模态逻辑的诸后承关系之比较

李小五
中山大学逻辑与认知研究所，中山大学哲学系，广州，510275

摘要：本文定义模态语言的两种语义（邻域语义和关系语义）的若干个语义后承和 4 个具有代表性的模态系统的语法后承，然后比较它们之间的关系。

关键词：语义后承；语法后承；后承关系之比较
中图分类号：B81　　**文献标识码**：　A

令 L 是模态句子语言，At 是 L 的全体原子公式的集合，FL 是 L 的全体公式的集合。我们总用 p，q 和 r 表示 At 的前 3 个句符，用 A 和 B 表示任意公式，用 Φ 和 Ψ 表示任意公式集。

1　语义后承之间的比较

我们先来考虑语义后承关系。任给集合 X，我们用 P(X)表示 X 的幂集。

本文我们总用∗表示 R 或 N，其中 R 和 N 分别指称关系语义和邻域语义。

1.1 定义

(1) 称 F＝〈W，∗〉是∗-框架，记作 F∈∗F，⇔ 下列条件满足：

① W 是非空集，其中的元素称为可能世界，且

② 若∗是 R，则 R 是 W 上的二元关系。

若∗是 N，则 N 是从 W 到 P(P(W))中的映射。

(2) 称 M＝〈W，∗，[ ]〉是∗-模型，记作 M∈∗M，⇔下列条件满足：

① 〈W，∗〉是∗-框架，且

② [ ] 是从 At 到 P(W)中的映射。

(3) 复合公式在 M 中的真值集定义如下：

① [¬A] ＝W－[A]，

② [A∧B] ＝ [A] ∩ [B]，

③ 若∗是 R，则 [□A] ＝ {w∈W：R(w)⊆ [A]}，其中 R(x)表示 {y∈W：xRy}。

若∗是 N，则 [□A] ＝ {w∈W：[A] ∈N(w)}。

(4) 设 M＝〈W，∗，[ ]〉，F＝〈W，∗〉。我们称 M 是 F 的模型，F 是 M 的框架。♦[①]

若∗是 R，则称∗-框架(模型)为关系框架(模型)；若∗是 N，则称∗-框架(模型)为邻域框架(模型)。

1.2 约定

(1) w∈M 表示 w 属于 M 的可能世界集。

(2) 令 M＝〈W，∗，[ ]〉，

① w⊨A 表示：w∈ [A]。

② w⊨Φ 或 w∈ [Φ] 表示：对每一 A∈Φ，w⊨A。♦

1.3 定义 任给 M＝〈W，*，[ ]〉。

(1) 称 A 在 M 中有效，记作 M⊨A，⇔ [A] ＝W。

[①] ♦表示定义、定理(的证明)等的结束符。

(2) 称Φ在 M 中有效，记作 $M\vDash\Phi$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $A\in\Phi$，$M\vDash A$。

(3) 称Φ逐∗-点衍推 A，记作 $\Phi\vDash^{*}A$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $M\in{*M}$ 和 $w\in M$ ($w\vDash\Phi\Rightarrow w\vDash A$)。

(4) 称Φ逐∗-模型衍推 A，记作 $\Phi\vDash^{*}_{M}A$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $M\in{*M}$ ($M\vDash\Phi\Rightarrow M\vDash A$)。♦

(3)和(4)中定义的关系和下面我们要定义的同类关系都称为后承关系，它们都是定义在 $P(FL)\times FL$ 上的二元关系。以后我们也集合论地看待后承关系，即考虑它们之间的（真）包含关系和等于关系（互为包含关系）。

1.4 定义

(1) 称 A 在∗-框架 F 中有效，记作 $F\vDash A$，$\Leftrightarrow$ 对 F 的任意模型 M，$M\vDash A$。

(2) 称Φ在∗-框架 F 中有效，记作 $F\vDash\Phi$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $A\in\Phi$，$F\vDash A$。

(3) 称Φ逐∗-框架衍推 A，记作 $\Phi\vDash^{*}_{F}A$，$\Leftrightarrow$ 对每一框架 $F\in{*F}$ ($F\vDash\Phi\Rightarrow F\vDash A$)。♦

1.5 定义 令 C 是∗-模型的类或∗-框架的类。

(1) 称 A 在 C 中有效，记作 $C\vDash A$，$\Leftrightarrow$ 对所有 $X\in CF$，$X\vDash A$。

(2) 称Φ在 C 中有效，记作 $C\vDash\Phi$，$\Leftrightarrow$ 对所有 $A\in\Phi$，$C\vDash A$。

(3) 称Φ相对 C 衍推 A，记作 $\Phi\vDash^{C}A$，$\Leftrightarrow$ ($C\vDash\Phi\Rightarrow C\vDash A$)。♦

1.6 定义

(1) 称Φ逐∗-模型类衍推 A ，记作 $\Phi\vDash^{*}{}_{CM}A$，

$\Leftrightarrow$ (对所有∗-模型的类 C，$C\vDash\Phi\Rightarrow C\vDash A$)。♦

(2) 称Φ逐∗-框架类衍推 A ，记作 $\Phi\vDash^{*}{}_{CF}A$，

$\Leftrightarrow$ (对所有∗-框架的类 C，$C\vDash\Phi\Rightarrow C\vDash A$)。♦

说明：在 1.3(3)，我们定义了逐点衍推，在 1.3(4)和 1.4(3)，我们定义了逐个衍推，在 1.5(3)，我们定义了全类衍推。这里我们又定义了逐类衍推。以后我们将研究它们之间的关系。

上面我们已经定义了多个语义后承关系。类似地，我们还可以定义其他语义后承关系。例如，

称Φ相对∗-模型的类 CM 逐点衍推 A，记作 $\Phi\vDash_{CM,\ P}A$，

$\Leftrightarrow$ 对每一 $M\in CM$ 和 $w\in M$ ($w\vDash\Phi\Rightarrow w\vDash A$)。

称Φ相对 CM 逐模型衍推 A，记作 $\Phi\vDash_{CM,\ M}A$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $M\in CM$ ($M\vDash\Phi\Rightarrow M\vDash A$)。

称Φ相对∗-框架的类 CF 逐模型衍推 A，记作 $\Phi\vDash_{CF,\ M}A$，

$\Leftrightarrow$ 对每一 $F\in CF$ 和 F 的模型 M ($M\vDash\Phi\Rightarrow M\vDash A$)。

称Φ相对 CF 逐框架衍推 A，记作 $\Phi\vDash_{CF,\ F}A$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $F\in CF$ ($F\vDash\Phi\Rightarrow F\vDash A$)。

称Φ相对 CF 逐点衍推 A，记作 $\Phi\vDash_{CF,\ P}A$，

$\Leftrightarrow$ 对每一 $F\in CF$ 和 F 的模型 M 和 $w\in M$ ($w\vDash\Phi\Rightarrow w\vDash A$)。

易见这些衍推关系是前面的衍推关系的概括。易证：

1.7 推论 其中每一命题中的∗指称同一个符号。

(1) $\vDash^{*}=\vDash_{*M,\ P}=\vDash_{*F,\ P}$。　　(2) $\vDash^{*}_{M}=\vDash_{*M,\ M}=\vDash_{*F,\ M}$。

(3) $\vDash^{*}_{F}=\vDash_{*F,\ F}$。　　(4) $\vDash^{*M}=\vDash^{*F}$。♦

下面我们着重考虑具有代表性的 3 个后承关系：$\vDash^{*}$，$\vDash^{*}_{M}$，$\vDash^{*}_{F}$。

1.8 定义

(1) 称σ是一个代入映射 $\Leftrightarrow$ σ是从 At 到 FL 中的映射。

(2) 任给公式 A，定义 A 的代入特例 Aσ如下：

① $p\sigma=\sigma(p)$， 对所有 $p\in At$，

② $(\neg A)\sigma = \neg(A\sigma)$，

③ $(A\wedge B)\sigma = (A\sigma)\wedge(B\sigma)$，

④ $(\Box A)\sigma = \Box(A\sigma)$。♦

1.9 定理

(1) $\vDash^R \subset \vDash^R_M$。 (2) $\vDash^R_M \subset \vDash^{RM}$。 (3) $\vDash^R_F \subset \vDash^{RF}$。 (4) $\vDash^R_M \subset \vDash^R_F$。

(5) $\vDash^R_{CM} = \vDash^R_M$。 (6) $\vDash^R_{CF} = \vDash^R_F$。

证明：(1) “$\subseteq$”显然。下证：“$\neq$”。为此只须证：

① $p \vDash^R_M \Box p$。 ② $p \nvDash^R \Box p$。

证①：为此我们证明一个更强的命题：

③ $A \vDash^R_M \Box A$， 对每一公式 A。

任给关系模型 M＝〈W，R，[ ]〉和 A 使得 M⊨A，则［A］＝W。任给 w∈W，易见 R(w)⊆［A］，所以 w⊨□A。据 w 的任意性，M⊨□A。

证②：考虑关系模型 W＝｛w，u｝，R＝｛〈w，u〉｝，［p］＝｛w｝。易见 w⊨p 但 w ⊭ □p（因为 R(w) ＝｛u｝ 不是［p］的子集），所以②成立。

(2) “$\subseteq$”显然。下证：“$\neq$”。为此只须证：

① $p \vDash^{RM} q$。 ② $p \nvDash^R_M q$。

因为 p 不在所有的关系模型中有效，所以①空洞地成立。另一方面，容易构造一个模型使得 p 在其中有效且 q 不有效，所以②不成立。

(3) “$\subseteq$”显然。下证：“$\neq$”。为此只须证：

① $\Box p \vDash^{RF} p$。 ② $\Box p \nvDash^R_F p$。

因为□p 不在所有的框架中有效，所以①空洞地成立。另一方面，构造死点关系框架 F ＝〈{w}，∅〉。则 F⊨□p 但 F ⊭ p，所以②不成立。

(4) 先证“$\subseteq$”：设 $\Phi \vDash^R_M A$。则

(☆) M⊨Φ ⇒ M⊨A， 对每一 M∈RM。

任给框架 F∈RF 使得 F⊨Φ。要证 F⊨A。任给 F 的任意模型 M，只须证 M⊨A。因为 F⊨Φ，所以对每一 B∈Φ，F⊨B，所以 M⊨B。据 B 的任意性，M⊨Φ，所以据(☆)，M⊨A。

下证：“$\neq$”。据 Hughes 和 Cresswell 的［1996］(p.40)，

① $A \vDash^R_F A\sigma$， 对每一公式 A 和代入映射 σ。

下证：存在公式 A 和代入映射 σ 使得

② $A \nvDash^R_M A\sigma$。

构造 M 如下：

W＝｛w，u｝， R＝｛〈w，u〉｝， ［p］＝｛w，u｝， ［q］＝｛w｝。

则 w⊨□p→p，u⊨□p→p，u⊭□q→q。所以 M⊨□p→p 而 M⊭□q→q。

(5) “$\subseteq$”：设 $\Phi \vDash^R_{CM} A$。则Φ逐任意模型类衍推 A，当然也逐任意单元模型类也衍推 A，所以 $\Phi \vDash^R_M A$。具体说，任给 M∈RM 使得 M⊨Φ。则｛M｝⊨Φ。据设定，｛M｝⊨A，**所以** M⊨A。所以 $\Phi \vDash^R_M A$。

“$\supseteq$”：设 $\Phi \vDash^R_M A$。任给关系模型类 C 使得 C⊨Φ。则对每一 M∈C，M⊨Φ。据设定，M⊨A，**据 M 的任意性**，**我**们**有** C⊨A。所以 $\Phi \vDash^R_{CM} A$。

(6) 证**明**类**似**(5)。♦

1.10 定理

(1) $\vDash^N \subset \vDash^N_M$。 (2) $\vDash^N_M \subset \vDash^{NM}$。 (3) $\vDash^N_F \subset \vDash^{NF}$。 (4) $\vDash^N_M \subset \vDash^N_F$。

(5) $\vDash^N_{CM} = \vDash^N_M$。 (6) $\vDash^N_{CF} = \vDash^N_F$。

证明：(1)－(4)中的“$\subseteq$”如上易证。下证(1)－(4)中的“$\neq$”。

(1) 只须证：

① $p\leftrightarrow q \vDash^N_M \Box p\leftrightarrow\Box q$。 ② $p\leftrightarrow q \nvDash^N \Box p\leftrightarrow\Box q$。

证①：据 Chellas 的［1980］(p.209)，我们有一个更强的命题：

③ $A\leftrightarrow B \vDash^N_M \Box A\leftrightarrow\Box B$， 对每一公式 A。

下证②：定义邻域模型 M＝〈{w，u}，N，［ ］〉使得：

$[p]=\{w\}$， $[q]=\{w, u\}$， $N(w)=\{\{w\}\}$。

∵［p］∈N(w)且［q］∉N(w)，∴w∉［□p↔□q］。另一方面，我们有 w∈［p↔q］。

(2)－(3)的“≠”的证明类似上一定理的(2)－(3)的“≠”的证明。注意，那里的死点关系框架也是死点邻域框架。

(4) 先证：

① $A\vDash^N_F A\sigma$， 对每一公式 A 和代入映射σ。

假设①不成立，则存在邻域框架 F＝〈W，N〉，公式 A 和代入特例 Aσ使得

② $F\vDash A$， ③ $F\nvDash A\sigma$。

据③，存在邻域模型 M＝〈W，N，［ ］〉和 w∈W 使得

④ w∉［Aσ］。

我们用 M 构造新模型〈W，N，$[\ ]_1$〉使得 $[\ ]_1$ 恰如［ ］，除了

⑤ $[\sigma(p_i)]=[p_i]_1$， 对 A 中所有句符 p_i。

下证：

⑥ $[A\sigma]=[A]_1$。

施归纳于 A 的结构。若 A 是某个 p_i，则据⑤易得要证结果。

若 A 形如¬B 或 B∧C，则据归纳假设易得要证结果。

设 A＝□B。任给 u∈W，据归纳假设，易证：$[B\sigma]\in N(w) \Leftrightarrow [B]_1\in N(w)$,

即：$u\in[\Box(B\sigma)] \Leftrightarrow u\in[\Box B]_1$。据 u 的任意性，我们证明了⑥。

据④和⑥，$w\notin[A]_1$，所以〈W，N，$[\ ]_1$〉$\nvDash A$，所以 $F\nvDash A$，矛盾于②，所以①成立。

最后证：存在公式 A 和代入特例 Aσ使得

⑦ $A \nvDash^N_M A\sigma$。

构造邻域模型 M 如下：

$W=\{w, u\}$， $N(w)=\{\{u\}\}$， $[p]=\{w, u\}$， $[q]=\{w\}$。

则 $w\vDash\Box p\rightarrow p$， $u\vDash\Box p\rightarrow p$， $u\nvDash\Box q\rightarrow q$。所以 $M\vDash\Box p\rightarrow p$ 而 $M\nvDash\Box q\rightarrow q$。

(5)－(6)的证明类似 1.9 的(5)－(6)的证明。♦

1.11 定义

(1) 称 RM 逐点蕴涵 NM，记作 $RM\rightarrow_w NM$，⇔ 对每一 M＝〈W，R，［ ］〉∈RM 存在 M_1＝〈W，N，［ ］〉∈NM 使得对每一 A∈FL 和 w∈W（$w\in[A]_M \Leftrightarrow w\in[A]_{M_1}$）。

(2) 称 RM 蕴涵 NM，记作 RM→NM，

⇔ 对每一 M∈RM 存在 N∈NM 使得对每一 A∈FL（$M\vDash A \Leftrightarrow N\vDash A$）。

(3) 称 RF 蕴涵 NF，记作 RF→NF，

⇔ 对每一 F∈RF 存在 G∈NF 使得对每一 A∈FL（$F\vDash A \Leftrightarrow G\vDash A$）。♦

1.12 引理

(1) $RM\rightarrow_w NM$。 (2) RM→NM。 (3) RF→NF。

证明：(1) 任给 M＝〈W，R，［ ］〉∈RM。定义 M_1＝〈W，N，［ ］〉∈NM 如下：

① $N(w)=\{X\subseteq W: R(w)\subseteq X\}$， 对每一 w∈W。

任给公式 A，下证：

② $w\in$［A］$_M \Leftrightarrow w\in$［A］$_{M_1}$，　对每一 $w\in W$。[②]

若 A 是原子公式 p。则因为上述两个模型的指派（相对 At）相同，所以

③ $w\in$［p］$_M \Leftrightarrow w\in$［p］$_{M_1}$，　对每一 $w\in W$。

若 A 形如$\neg$B 或 B$\wedge$C，则据归纳假设易得要证结果。

令 A＝□B。则

$w\in$［□B］$_M \Leftrightarrow R(w)\subseteq$［B］$_M$　据关系模型的真值集定义

$\Leftrightarrow$［B］$_{M_1}\in N(w)$　据归纳假设和①

$\Leftrightarrow w\in$［□B］$_{M_1}$　据邻域模型的真值集定义。

类似(1)的证明，我们易得(2)和(3)。♦

1.13 定理

(1) $\vDash^N\subset\vDash^R$。　(2) $\vDash^N{}_M\subset\vDash^R{}_M$。　(3) $\vDash^N{}_F\subset\vDash^R{}_F$。

(4) $\vDash_{RF}\not\subseteq\vDash^{NF}$。　(5) $\vDash_{NF}\not\subseteq\vDash^{RF}$。

证明：(1) 先证“$\subseteq$”。

设$\Phi\vDash^N$A。任给 N＝〈W，R，［ ］〉$\in$RM 和 $w\in W$ 使得 $w\in$［Φ］$_N$。据上一引理(1)，存在 M＝〈W，N，［ ］〉$\in$NM 使得

① $w\in$［B］$_M \Leftrightarrow w\in$［B］$_N$，　对每一公式 B 和 $w\in W$。

因为$\Phi\vDash^N$A，所以

② $w\in$［Φ］$_M \Rightarrow w\in$［A］$_M$，　对每一 M＝〈W，N，［ ］〉$\in$NM 和 $w\in M$。

因为 $w\in$［Φ］$_N$，所以据①，$w\in$［Φ］$_M$。据②，$w\in$［A］$_M$，再据①，$w\in$［A］$_N$。这就意味 $w\in$［Φ］$_N \Rightarrow w\in$［A］$_N$，即$\Phi\vDash^R$A。

下证：“$\neq$”。易见$\Box p\wedge\Box q\vDash^R\Box(p\wedge q)$，所以只须证：

③ $\Box p\wedge\Box q\nvDash^N\Box(p\wedge q)$。

构造 M 如下：

W＝{w，u}，　N(w)＝{{w}，{u}}，　［p］＝{w}，　［q］＝{u}。

易见 M 是邻域模型，且 $w\vDash\Box p\wedge\Box q$ 但 $w\nvDash\Box(p\wedge q)$。

(2) 证“$\subseteq$”。设$\Phi\vDash^N{}_M$A。任给 N$\in$RM 使得 N$\vDash\Phi$。据上一引理(2)，存在 M$\in$NM 使得

① M$\vDash$B $\Leftrightarrow$ N$\vDash$B，　对每一公式 B。

因为$\Phi\vDash^N{}_M$A，所以

② M$\vDash\Phi\Rightarrow$ M$\vDash$A，　对每一 M$\in$NM。

因为 N$\vDash\Phi$，所以据①，M$\vDash\Phi$。据②，M$\vDash$A，再据①，N$\vDash$A。

下证：“$\neq$”。据 1.9(1)③，$p\vDash^R{}_M\Box p$，所以只须证：

③ $p\nvDash^N{}_M\Box p$。

构造邻域模型 M 为：W＝{w}，N(w)＝∅，［p］＝W。易见 M$\vDash$p 但 M$\nvDash\Box$p。

(3) 据上一引理(3)且类似上面(2)所证，易得“$\subseteq$”。

下证：“$\neq$”。易见 $\top\vDash^R{}_F\Box\top$，所以只须证：

③ $\top\nvDash^N{}_F\Box\top$。

构造邻域框架 F 为：W＝{w}，N(w)＝∅。易见 F$\vDash\top$，而 F$\nvDash\Box\top$。

(4) 据(3)易见 $\top\vDash^{RF}\Box\top$ 且 $\top\nvDash^{NF}\Box\top$。

(5) 令 A 是 K 的公理 **K**，且令 B 不是 K 的内定理。则 A 和 B 都不是 E 的内定理，所以 A $\vDash^{NF}$B 且 A $\nvDash^{RF}$B。♦

最后我们来定义经典命题语义，以后我们要用：

[②] 其中两个下标表示它们提到的指派是哪个模型的指派。

1.14 定义

(1) 称 V 是经典指派 $\Leftrightarrow$ V 是从 At∪{□A：A∈FL} 到 {0，1} 中的映射。

(2) 称 M_V 是经典模型 $\Leftrightarrow$ M_V 是从 FL 到{0，1}中的映射，使得对 FL 中的每一公式 A，

若 A∈At∪{□A：A∈FL}，则 $M_V(A)=V(A)$；

若 A＝¬B，则 $M_V(A)=1-M_V(B)$；

若 A＝B∧C，则 $M_V(A)=M_V(B)\times M_V(C)$。

(3) 称Φ在 M_V 中有效，记作 $M_V(\Phi)=1$，$\Leftrightarrow$ 对每一 B∈Φ，$M_V(B)=1$。

(4) 称Φ经典逐点衍推 A，记作 $\Phi\vDash_0 A$，

$\Leftrightarrow$ 对每一经典模型 M_V（$M_V(\Phi)=1\Rightarrow M_V(A)=1$）。♦

2 语法后承之间的比较

本文我们考虑 4 个具有代表性的系统 PC，E，K 和 Kb 的语法后承之间的关系。

2.1 定义 对每一 n<ω[③]，定义$\Box^0 A$＝A，$\Box^{n+1}A$＝$\Box^n\Box A$。♦

2.2 定义

(1) 经典系统 PC 是由下列公理和推理规则构成的系统：

① p→q→p，

② (p→q→r)→(p→q)→p→r，

③ (¬p→q)→(¬p→¬q)→p，

(MP) A，A→B / B，

(US) A / Aσ，其中σ是任一代入映射。

(2) 模态系统 E 是在 PC 中加入下列推理规则构成的系统：

(RE) A↔B / □A↔□B。

(3) 模态系统 K 是在 PC 中加入下列公理和推理规则构成的系统：

(**K**) □(p→q)→□p→□q，

(RN) A / □A。

(4) 模态系统 Kb 是由下列公理和推理规则构成的系统：

① $\Box^n A$， 其中 A 是 PC 中的任一公理且 n<ω，

② $\Box^n(\Box(p\to q)\to\Box p\to\Box q)$， 其中 n<ω。

(MP) A，A→B / B，

(US) A / Aσ，其中σ是任一代入映射。♦

以后我们用 S 来表示上述任一系统。

2.3 定义

(1) 称 S 中有从Φ到 A 的推演，记作 $\Phi\vdash_S A$，$\Leftrightarrow$ 存在公式序列 A_1，…，A_n＝A 使得对每一 1≤i≤n，下列条件之一成立：

① A_i 是 S 的公理的代入特例，

② $A_i\in\Phi$，

③ 存在 j，k＜i 使得 A_i 是从 A_j 和 A_k 据 MP 得到的，

④ 若 S 是 K 或 E，则存在 j＜i 使得 A_i 是从 A_j 据 S 中的 RN 或 RE 得到的。

(2) 若Φ＝∅，则我们把 $\Phi\vdash_S A$ 记作 $\vdash_S A$，并称 A 是 S 的内定理。♦

注意：我们可以证明 US 可以用于 S 的所有内定理。

2.4 定义

(1) 若Φ≠∅是有穷集，则我们用∧Φ和∨Φ分别指称Φ的所有元素的合取和析取。

[③] n<ω表示 n 是任意自然数。

当 $\Phi=\{A\}$ 时，$\wedge\Phi$ 和 $\vee\Phi$ 皆记为 A。

(2) 若 $\Phi=\varnothing$，则 $\wedge\Phi$ 定义为 $\top$ 使得 $\top$ 为某个重言式，$\vee\Phi$ 定义为 $\bot$ 使得 $\bot=\neg\top$。♦

2.5 定义

称 S 中有从 Φ 到 A 的强推演，记作 $\Phi\vdash^{S}A$，$\Leftrightarrow$ 存在有穷子集 $\Psi\subseteq\Phi$ 使得 $\vdash_S\wedge\Psi\to A$。♦

易见上面定义的推演和强推演实际上定义了 P(FL)×FL 上的两种语法后承关系。

2.6 定理

(1) $\vdash^{S}\subseteq\vdash_{S}$。 (2) $\vdash^{PC}=\vdash_{PC}$。 (3) $\vdash^{K}\subset\vdash_{K}$。 (4) $\vdash^{E}\subset\vdash_{E}$。

证明：(1) 设 $\Phi\vdash^{S}A$。据强推演定义，存在有穷子集 $\Psi\subseteq\Phi$ 使得 $\vdash_S\wedge\Psi\to A$，因为 $\Psi\vdash_S\wedge\Psi$，所以据 MP，易得 $\Psi\vdash_S A$，因此据推演定义，$\Phi\vdash_S A$。

(2) 据(1)，只须证"$\supseteq$"：设 $\Phi\vdash_{PC}A$，则据定义，存在有穷集 $\Psi\subseteq\Phi$ 使得 $\Psi\vdash_{PC}A$，∴据 PC 的演绎定理，$\vdash_{PC}\wedge\Psi\to A$，∴ $\Phi\vdash^{PC}A$。

(3) 据（1），只须证"$\neq$"。据 RN，$p\vdash_K\Box p$。假设 $p\vdash^{K}\Box p$。则存在有穷子集 $\Psi\subseteq\{p\}$ 使得 $\vdash_K\wedge\Psi\to\Box p$。

情况 1：$\vdash_K\wedge\varnothing\to\Box p$。则 $\vdash_K\top\to\Box p$，所以 $\vdash_K p\to\Box p$。

情况 2：$\vdash_K\wedge\{p\}\to\Box p$。则 $\vdash_K p\to\Box p$。

这两种情况都矛盾于 K 没有内定理 $p\to\Box p$(参见 Hughes 和 Cresswell 的［1996］)。

(4) 据(1)，只须证"$\neq$"。据 RE，$p\leftrightarrow q\vdash_E\Box p\leftrightarrow\Box q$。

假设 $p\leftrightarrow q\vdash^{E}\Box p\leftrightarrow\Box q$。则存在有穷子集 $\Psi\subseteq\{p\leftrightarrow q\}$ 使得 $\vdash_E\wedge\Psi\to\Box p\leftrightarrow\Box q$。

情况 1：$\vdash_E\wedge\varnothing\to\Box p\leftrightarrow\Box q$。则 $\vdash_E\top\to\Box p\leftrightarrow\Box q$，所以 $\vdash_E p\leftrightarrow q\to\Box p\leftrightarrow\Box q$。

情况 2：$\vdash_E\wedge\{p\leftrightarrow q\}\to\Box p\leftrightarrow\Box q$。则 $\vdash_E p\leftrightarrow q\to\Box p\leftrightarrow\Box q$。

下证 E 没有内定理 $p\leftrightarrow q\to\Box p\leftrightarrow\Box q$。定义 $\langle W, N, [\ ]\rangle$ 使得

$$W=\{w, u\},\ N(w)=\{\{w\}\},\ [p]=\{w\},\ [q]=W。$$

则易见 $w\vDash p\leftrightarrow q$，$w\vDash\Box p$，但 $w\nvDash\Box q$。所以 $\langle W, N\rangle\nvDash(p\leftrightarrow q)\to(\Box p\leftrightarrow\Box q)$，∴矛盾于 E 的内定理在所有邻域框架中有效(参见 Chellas 的［1980］)。♦

据上面提到的两种文献，我们还可以证明：

2.7 定理

(1) $\vdash^{PC}\subset\vdash^{E}\subset\vdash^{K}$。 (2) $\vdash_{PC}\subset\vdash_{E}\subset\vdash_{K}$。 (3) $\vdash_{E}\subset\vdash^{K}$。 ♦

2.8 引理

(1) 对上述任意系统 S，若 $\Phi\vdash^{S}A\to B$ 且 $\Phi\vdash^{S}A$，则 $\Phi\vdash^{S}B$。

(2)(Kb 的演绎定理) $\Phi, A\vdash_{Kb}B\Rightarrow\Phi\vdash_{Kb}A\to B$。

(3) $\vdash_K A\Leftrightarrow\vdash_{Kb}A$。

证明：（1）设 $\Phi\vdash^{S}A\to B$ 且 $\Phi\vdash^{S}A$。则据定义，存在有穷子集 Ψ_1，$\Psi_2\subseteq\Phi$ 使得

$$\vdash_S\wedge\Psi_1\to A\to B,\qquad\vdash_S\wedge\Psi_2\to A。$$

令 $\Psi=\Psi_1\cup\Psi_2$。则易得 $\vdash_S\wedge\Psi\to A\to B$ 和 $\vdash_S\wedge\Psi\to A$。所以易得 $\vdash_S\wedge\Psi\to B$，因此 $\Phi\vdash^{S}B$。

(2) 显然。

(3) "$\Leftarrow$"：显然。下证"$\Rightarrow$"：先证

① 若 $\vdash_{Kb}A$，则 $\vdash_{Kb}\Box A$。

设 $\vdash_{Kb}A$，则在 Kb 存在从空集到 A 的推演 $A_1, \cdots, A_n=A$。对每一 $1\leqslant i\leqslant n$。

若 A_i 是 Kb 的公理的代入特例，则 $\Box A_i$ 也是 Kb 的公理的代入特例，所以 $\vdash_{Kb}\Box A_i$。

若存在 j，k＜i 使得 A_i 是从 A_j 和 $A_k=A_j\to A_i$ 据 MP 得到的，则据归纳假设，

$$\vdash_{Kb}\Box(A_j\to A_i),\qquad\vdash_{Kb}\Box A_j,$$

据公理 **K** 的代入特例和 MP，我们有 $\vdash_{Kb}\Box A_i$。至此①成立。最后证：

② 若 $\vdash_K A$，则 $\vdash_{Kb}A$。

设 $\vdash_K A$，则在 K 存在从空集到 A 的推演 $A_1, \cdots, A_n=A$。对每一 $1\leqslant i\leqslant n$。

若 A_i 是 K 的公理的代入特例，则易见 A_i 也是 Kb 的公理的代入特例，所以$\vdash_{Kb} A_i$。

若存在 j，k＜i 使得 A_i 是从 A_j 和 $A_k＝A_j\to A_i$ 据 MP 得到的，则据归纳假设，

$$\vdash_{Kb} A_j\to A_i,\quad \vdash_{Kb} A_j,$$

据 MP，我们有$\vdash_{Kb} A_i$。

若存在 j＜i 使得 A_i 是从 A_j 据 RN 得到的，则据归纳假设，$\vdash_{Kb} A_j$，据①，$\vdash_{Kb} A_i$。♦

2.9 定理

(1) $\vdash^{Kb} = \vdash_{Kb}$。 (2) $\vdash_{Kb}\subseteq\vdash_K$。 (3) $\vdash_{Kb} = \vdash^K$。

证明：(1) “$\subseteq$”：据 2.6(1)。

“$\supseteq$”：设$\Phi\vdash_{Kb} A$，则存在从Φ到 A 的推演 A_1，…，A_n＝A。对每一 1≤i≤n。

若 Ai 是 Kb 的公理的代入特例，则$\vdash_{Kb} A_i$，所以$\vdash_{Kb}\wedge\varnothing\to A_i$，因此$\Phi\vdash^{Kb} A_i$。

若 $A_i\in\Phi$，则$\vdash_{Kb}\wedge\{A_i\}\to A_i$，所以$\Phi\vdash^{Kb} A_i$。

若存在 j，k＜i 使得 A_i 是从 A_j 和 A_k 据 MP 得到，则据归纳假设和上面引理(1)，$\Phi\vdash^{Kb} A_i$。

(2) 显然。

(3) “$\subseteq$”：设$\Phi\vdash_{Kb} A$。据（1），有$\Phi\vdash^{Kb} A$。所以存在有穷子集$\Psi\subseteq\Phi$使得$\Psi\vdash_{Kb} A$。据上面引理(2)，易得$\vdash_{Kb}\wedge\Psi\to A$，据(2)，$\vdash_K\wedge\Psi\to A$，所以据定义，$\Phi\vdash^K A$。

“$\supseteq$”：设$\Phi\vdash^K A$，存在有穷子集$\Psi\subseteq\Phi$使得$\vdash_K\wedge\Psi\to A$，据上面引理(3)，$\vdash_{Kb}\wedge\Psi\to A$，所以$\Psi\vdash_{Kb}\wedge\Psi\to A$。另一方面，$\Psi\vdash_{Kb}\wedge\Psi$，所以据 MP，$\Psi\vdash_{Kb}A$，因此$\Phi\vdash_{Kb} A$。♦

3 语法后承和语义后承之间的比较

3.1 定理

(1) $\vdash_K=\vDash^R_M$。 (2) $\vdash_E=\vDash^N_M$。

证明：(1) 据 S. Popkon 的［1994］(p.127)。

类似 S. Popkon 在其［1994］(p.127)对 (1)的证明，我们有(2)。♦

3.2 定理

(1) $\vDash^R=\vdash^K$。 (2) $\vDash^N=\vdash^E$。

证明：(1) “$\subseteq$”：设$\Phi\nvdash^K A$。则可证$\Phi\cup\{\neg A\}$是 K-一致的。据 Lindenbaum-引理，存在 K-极大一致集 w 使得$\Phi\cup\{\neg A\}\subseteq w$。据 K 的典范关系模型的基本定理，$w\vDash\Phi$但 $w\nvDash A$，所以$\Phi\nvDash^R A$。

“$\supseteq$”：先证：

① K 的内定理在每一关系模型的每一可能世界中真。

任给 K 的内定理 A，则在 K 中存在从空集到 A 的推演 A_1，…，A_n＝A。任给 1≤i≤n，下证：

② A_i 在每一关系模型的每一可能世界中真。

设 A_i 是 K 的公理的代入特例。不妨令 $A_i=\Box(A\to B)\to\Box A\to\Box B$。任给关系模型 $M=\langle W，R，[\ ]\rangle$ 和 $w\in W$ 使得 $w\vDash\Box(A\to B)$和 $w\vDash\Box A$。则 $R(w)\subseteq[A\to B]\cap[A]$，所以 $R(w)\subseteq[B]$，所以 $w\vDash\Box B$，所以 $w\vDash A_i$，因此②成立。

设存在 j，k＜i 使得 A_i 是从 A_j 和 $A_k＝A_j\to A_i$ 据 MP 得到的，则据归纳假设，

③ A_j 和 $A_j\to A_i$ 在每一关系模型的每一可能世界中真。

任给关系模型 $M=\langle W，R，[\ ]\rangle$ 和 $w\in W$。据③，$w\vDash A_j$ 和 $w\vDash A_j\to A_i$，所以 $w\vDash A_i$，因此②成立。

设存在 j＜i 使得 A_i 是从 A_j 据 RN 得到的，则据归纳假设，

④ A_j 在每一关系模型的每一可能世界中真。

任给关系模型 $M=\langle W，R，[\ ]\rangle$ 和 $w\in W$。据④，$M\vDash A_j$，所以据 1.9(1)③，$M\vDash A_i$，

所以 $w\vDash A_i$，因此②成立。

至此我们证明了①成立。

设 $\Phi\vdash^{K} A$，则存在有穷子集 $\Psi\subseteq\Phi$ 使得 $\vdash_{K}\wedge\Psi\to A$。任给关系模型 M 和 $w\in M$ 使得 $w\vDash\Phi$。则 $w\vDash\wedge\Psi$，再据①，$w\vDash\wedge\Psi\to A$，因此 $w\vDash A$。所以 $\Phi\vDash^{R}A$。

(2) 证明类似(1)。♦

3.3 定理

$\vDash_0 = \vdash_{PC}$。

证明：“$\subseteq$”：设 $\Phi\nvdash_{PC} A$。则 $\Phi\cup\{\neg A\}$ 是 PC-一致的。据 Lindenbaum-引理，存在 PC-极大一致集 w 使得 $\Phi\cup\{\neg A\}\subseteq w$。据经典逻辑的基本结果，存在经典模型 M_V 使得 $M_V(\Phi)=1$，但 $M_V(A)=0$，所以 $\Phi\nvDash_0 A$。

“$\supseteq$”：设 $\Phi\vdash_{PC} A$，则 PC 中存在从 Φ 到 A 的推演 A_1，…，$A_n = A$。对每一 $1\leqslant i\leqslant n$。若 A_i 是公理的代入特例或 $A_i\in\Phi$，则易证 $\Phi\vDash_0 A_i$。

若存在 j，k＜i 使得 A_i 是从 A_j 和 $A_k = A_j\to A_i$ 据 MP 得到，则据归纳假设，$\Phi\vDash_0 A_j$ 且 $\Phi\vDash_0 A_j\to A_i$。据经典命题逻辑的基本事实，$\Phi\vDash_0 A_i$。♦

4 结论

现在我们把上面陆续得到的结果结合起来，其中 $R\to R_1$ 表示 $R\subset R_1$，$R\Leftrightarrow R_1$ 表示 $R = R_1$，下标表示得到这些关系的根据。

$$\vDash_0 \Leftrightarrow_{3.3} \vdash_{PC} \Leftrightarrow_{2.6(2)} \vdash^{PC}$$

$$\downarrow_{2.7(1)}$$

$$\vDash^{N} \Leftrightarrow_{3.2(2)} \vdash^{E} \qquad \vDash^{N}_{CM} \qquad \vDash^{N}_{CF}$$

$$\downarrow_{2.6(4)} \qquad \Updownarrow_{1.10(5)} \qquad \Updownarrow_{1.10(6)}$$

$$\vdash_{E} \Leftrightarrow_{3.1(2)} \vDash^{N}_{M} \to_{1.10(4)} \vDash^{N}_{F} \to_{1.10(3)} \vDash^{NF} \Leftrightarrow_{1.7(4)} \vDash^{NM}$$

$$\downarrow_{2.7(3)} \qquad 1.13(2) \qquad 1.13(3)$$

$$\vDash^{R} \Leftrightarrow_{3.2(1)} \vdash^{Kb} \Leftrightarrow_{2.9(1)} \vdash_{Kb} \Leftrightarrow_{2.9(3)} \vdash^{K} \to_{2.6(3)} \vdash_{K} \Leftrightarrow_{3.1(1)} \vDash^{R}_{M} \to_{1.9(4)} \vDash^{R}_{F} \to_{1.9(3)} \vDash^{RF} \Leftrightarrow_{1.7(4)} \vDash^{RM}$$

$$\Updownarrow_{1.9(5)} \qquad \Updownarrow_{1.9(6)}$$

$$\vDash^{R}_{CM} \qquad \vDash^{R}_{CF}$$

这样的比较后承关系的工作还可以继续下去，也就是说可以丰富上述图表。

至少有以下方向可以考虑：

模态逻辑方向：一是在 PC 中只增加 RN 得到系统 N 作为代表系统。讨论由此得到的语法后承与加标关系语义的何种衍推关系对应。二是修改推演定义使得 US 可以用在假设集上，这样的语法后承应该与逐框架衍推对应。

一阶逻辑方向：我们已有两类一阶系统，其中一类（全称概括规则像 US 那样只能用于公理（内定理））的语法后承与（一阶语义中的）逐指派衍推对应，另一类（全称概括规则像 MP 那样可以用于假设集）的语法后承应该与（一阶语义中的）逐模型衍推对应。

参考文献:

［1］ CHELLAS B F. Modal Logic: An Introduction. Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

［2］ HUGHES G E, CRESSWELL M J. A New Introduction to Modal Logic. London and New York, Routledge, 1996.

［3］ POPKON S. First Steps in Modal Logic. Cambridge, Cambridge University Press, 1994.

Comparing Consequence Relations of Modal Logic

LI Xiao-wu

The Institute of Logic and Cognition, Zhongshan University, Guangzhou, 510275, China

Abstract: We define the semantic consequences of two semantics (the relation semantics and the neighborhood semantics) of modal languadge, and the syntax consequences four modal systems which have representatives, then comparing the relations of them.

Key words: semantic consequence; syntax consequences; comparing the relations of consequence.

收稿日期: 2004-03-09;

作者简介: 李小五（1955-），男，河北涞水人，中山大学哲学系逻辑与认知研究所,博士生导师。