叶斯归纳逻辑理论中，决策模型包含有三个元素，即侯选行为集 A、世界状态集 S 和侯选行为的后果集 O。众所周知，决策是在侯选行为集中选择某一行动方案，要达到这一目标，我们必须对侯选行为的价值给以评判。对于贝叶斯理论来说，评估侯选行为的价值需要通过评估行为后果的效用和有关世界状态的信念度来实现。因此，确定行为后果的效用是这一理论的关键。进一步，拉姆齐（F Ramsey，贝叶斯理论的代表性人物之一）是在效用的基础上定义信念度概念，从而建立他的理论（参见[1]）。可见，明确行为后果的效用，对于拉姆齐的理论乃至贝叶斯归纳逻辑理论来说具有十分重要的意义。但是，拉姆齐的论文非常简洁，他在进行哲学分析的同时仅提出了几个公理，并简要地说明了信念度概念的性质，并没有证明存在效用函数。另外，在我们所涉及有影响的文献中[2-5]，作者仅仅是举例说明拉姆齐的思想，没有在他的公理基础上完成这项工作。

我们可以从两个角度来刻画价值这个概念：其一，从定性的角度，可以用偏好等概念来表达，通常偏好用"对此的喜爱不次于彼"来描述，可见它实际上是个比较的概念；其二，从定量的角度，定量价值经常被称为效用，它是定性概念的数值表示，也就是说它表达定性概念。显然，定性概念是根本的[6]。比方说，如果我们没有轻重的概念，那么说某物体的重量为 500 克和两物体重量差为 500 克是没有意义的。本文将基于拉姆齐的概念和公理，论证存在一个效用函数，并考察它的一些性质。

2 基本概念及拉姆齐公理

任何行为都将产生相应的后果，但这些后果不仅仅取决于相应的行为，而且还依赖于我们的可能世界状态。例如，当事人要从广州去到北京，可选择的交通工具有飞机和火车。显而易见，乘飞机所带来的后果——所花时间的长或短——取决于行程过程中的天气状况（世界状态）。因此，一个候选行为 a_i ($a_i \in A$)可以表达为"a 如果 p， b 如果¬p"，我们把这一形式记为 (a_p， $b_{\neg p}$)，这里，a， b ∈O，p 为一命题。

定义 1 一个候选行为或后果称为一个选项，选项集 $F= A\cup O$。

定义 2 令 $f \geqq g$ 为 "对 f 的喜爱不次于 g"。 我们称偏好 "≧" 为一个弱序，当且仅当：

对任何 f， g， $h\in X$，

(i)传递性：如果 $f\geqq g$ 且 $g\geqq h$， 那么 $f\geqq h$，

(ii)连通性：$f\geqq g$ 或 $g\geqq f$（或同时成立）。

进一步，我们定义无殊关系“ ~ ”和严格偏好关系“ $\succ$ ”分别为：

$f\sim g$ 当且仅当 $f\geqq g$ 且 $g\geqq f$，

$f\succ g$ 当且仅当 $f\geqq g$ 且非$(g\geqq f)$。

我们把 $f\sim g$ 和 $f\succ g$ 分别读着“ f 与 g 是无殊的或是相当的 ”和“ 对 f 的喜好超过 g ”。以上三种关系都是非空集 X 上的二元关系。上述定义是以关系“ ≧ ”为前提的，容易证明关系“ ~ ”和“ $\succ$ ”具有传递性。

定义 3 一个命题 p 被称为是伦理中立命题，如果对于行为$(a_p, b_{\neg p})$总有 $a\sim b$。 这里，a，$b\in O$。

例如，掷一枚硬币结果为正面朝上和某人的头发总数为奇数这些断言都是伦理中立命题，因为根据某一行动（比如打赌），由这两个命题所带来的后果在价值（定性方面）上总是相当的。实际上，$(a_p, b_{\neg p})$即为$(b_{\neg p}, a_{\neg\neg p})$，因而，如果 p 为一个伦理中立命题，那么它的否定也是一个伦理中立命题。

定义 4 一个伦理中立命题 p 的信念度被认为是二分之一，如果$(a_p, b_{\neg p})\sim(a_{\neg p}, b_p)$。

定义 5 a 和 b 之间的价值（定性的）差异相当于 c 和 d 之间的价值差异，如果$(a_p, d_{\neg p})\sim(b_p, c_{\neg p})$， 这里 p 为一个伦理中立命题。我们记为 $a\oslash b = c\oslash d$。

相应地，我们可以作如下定义。

定义 6 a 和 b 之间的价值（定性的）的和相当于 c 和 d 之间的价值和，如果$(a_p, b_{\neg p})\sim(c_p, d_{\neg p})$， 这里 p 为一个伦理中立命题。我们记为 $a\oplus b = c\oplus d$。

由定义 5 和定义 6，算子⊕和⊘是选项之间的定性关系，并且可得：如果 $a\oslash b= c\oslash d$，那么 $a\oplus d= b\oplus c$。

下面，我们基于以下公理探讨定量价值。

公理 1 存在一个伦理中立命题 p，它的信念度为二分之一。

公理 2 如果选项 a 无殊于 b 且选项 b 无殊于 c，那么选项 a 无殊于 c。

公理 3 $(a, b, c)\exists(x)\ (a\oslash x = b\oslash c)$。

公理 4 $(a, b)\ \exists(x)\ (a\oslash x = x\oslash b)$。

公理 5 如果 $a\oslash b= c\oslash d$， 且 $c\oslash d= e\oslash f$， 那么 $a\oslash b= e\oslash f$。

公理 6 Archimedes 公理。 若 $c\oslash d\succ a\oslash b$，存在一个正整数 n，使得 $a'\succ c\oslash d$，这里 a'为 n 个 $a\oslash b$ 的价值和。

拉姆齐在这些公理前面阐明了以下观点（参见[1]）：让我们把任何一个在等同程度上好于一个给定世界的所有这些世界的集合称为一个值：我们假定世界α好于β，那么任何一个其值等于α的值的世界都好于任何一个其值等于β的值的世界，并且我们将说α的值大于β的

值，“大于”这个关系把值排列成一个有序列。同时，公理 2 表明无殊关系具有传递性。由此可见，拉姆齐已经假设了当事人的偏好关系“≧”是弱序。

根据公理 1， 定义 5 和定义 6 是有意义的。值得注意的是，拉姆齐在文献[1]中列举了包括上述公理的八个公理，其他的两个其中之一实际上为定义 5，该定义是在公理 1 的条件下所定义的，本文将把它作为一个定义而运用到论证之中。另外一个为连续性公理，它假设了级数都有极限，下文我们将证明有关极限的存在，因此，在本文的公理中也没有将它纳入其中。

3　效用函数及其性质

根据定义 4，令 a 无殊于 b，那么当事人由二分之一的信念度所引导的行为是把价值（定性的）上总是相当的赌注押在 p（p 是伦理中立命题）或$\neg p$，他的态度是把赌注押在哪一方完全无所谓。这时，我们说由二分之一的信念度所引导的行为的效用（定量价值）为零。令 b_0 的效用为零，$b_1(b_1 \succ b_0)$的效用为 1。由公理 4，存在一个 a_1，且 a_1 的效用为 1/2。故存在两个分割元：$a_1 \oslash b_0$ 和 $b_1 \oslash a_1$，其中每个分割元的效用为 1/2。同理， 对于(a_1, b_0)和(b_1, a_1)，分别存在 a_2 和 a_3，并且 a_2 和 a_3 的效用为 1/4，这样对于 $b_1 \oslash b_0$ 来说存在四个分割元：$a_2 \oslash b_0$、 $a_1 \oslash a_2$、$a_3 \oslash a_1$ 和 $b_1 \oslash a_3$，其中每个分割元的效用为 1/4。继续 n 步这样的程序，我们便可将 $b_1 \oslash b_0$ 分割为 2^n 个元素，并且其中的每个元素的效用为 $1/2^n$。我们称$\{a_i\}$，i=1，2， …， 2^n，为 $b_1 \oslash b_0$ 的一致分割。根据公理 5，价值差异的相等关系具有传递性，这样我们便得到一个正单位，它存在一个具有 2^n 个元素的一致分割，其中每个元素的效用为 2^{-n}。进一步，由公理 3，存在 d_1，使得 $b_0 \oslash d_1 = b_1 \oslash b_0$，故 d_1 的效用为-1。根据上述定理，存在 $b_0 \oslash d_1$ 的一个具有 2^n 个元素的一致分割，并且其中的每个分割元的效用是-2^{-n}。所以，我们同样也可以得到一个负单位。

有了这些单位，我们可以度量任何选项的定量价值，就象分别用“米”作为长度单位和“克”作为重量单位来度量物体的长度和重量一样。

令 $b_0(d_0)$，b_1 和 d_1 的价值分别为 0，1，-1，b_i 为 i（i= 0， 1，…， m）个 $b_1 \oslash b_0$ 的价值和，d_j 为 j（j= 0， 1， …， n）个 $d_1 \oslash d_0$ 的价值和，这样。b_i 和 d_j 的效用分别为 i 和-j。由公理 6，对于任意 c，$c \in O$，当 $c \succ b_0$ 时，存在正整数 r+1，$r \geq 0$， 使得 $b_{r+1} \succ c \geqq b_r$；当 $b_0 \succ c$ 时，存在正整数 r+1，$r \geq 0$， 使得 $d_r \succ c \geqq d_{r+1}$。

定义 7 令$\{a_i\}$， i=1，2，…， 2^n 为正单位或负单位的一个一致分割，$b_0(d_0)$， b_1 和 d_1 的价值分别为 0， 1， -1， $L_c(n)$为最大的 k，使得:

(i) $\oplus_{i=0}^{k} a_i \leqq c \oslash b_r$，如果 $c \geqq b_0$。 这里 b_r 为一个后果，且有 $b_{r+1} \succ c \geqq b_r$;

(ii) $\oplus_{i=0}^{k} a_i \geqq d_r \oslash c$，如果 $c \prec d_0$。 这里 d_s 为一个后果，且有 $d_r \succ c \geqq d_{r+1}$。

定理 1 令 $n \to \infty$， 那么 $L_c(n)/2^n$ 的极限是存在的。

证明。 对于任意正整数 n，令 t 为最小的正整数，它使得：

(i) $\oplus_{i=1}^{t} a_i \succ c \oslash b_r$， 如果 $c \geqq b_0$。这里 b_r 如上述定义，

(ii) $\oplus_{i=1}^{t} a_i \prec d_r \oslash c$， 如果 $c \prec d_0$。这里 d_r 如上述定义。

显然 $L_c(n)$= t-1。不妨假设 m> n， 那么我们有 $L_c(m) \leq 2^{m-n}(t+1)$。这样有，

$$\left|\frac{L_c(m)}{2^m}-\frac{L_c(n)}{2^n}\right| = \left|\frac{2^n L_c(m)-2^m L_c(n)}{2^m 2^n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{2^n 2^{m-n}(t+1)-2^m(t-1)}{2^m 2^n}\right|$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}$$

因此， $L_c(n)/2^n\ (n\to\infty)$**的极限是存在的。证毕。**

现在，我们可定义一个效用函数如下：

定义 8 **令** $v(c)$**为后果** c **的效用，**

$$v(c)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\dfrac{L_c(n)}{2^n}+r & b_0\leqq c\\ -\lim_{n\to\infty}\dfrac{L_c(n)}{2^n}-r & c\prec b_0\end{cases}$$

这里 r **为** b_r **的效用，** **且** $b_{r+1}\succ c\geqq b_r$**，**-r **为** d_r **的效用，** **且** $d_r\succ c\geqq d_{r+1}$**。**

定理 2 $f\ \geqq g$ **当且仅当** $v(f)\geq v(g)$**。**

证明。 （i）**假设** $f\geqq b_0$**，且** $g\geqq b_0$**。如果** $b_r\leqq f$**，** $g\prec b_{r+1}$**，那么根据定义** 7 **有，**$f\geqq g$ **当且仅当** $L_f(n)\geq L_g(n)$**。因此，** $f\geqq g$ **当且仅当** $v(f)\geq v(g)$**。如果** $b_r\leqq f\prec b_{r+1}$ **且** $b_s\leqq g\prec b_{s+1}$**，** **那么，**$f\geqq g$ **当且仅当** $r\geq s$**，进而当且仅当** $v(f)\geq v(g)$**。** （ii）**假设** $f\prec b_0$**，** **且** $g\prec b_0$**。** **如果** $d_s\geqq f$**，** $g\succ d_{s+1}$**，** **那么，**$f\geqq g$ **当且仅当** $L_f(n)\leq L_g(n)$**。** **因此，**$f\geqq g$ **当且仅当** $v(f)\geq v(g)$**。如果** $d_s\geqq f\succ d_{s+1}$ **且** $d_t\geqq g\succ d_{t+1}$**，** **那么，**$f\geqq g$ **当且仅当** $s<t$**，** **进而当且仅当** $v(f)\geq v(g)$**。** （iii） **最后，假设** $f\geqq b_0$ **且** $g\leqq b_0$**，那么由定义** 8**，** **结论显然成立。证毕。**

定理 3 $v(a)=v(b)$**当且仅当** $v(a)+v(c)=v(b)+v(c)$**。**

证明。 **定义** 8 **直接可得到。证毕。**

有了效用函数，我们就可以象拉姆齐那样定义信念度：如果$(v(a)_p,\ v(a)_{\neg p})\sim(v(b)_p,\ v(c)_{\neg p})$**，那么命题** p **的信念度为**$\dfrac{v(a)-v(c)}{v(b)-v(c)}$**。这时，行为**$(v(b)_p,\ v(c)_{\neg p})$**的期望效用就为** $v(a)$**。同理，如果**$(v(a')_p,\ v(a')_{\neg p})\sim(v(b')_p,\ v(c')_{\neg p})$**，那么行为**$(v(b')_p,\ v(c')_{\neg p})$**的期望效用就为** $v(a')$**。由定理** 2**，我们选择前者当且仅当** $v(a)\geq v(a')$**。**

4 结语

基于拉姆齐公理，本文证明了存在一个效用函数，从而明确了价值的度量方法。进一步，本文阐明了效用具有如下性质：首先，定理 2 **展现了定性价值与效用这两个概念之间的逻辑关系：** **效用合理地表达了定性价值，换句话说，效用这一定量结果并没有扭曲偏好的序关系，即选项之间的效用的大小关系与偏好的序关系是一致的；其次，定理** 3 **阐明了效用具有**

可加性。

参考文献

[1] Ramsey， F， Truth and probability[M]，in: TheFoundations of Mathematics，1931，156-198。

[2] Jeffrey， R，The Logic of Decision[M]，New York， McGraw-Hill，1983。

[3] Howson， C and Urbach， P， Scientific Reasoning: The Bayesian Approach[M]， Open Court Pulishing Company，1989.

[4] Howson， C， The Bayesian Approach， in: Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems[M]， Vol. 1， edited by P Semts， Kluwer Acadmic Publishers， 1998, 111-134.

[5] Hacking，I，An introduction to Probability and Inductive Logic[M]，Cambridge University Press，2001.

[6] Achinstein， P，The Concept of Evidence[M]，Oxford University Press，1983.

A Utility Theory Based on Ramsey's Axioms

XIONG Wei

(Institute of Logic and Cognition， Department of Philosophy, Zhongshan University， Guangzhou 510275， China)

Abstract： This paper shows that there exists a utility function based on some Ramsey's concepts and a set of his axioms。The utility function servers as a quantitative concept for values and it properly represents qualitative values。

Key words: Bayesian Theory；Value；Preference；Utility

收稿日期: 2004-5-10

基金项目：广东省教育厅社科青年基金项目(№。02SJC720002);中山大学重大项目：不确定推理系统及其应用。

作者简介：熊卫（1970—），男(汉族)，江西崇仁人，哲学博士，中山大学逻辑与认知研究所专职研究员，中山大学哲学系讲师，主要研究方向是逻辑学和科学哲学。