常识推理基础逻辑系统 M 的完全性

周北海[1]　　**毛翊**[2]

（1．中山大学逻辑与认知研究所，广东，广州，510275；北京大学哲学系，北京，100871； 2．美国德州大学哲学系，美国，奥斯丁，78712）

提要　本文对通常的典范模型方法加以改造，在典范结构的基础上，建立了相对于任意给定有穷公式集 Γ 的 Γ-典范框架和 Γ-典范模型，以此证明了 M 的框架类完全性。Γ-典范模型方法是有穷方法，由此还得到了 M 的可判定性。

关键词　常识推理的基础逻辑，集选语义，典范框架，典范模型。

中图分类号：B813　　**文献标识码：A**

我们在“一个关于常识推理的基础逻辑”[1]一文中给出了形式语言 L 、L 的形式语义集选语义以及形式系统 M。本文是系统 M 完全性的证明。

形式语言 L 、集选语义及系统 M 简述如下，详细情况请参见[1]。

形式语言 L 有可数无穷多个变元符号，常项符号 $\perp$ ，联结词 $\rightarrow$ 和 $>$。 L-公式定义如常。其中所有原子公式的集合记作 $P(\mathrm{L})$。所有 L-公式的集合记作 $F(\mathrm{L})$。语法符号 p, q, r 等表示任意的原子公式，a, b, g, d, j, y 等表示任意的公式。Γ, Φ 等表示任意的公式集。被定义符号有 T，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$。括号的省略按如下顺序：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$>$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。

集选语义由集选框架、模型以及真和有效性定义等组成。

一个集选框架是一个二元组〈W, □〉，其中 W 是非空集，□ 是集选函数，即 □：$\mathrm{P(W)} \times \mathrm{P(W)} \rightarrow \mathrm{P(W)}$，满足：对 W 的任意子集 X, Y, Z,

（1）如果 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{X}'$,，则 □$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \subseteq$ □$(\mathrm{X}', \mathrm{Y})$；

（2）如果对 X 中任意的 w 都有 □$(\{w\}, \mathrm{Y}) \subseteq \mathrm{Z}$, 则 □$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \subseteq \mathrm{Z}$；

（3）如果 □$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \subseteq \mathrm{Z}$, 则 □$(\mathrm{W}, \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subseteq \mathrm{Z}$。

一个集选模型是一个三元组〈W, □, s〉，其中〈W, □〉是一个集选框架，s 是一个从原子公式集到 W 的幂集的映射，即 $s : P(\mathrm{L}) \rightarrow \mathrm{P(W)}$。

以下将集选框架简称为框架。集选模型类似。

设 M ＝〈W, □, s〉，是任一模型，j 是任一公式，$\| j \|^{\mathrm{M}}$ 是满足如下条件的集合：

（1）$\| \perp \|^{\mathrm{M}} = \varnothing$

（2）$\| p \|^{\mathrm{M}} = s(p)$

（3）$\| a \rightarrow b \|^{\mathrm{M}} = (\mathrm{W} - \| a \|^{\mathrm{M}}) \cup \| b \|^{\mathrm{M}}$

（4）$\| a > b \|^{\mathrm{M}} = \bigcup \{\mathrm{X} \subseteq \mathrm{W} :$ □$(\mathrm{X}, \|a\|^{\mathrm{M}}) \subseteq \| b \|^{\mathrm{M}} \}$

设 M 是任一模型，X 是 W_M 的任一非空子集，a 是任一公式。a 在 X 上为真，记作 M $|=_X a$，当且仅当，$X \subseteq \| a \|^M$。a 是有效的，记作 $|= a$，当且仅当，对任意的模型 M，M $|=_{W_M} a$，又记作 M $|= a$。

形式系统 M

公理模式

PL　所有重言式。

CK　$(a > (b \rightarrow g)) \rightarrow ((a > b) \rightarrow (a > g))$

CMP　$(a \wedge (a > b)) > b$

初始规则

MP　从 a 和 $a \rightarrow b$ 可得 b （分离）

RCEA　从 $b \leftrightarrow g$ 可得 $(b > a) \leftrightarrow (g > a)$（前件等值置换）

RN　从 b 可得 $a > b$ （正常化规则）

RM　从 $a > b$ 可得 $a \wedge g > b$ （对定理的单调性）

1．典范结构与 M 的一般框架完全性

定义 1.1　二元组〈W_M, □$_M$〉是 M 的典范结构，当且仅当，$W_M = \{w : w$ 是 M-极大一致集$\}$，□$_M$ 是一个函数，□$_M$：$P(W_M) \times P(W_M) \rightarrow P(W_M)$，满足 □$_M(X, |a|_M) = \bigcap\{|b|_M : X \subseteq |a > b|_M\}$。其中 $|a|_M = \{w : w$ 是 M-极大一致集，$a \in w\}$。

注意 □$_M$ 的第二个变目，是用公式表示的，因此 □$_M$ 不是 $P(W_M) \times P(W_M)$ 上的全函数，〈W_M, □$_M$〉不是框架，所以这里称其为结构。

定义 1.2　设 S 是任一系统，a 是任意公式，Γ 是任意公式集。a 是 S-一致的，当且仅当，$\neg a$ 不是 S 定理。Γ 是 S-一致的，当且仅当，任意 $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma$，$\neg(a_1 \wedge, \ldots, \wedge a_n)$ 不是 S 定理。

引理 1.1　设 Γ 是 M 极大一致集。如果 $\neg(a > b) \in \Gamma$，则 $\{g : a > g \in \Gamma\} \cup \{\neg b\}$ 是 M-一致的。（“是 M-一致的”以后简称“是一致的”，“不是 M-一致的”简称“是不一致的”。）

证　设 $\Lambda = \{g : a > g \in \Gamma\}$。假设 $\Lambda \cup \{\neg b\}$ 是不一致的。因此，有 $b_1, \ldots, b_n \in \Lambda$，使得 $\vdash \neg(b_1 \wedge, \ldots, \wedge b_n \wedge \neg b)$。根据古典命题逻辑 PC，可得 $\vdash b_1 \wedge, \ldots, \wedge b_n \rightarrow b$。再由 RCK，可得 $\vdash a > b_1 \wedge, \ldots, \wedge a > b_n \rightarrow a > b$。因此有，$\vdash \neg(a > b_1 \wedge, \ldots, \wedge a > b_n \wedge \neg(a > b))$。这说明 $\{a > b_1, \ldots, a > b_n, \neg(a > b)\}$ 是不一致的，与 $\Lambda \cup \{\neg(a > b)\} \subseteq \Gamma$ 矛盾。■

引理 1.2　设〈W_M, □$_M$〉是 M 的典范结构。对任意的 $(a > b) \in F(L)$，任意的 $X \subseteq W_M$，$X \subseteq |a > b|_M$，当且仅当，□$_M(X, |a|_M) \subseteq |b|_M$。

证　设 $X \subseteq |a > b|_M$。如果 $w \in$ □$_M(X, |a|_M) \subseteq |b|_M$，据 □$_M$ 的定义（定义 1.1），$w \in \{w' \in W : \{g : X \subseteq |a > g|_M\} \subseteq w'\}$。因为 $b \in w$，所以 $w \in |b|_M$。于是，□$_M(X, |a|_M) \subseteq |b|_M$。

设 $X \not\subseteq |a > b|_M$。于是，有 $w \in X$，且 $w \notin |a > b|_M$。既然 w 是极大一致集，所以 $\neg(a > b) \notin w$。据引理 1.1，$\{g : a > g \in w\} \cup \{\neg b\}$ 是一致的。又 $w \in X$，所以 $\{g : X \subseteq |a > g|_M\} \subseteq \{g : w \in |a > g|_M\} = \{g : w \in |a > g|_M \in w\}$。于是，$\{g : X \subseteq |a > g|_M\}$ 是一致的。由

Lindenbaum 定理（一致集可以扩张成一极大一致集），存在极大一致集 w^*，$\{ g : \mathrm{X} \subseteq | a > g |_{\mathrm{M}} \} \subseteq w^*$，并且$\neg b \in w^*$。据定义 1.1，$w^* \in \square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}, | a |_{\mathrm{M}}) \subseteq | b |_{\mathrm{M}}$。然而，因为 $\neg b \in w^*$，所以 $w \notin | b |_{\mathrm{M}}$。于是$\square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}, | a |_{\mathrm{M}}) \not\subseteq | b |_{\mathrm{M}}$。■

定理 1.1 M 的典范结构〈$\mathrm{W_M}, \square_{\mathrm{M}}$〉满足：对 $\mathrm{W_M}$ 的任意子集 X, Y, Z,

（1）如果 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{X}'$，则 $\square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}, | a |_{\mathrm{M}}) \subseteq \square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}', | a |_{\mathrm{M}})$；

（2）如果对 X 中任意的 w 都有 $\square_{\mathrm{M}}(\{w\}, | a |_{\mathrm{M}}) \subseteq | b |_{\mathrm{M}}$，则 $\square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}, | a |_{\mathrm{M}}) \subseteq | b |_{\mathrm{M}}$；

（3）如果 $\square_{\mathrm{M}}(| g |_{\mathrm{M}}, | a |_{\mathrm{M}}) \subseteq | b |_{\mathrm{M}}$，则 $\square_{\mathrm{M}}(\mathrm{W_M}, | g |_{\mathrm{M}} \cap | a |_{\mathrm{M}}) \subseteq | b |_{\mathrm{M}}$。

证 证（1）。假设 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{X}'$，并且，对任意的 w，$w \in \square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}, | a |_{\mathrm{M}})$。设 $\mathrm{X}' \subseteq | a > b |_{\mathrm{M}}$，其中 b 是任意的公式。既然 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{X}'$，据设，$\mathrm{X} \subseteq | a > b |_{\mathrm{M}}$。又既然 $w \in \square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}, | a |_{\mathrm{M}})$，由定义 1.1，$b \in w$。于是，$\{ b : \mathrm{X} \subseteq | a > b |_{\mathrm{M}} \} \subseteq w$。由定义 1.1，$w \in \square_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}', | a |_{\mathrm{M}})$。

证（2）。假设对任意的 w，$w \in \mathrm{X}$，$\square_{\mathrm{M}}(\{w\}, | a |_{\mathrm{M}})$，并且 $\square_{\mathrm{M}}(\{w\}, | a |_{\mathrm{M}}) \not\subseteq | b |_{\mathrm{M}}$。由设，必有某个 w^*，$w^* \in \mathrm{X}$，且 $w^* \notin | a > b |_{\mathrm{M}}$。据引理 1.2，$\square_{\mathrm{M}}(\{w^*\}, | a |_{\mathrm{M}}) \not\subseteq | b |_{\mathrm{M}}$。

证（3）。设 $\square_{\mathrm{M}}(| g |_{\mathrm{M}}, | a |_{\mathrm{M}}) \subseteq | b |_{\mathrm{M}}$，并且 $w \in \square_{\mathrm{M}}(\mathrm{W_M}, | g |_{\mathrm{M}} \cap | a |_{\mathrm{M}})$。据引理 1.2，$| g |_{\mathrm{M}} \subseteq | a > b |_{\mathrm{M}}$。于是，$| g |_{\mathrm{M}} = | g |_{\mathrm{M}} \cap | a > b |_{\mathrm{M}}$。因此有，$| g \wedge a |_{\mathrm{M}} = | g |_{\mathrm{M}} \cap | a |_{\mathrm{M}} = | g |_{\mathrm{M}} \cap | a |_{\mathrm{M}} \cap | a > b |_{\mathrm{M}}$。因为 M 有公理 $(a \wedge (a > b)) > b$，所以，$\mathrm{W_M} \subseteq | (a \wedge (a > b)) \wedge g) > b |_{\mathrm{M}} = | (g \wedge a) > b |_{\mathrm{M}}$。据定义 1.1，既然 $w \in \square_{\mathrm{M}}(\mathrm{W_M}, | g |_{\mathrm{M}} \cap | a |_{\mathrm{M}})$，于是 $b \in w$，即 $w \in | b |_{\mathrm{M}}$。■

设 X 是任意 M-极大一致集的集合。如果存在公式 a，$| a |_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}$，则称 X 有公式对应。该定理说明，对有公式对应的极大一致集来说，框架条件成立。由此可以得到一般框架完全性。对此我们还希望得到框架类完全性。但是，因为不是所有的极大一致集的集合都有公式对应，所以〈$\mathrm{W_M}, \square_{\mathrm{M}}$〉不是框架，原来典范模型的完全性证明方法不能完全照搬。这是 M 完全性证明的困难所在。下面用 Γ-典范模型方法证明 M 的框架类完全性。

2．G-典范框架与 G-典范模型

定义 2.1 设 a 和 b 是任意的公式，Γ 是任意的公式集。

（1）$\sim a$ 是单层否定公式，当且仅当，$\sim a = b$，如果 a 是$\neg b$；否则，$\sim a = \neg b$。

（2）称 Γ 对单层否定封闭，如果 $a \in \Gamma$，则 $\sim a \in \Gamma$。

定义 2.2 设 Γ 是任意的公式集。CCL(Γ) 是 Γ 的部件闭包，当且仅当，CCL(Γ) 是含有所有 Γ 公式的子公式并且对单层否定封闭的公式集。（子公式按通常定义。）

例如，设 $\Gamma = \{ p > q, \neg q, \neg\neg r \}$。于是，$\mathrm{CCL}(\Gamma) = \{ p > q, \neg q, \neg\neg r, p, q, \neg r, r, \neg(p > q), \neg p \}$。

根据该定义，显然，如果 Γ 是有穷的，则 CCL(Γ) 也是有穷的。

定义 2.3 设 Γ 是任意的公式集。A 是 Γ 上的受限极大一致集，当且仅当，A 是满足以下三个条件的集合：

（1）$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{CCL}(\Gamma)$；

（2）A 是一致的；

（3）如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq CCL(\Gamma)$，B 是一致的，则 $A = B$。

设 Γ 是任意的公式集。以后用 W_Γ 表示所有 Γ 上的受限极大一致集的集合。

一致与系统有关，总是在某个系统推演或证明基础上的一致。所谓 Γ 上的受限极大一致集，确切地说，是在某个给定系统 S 的极大一致集，即 Γ 上的受限 S 极大一致集。在这里，我们讨论的是系统 M，本文以下所说的 Γ 上的受限极大一致集，指的是 Γ 上的受限 M 极大一致集。相应地，W_Γ 所表示的是所有 Γ 上的受限 M 极大一致集的集合。

命题 2.1　设 Γ 是任意的公式集，a 是任意的公式。

（1）对任意的 $A \in W_\Gamma$，$a \in CCL(\Gamma)$，$a \in A$ 或 $\sim a \in A$。

（2）如果 Γ 是有穷的，则 W_Γ 和 W_Γ 中的每个元素也是有穷的。

定义 2.4　设 Γ 是任意的公式集，a 是任意的公式。$|a|_\Gamma = \{A \in W_\Gamma : a \in A\}$

引理 2.1　设 Γ 是任意的公式集。对任意的 $a \in CCL(\Gamma)$，如果 a 一致，则存在某个集合 A，$A \in W_\Gamma$，$a \in A$。

该引理类似于 Lindenbaum 定理，或者说，是在公式集 $CCL(\Gamma)$ 上的 Lindenbaum 定理，用通常方法可证，从略。

引理 2.2　设 Γ 是任意的公式集，a 和 b 是任意的公式。如果 $a \in CCL(\Gamma)$，$a \to b \in CCL(\Gamma)$，则

（1）$|\neg a|_\Gamma = W_\Gamma - |a|_\Gamma$

（2）$|a \to b|_\Gamma = (W_\Gamma - |a|_\Gamma) \cup |b|_\Gamma$

由通常方法可证，从略。

定义 2.5　设 Γ 是任意的有穷公式集。对任意的 $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in W_\Gamma$，$X = \{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq W_\Gamma$，定义公式 j_A，j_X 如下：

$$j_A = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$$

$$j_X = j_{A_1} \vee \ldots \vee j_{A_m}$$

命题 2.2　设 Γ 是任意的有穷公式集。

（1）对任意的 $X, Y \subseteq W_\Gamma$，如果 $X \subseteq Y$，则 $|j_X|_M \subseteq |j_Y|_M$；

（2）对任意的 $a \in CCL(\Gamma)$，$|j_{|a|_\Gamma}|_M = |a|_\Gamma$。

由以上定义可得，证明从略。

定义 2.6　设 Γ 是任意公式集。f 是 G-归约映射，当且仅当，$f: W_M \to W_\Gamma$，满足对任意的 $w_M \in W_M$，$f(w_M) = w_\Gamma$，如果 $w_\Gamma \subseteq w_M$。

定义 2.7　设 Γ 是任意公式集。定义映射 g，g^* 如下：

g： $P(W_M) \to P(W_\Gamma)$，满足对任意的 $X_M \in P(W_M)$，$g(X_M) = \{f(w_M) : w_M \in X_M\}$。

g^*: $P(W_\Gamma) \to P(W_M)$，满足对任意的 $X_\Gamma \in P(W_\Gamma)$，$g(X_\Gamma) = \{ w_M \in W_M$：存在 $x_\Gamma \in X_\Gamma$，$f(w_M) = x_\Gamma \}$。

根据以上定义，显然，f 以及 g 和 g^* 是函数，并且 f，g 是满射，g^* 是单射。

命题 2.3 设 Γ 是任意有穷公式集，X_M 和 X'_M 是 W_M 的任意子集，X_Γ 和 X'_Γ 是 W_Γ 的任意子集，a 是 CCL(Γ) 中的任意公式。函数 g 和 g^* 有如下性质。

（1）如果 $X_M \subseteq X'_M$，则 $g(X_M) \subseteq g(X'_M)$。

（2a）如果 $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，则 $g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$。

（3a）$g(g^*(X_\Gamma)) \subseteq X_\Gamma$

（2b）如果 $g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$，则 $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$。

（3b）$X_\Gamma \subseteq g(g^*(X_\Gamma))$

（2）如果 $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，当且仅当，$g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$

（3）$g(g^*(X_\Gamma)) = X_\Gamma$

（4）$X_M \subseteq g^*(g(X_M))$

（5）$g^*(X_\Gamma \cap X'_\Gamma) = g^*(X_\Gamma) \cap g^*(X'_\Gamma)$

（6）$g^*(X_\Gamma) = |j_{X_\Gamma}|_M$

（7）$g(|j_{A_\Gamma}|_M) = g^*(g(X_\Gamma)) = X_\Gamma$

（8）$W_M = g^*(W_\Gamma) = |j_{W_\Gamma}|_M$

（9）$|j_{X_\Gamma}|_M \cap |j_{Y_\Gamma}|_M = |j_{X_\Gamma} \cap j_{Y_\Gamma}|_M$

（10）$g^*(|a|_\Gamma) = |a|_M$。

（11）$g(|a|_M) = g(g^*(|a|_\Gamma)) = |a|_\Gamma$

证

证（1）。设 $w_\Gamma \in g(X_M)$，w_Γ 是 W_Γ 中的任意元素。据 g 的定义，有某个 $w_M \in X_M$，$f(w_M) = w_\Gamma$。又 $X_M \subseteq X'_M$，因此 $w_M \in X'_M$。据 g 的定义，$w_\Gamma \in g(X'_M)$，所以 $g(X_M) \subseteq g(X'_M)$。

证（2a）。设 $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，并且，$w_M \in g^*(X_\Gamma)$，$w_M$ 是 W_M 的任意元素。据 g^* 的定义，有某个 $w_\Gamma \in X_\Gamma$，使得 $f(w_M) = w_\Gamma$。既然 $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，所以 $w_M \in g^*(X_\Gamma)$。再由 g^* 的定义，$w_M \in g^*(X'_\Gamma)$。所以，$g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$。

证（3a）。设 $w_\Gamma \in g(g^*(X_\Gamma))$，$w_\Gamma$ 是 W_Γ 的任意元素。据 g 的定义，有某个 $w_M \in g^*(X_\Gamma)$，$f(w_M) = w_\Gamma$。据 g^* 的定义，$w_\Gamma \in X_\Gamma$。所以，$g(g^*(X_\Gamma)) \subseteq X_\Gamma$。

证（2b）。设 $g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$，并且，$w_\Gamma \in X_\Gamma$，$w_\Gamma$ 是 W_Γ 的任意元素。据（2a），$g^*(\{w_\Gamma\}) \subseteq g^*(X_\Gamma)$。据设，$g^*(\{w_\Gamma\}) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$。据（1），$g(g^*(\{w_\Gamma\})) \subseteq g(g^*(X'_\Gamma))$。据 g^* 的定义，$g^*(\{w_\Gamma\}) = \{ w_M \in W_M$ ： $f(w_M) = w_\Gamma \}$。于是，$g(g^*(\{w_\Gamma\})) = \{w_\Gamma\}$。又据（3a），$g(g^*(X'_\Gamma)) \subseteq X'_\Gamma$，所以，$\{w_\Gamma\} \subseteq X'_\Gamma$。因此 $w_\Gamma \in X'_\Gamma$。

证（3b）。设 $w_\Gamma \in X_\Gamma$。据 g^* 的定义，$g^*(\{w_\Gamma\}) = \{ w_M \in W_M$ ： $f(w_M) = w_\Gamma \}$。于是，

$g(g^*(\{w_\Gamma\})) = \{w_\Gamma\}$。既然 $\{w_\Gamma\}\subseteq X_\Gamma$，由（1）和（2）已证，$g(g^*(\{w_\Gamma\}))\subseteq g(g^*(X_\Gamma))$。所以，$\{w_\Gamma\}\subseteq g(g^*(X_\Gamma))$，因而 $w_\Gamma\in g(g^*(X_\Gamma))$。因为 w_Γ 是 W_Γ 的任意元素，于是，$X_\Gamma\subseteq g(g^*(X_\Gamma))$。

（2）可由（2a）和（2b）得到。（3）可由（3a）和（3b）得到。

证（4）。设 $w_M\in X_M$。于是，$f(w_M)\in g(X_M)$。据 g^* 的定义，$g^*(f(w_M)) = \{w'_M\in W_M : f(w'_M) = f(w_M)\}$。于是，$w_M\in g^*(\{f(w_M)\})$。既然，$\{f(w_M)\}\subseteq g(X_M)$，根据（2），$g^*(\{f(w_M)\})\subseteq g^*(g(X_M))$，因此，$w_M\in g^*(g(X_M))$。因为 w_M 是 X_M 的任意元素，所以 $X_M\subseteq g^*(g(X_M))$。

证（5）。因为 $(X_\Gamma\cap X'_\Gamma)\subseteq X_\Gamma$ 并且 $(X_\Gamma\cap X'_\Gamma)\subseteq X'_\Gamma$，根据（2），$g^*(X_\Gamma\cap X'_\Gamma)\subseteq g^*(X_\Gamma)$，并且 $g^*(X_\Gamma\cap X'_\Gamma)\subseteq g^*(X'_\Gamma)$。于是，$g^*(X_\Gamma\cap X'_\Gamma)\subseteq g^*(X_\Gamma)\cap g^*(X'_\Gamma)$。

设 $w_M\in g^*(X_\Gamma)\cap g^*(X'_\Gamma)$，$w_M$ 是 W_M 中的任意元素。据 g^* 的定义，有某个 $w_\Gamma\in X_\Gamma$，$f(w_M) = w_\Gamma$，并且有某个 $w'_\Gamma\in X'_\Gamma$，$f(w_M) = w'_\Gamma$。既然 f 是函数，于是有 $w_\Gamma = w'_\Gamma$，并且 $w_\Gamma\in X_\Gamma\cap X'_\Gamma$。再据 g^* 的定义，$w_M\in g^*(X_\Gamma\cap X'_\Gamma)$。所以，$g^*(X_\Gamma)\cap g^*(X'_\Gamma)\subseteq g^*(X_\Gamma\cap X'_\Gamma)$。

证（6）。设 $w_M\in g^*(X_\Gamma)$，w_M 是 W_M 中的任意元素。据 g^* 的定义，有某个 $w_\Gamma\in X_\Gamma$，$f(w_M) = w_\Gamma$。据 f 的定义，$w_\Gamma\subseteq w_M$。既然 w_M 是 M-极大一致集，所以 $j_{w_\Gamma}\in w_M$。因此，$j_{X_\Gamma}\in w_M$。所以，$g^*(X_\Gamma)\subseteq|j_{X_\Gamma}|_M$。

设 $w_M\in|j_{X_\Gamma}|_M$，w_M 是 W_M 的任意元素。于是，$j_{X_\Gamma}\in w_M$。既然 w_M 是 M-极大一致集，所以有某个 $w_\Gamma\in X_\Gamma$，使得 $j_{w_\Gamma}\in w_M$。因此 $w_\Gamma\subseteq w_M$，并且 $f(w_M) = w_\Gamma$。于是，$w_M\in g^*(X_\Gamma)$。所以，$|j_{X_\Gamma}|_M\subseteq g^*(X_\Gamma)$。

（7）由（3）和（6）可得。

证（8）。据 g^* 的定义，显然有 $g^*(W_\Gamma)\subseteq W_M$。另一方面，据 g 的定义，$g(W_{M\Gamma})\subseteq W_\Gamma$。根据（2），$g^*(g(W_{M\Gamma}))\subseteq g^*(W_\Gamma)$。又据（4），$W_M\subseteq g^*(g(W_{M\Gamma}))$，于是，$W_M\subseteq g^*(W_\Gamma)$。

由（6）可得 $g^*(W_\Gamma) = |j_{W_\Gamma}|_M$。

（9）由（5）和（6）可得。

证（10）。设 $X_\Gamma = |a|_\Gamma$。根据 j_{X_Γ} 的定义，有 $j_{X_\Gamma}\leftrightarrow a$。于是 $|j_{X_\Gamma}|_M = |a|_\Gamma$。根据（6），$g^*(X_\Gamma) = |j_{X_\Gamma}|_M$，所以 $g^*(|a|_\Gamma) = |a|_M$。

（11）可由（3）和（10）得到。■

定义 2.8 设 Γ 是任意公式集。二元组 $\langle W_\Gamma, \square_\Gamma\rangle$ 是 G-典范框架，当且仅当，W_Γ 是 Γ 上的受限极大一致集的集合，$\square_\Gamma$ ： $P(W_\Gamma)\times P(W_\Gamma)\to P(W_\Gamma)$ 是满足以下条件的函数：对任意的 X_Γ 和 $Y_\Gamma\subseteq W_\Gamma$，$\square_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) = g(\square_M(|j_{X_\Gamma}|_M, |j_{Y_\Gamma}|_M))$。

定义 2.9 设 Γ 是任意有穷公式集。三元组 $M_\Gamma = \langle W_\Gamma, \square_\Gamma, s_\Gamma\rangle$ 是 G-典范模型，当且仅当，$\langle W_\Gamma, \square_\Gamma\rangle$ 是 Γ-典范框架，s_Γ 是满足以下条件的映射：对任意的变元 p，$s_\Gamma(p) = \{w_\Gamma\in W_\Gamma : p\in w_\Gamma\}$

3．M 的框架类完全性

引理 3.1 设 Γ 是任意有穷公式集。Γ-典范框架 $\langle W_\Gamma, \square_\Gamma\rangle$ 是 M-框架。

证 根据 M 的可靠性，所有集选框架都是 M-框架。所以只需证 $\langle W_\Gamma, \square_\Gamma\rangle$ 是集选框架。Γ 是公式集，所以 W_Γ 非空。下证 $\square_\Gamma$ 满足集选框架的三个条件。

设 X_Γ, Y_Γ 和 Z_Γ 是 W_Γ 的任意子集。

条件（1）：如果 $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，则 $\Box_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq \Box_\Gamma(X'_\Gamma, Y_\Gamma)$。

设 $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，由命题 2.2，$|\, j_{X_\Gamma}|_M \subseteq |\, j_{X'_\Gamma}|_M$。根据定理 1.1（1），$\Box_M(|\, j_{X_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq \Box_M(|\, j_{X'_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M)$。据命题 2.3（1），$g(\Box_M(|\, j_{X_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M)) \subseteq g(\Box_M(|\, j_{X'_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M))$。据 $\Box_\Gamma$ 的定义，$\Box_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq \Box_\Gamma(X'_\Gamma, Y_\Gamma)$。

条件（2）：如果对 X_Γ 中任意的 w_Γ 都有 $\Box_\Gamma(\{w_\Gamma\}, Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$，则 $\Box_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。

设 w_Γ 是 X_Γ 的任意元素，$\Box_\Gamma(\{w_\Gamma\}, Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。由命题 2.3（2），可得 $g^*(\Box_\Gamma(\{w_\Gamma\}, Y_\Gamma)) \subseteq g^*(Z_\Gamma)$。根据命题 2.3（4），$\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq g^*(g(\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M)))$。据根据 $\Box_\Gamma$ 的定义，$g(\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M)) = \Box_\Gamma(\{w_\Gamma\}, Y_\Gamma)$。因此，$g^*(g(\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M))) = g^*(\Box_\Gamma(\{w_\Gamma\}, Y_\Gamma))$。根据命题 2.3（6），$g^*(Z_\Gamma) = |j_{Z_\Gamma}|_M$。以上说明，$\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq g^*(g(\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M))) = g^*(\Box_\Gamma(\{w_\Gamma\}, Y_\Gamma)) \subseteq g^*(Z_\Gamma) = |j_{Z_\Gamma}|_M$，即对任意的 $w_\Gamma \in X_\Gamma$，$\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq |j_{Z_\Gamma}|_M$。

根据定义，对任意的 $w_M \in |j_{X_\Gamma}|_M$，都有某个 $w'_\Gamma \in X_\Gamma$，使得 $w_M \in |j_{\{w'_\Gamma\}}|_M$，于是，根据定理 1.1（1），$\Box_M(\{w_M\}, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq \Box_M(|\, j_{\{w'_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M)$。又据上面所证，对任意的 $w_\Gamma \in X_\Gamma$，$\Box_M(|\, j_{\{w_\Gamma\}}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq |j_{Z_\Gamma}|_M$，所以，对任意的 $w_M \in |j_{X_\Gamma}|_M$，$\Box_M(\{w_M\}, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq |j_{Z_\Gamma}|_M$。对此，根据定理 1.1（2），$\Box_M(|\, j_{X_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq |j_{Z_\Gamma}|_M$。再根据命题 2.3（1），$g(\Box_M(|\, j_{X_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M)) \subseteq g(|j_{Z_\Gamma}|_M)$。对于 $g(\Box_M(|\, j_{X_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M))$，由$\Box_\Gamma$ 的定义，$g(\Box_M(|\, j_{X_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M)) = \Box_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma)$；对于 $g(|j_{Z_\Gamma}|_M)$，由上面已证，$g(|j_{Z_\Gamma}|_M) = g(g^*(Z_\Gamma))$，再根据命题 2.3（3），$g(g^*(Z_\Gamma)) = Z_\Gamma$。于是，$\Box_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。

条件（3）：如果 $\Box_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$，则 $\Box_\Gamma(W_\Gamma, X_\Gamma \cap Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。

设 $\Box_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。据根据 $\Box_\Gamma$ 的定义和命题 2.3（2），（4），（6），$\Box_M(|\, j_{X_\Gamma}|_M, |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq |j_{Z_\Gamma}|_M$。根据定理 1.1（3），$\Box_M(W_M, |\, j_{X_\Gamma}|_M \cap |\, j_{Y_\Gamma}|_M) \subseteq |j_{Z_\Gamma}|_M$。既然 $W_M = |\, j_{M_\Gamma}|_M$，并且 $|\, j_{X_\Gamma}|_M \cap |\, j_{Y_\Gamma}|_M = |\, j_{X_\Gamma \cap Y_\Gamma}|_M$，$\Box_M(|\, j_{M_\Gamma}|_M, |\, j_{X_\Gamma \cap Y_\Gamma}|_M) \subseteq g^*(Z_\Gamma)$。据根据 $\Box_\Gamma$ 的定义和命题 2.3（3）和（1），$\Box_\Gamma(W_\Gamma, X_\Gamma \cap Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。■

推论 3.1 设〈$W_\Gamma, \Box_\Gamma$〉是任意的 Γ-典范框架。对该框架上的任意指派 s，〈$W_\Gamma, \Box_\Gamma, s$〉是一个 M-模型。

推论 3.2 设 Γ 是任意有穷公式集。关于 Γ-典范模型〈$W_\Gamma, \Box_\Gamma, s_\Gamma$〉是 M-模型。

引理 3.4（Γ-典范模型定理） 设 j 是任意的公式，Γ 是任意有穷公式集。如果 $j \in \mathrm{CCL}(\Gamma)$，则对任意的 $X_\Gamma \subseteq \Gamma$，$M_\Gamma \models_{X_\Gamma} j$，当且仅当，$X_\Gamma \subseteq |\, j\,|_\Gamma$。

证

（1）设 j 是命题变元 p。根据 $\|\, j\,\|^{M_\Gamma}$ 的定义，以及 s_Γ 和 $|\, j\,|_\Gamma$ 的定义，$\|\, j\,\|^{M_\Gamma} = \|\, j\,\|_\Gamma = s_\Gamma(p) = |\, p\,|_\Gamma$。

（2）设 j 是公式 $\neg a$。$\|\, j\,\|^{M_\Gamma} = \|\, \neg a\,\|_\Gamma = W_\Gamma - \|\, a\,\|_\Gamma$。据归纳假设，$\|\, j\,\|^{M_\Gamma} = W_\Gamma - |\, a\,|_\Gamma = |\, \neg a\,|_\Gamma = |\, j\,|_\Gamma$。

（3）设 j 是公式 $a \to b$。$\|\, j\,\|^{M_\Gamma} = \|\, a \to b\,\|_\Gamma = (W_\Gamma - \|\, a\,\|_\Gamma) \cup \|\, b\,\|_\Gamma$。据归纳假设，$\|\, j\,\|^{M_\Gamma} = (W_\Gamma - |\, a\,|_\Gamma) \cup |\, b\,|_\Gamma = |\, a \to b\,|_\Gamma = |\, j\,|_\Gamma$。

（4）设 j 是公式 $a > b$ 。$\| j \|^{M_\Gamma} = \| a > b \|_\Gamma = \bigcup\{X_\Gamma \subseteq W_\Gamma : \square(X_\Gamma, \|a\|_\Gamma) \subseteq \| b \|_\Gamma\}$。据归纳假设，$\| j \|^{M_\Gamma} = \| a > b \|_\Gamma = \bigcup\{X_\Gamma \subseteq W_\Gamma : \square(X_\Gamma, |a|_\Gamma) \subseteq | b |_\Gamma\}$。据 $\square_\Gamma$ 的定义，$\| j \|^{M_\Gamma} = \bigcup\{X_\Gamma \subseteq W_\Gamma : \square_M(| j_{X_\Gamma}|_M , |a|_M) \subseteq | b |_M\}$。根据引理 1.2，$\| j \|^{M_\Gamma} = \bigcup\{X_\Gamma \subseteq W_\Gamma : | j_{X_\Gamma}|_M \subseteq |a > b|_M)\}$。根据 g 的定义和命题 2.3（1），$\| j \|^{M_\Gamma} = \bigcup\{X_\Gamma \subseteq W_\Gamma : g(| j_{X_\Gamma}|_M) \subseteq g(|a > b|_M)\} = \bigcup\{X_\Gamma \subseteq W_\Gamma : X_\Gamma \subseteq |a > b|_\Gamma\} = |a > b|_\Gamma = | j |_\Gamma$ 。■

定理 3.1 设 a 是任意的公式。如果 a 不是 M 定理，则存在 M-模型 M_Γ，存在 $X \subseteq W_\Gamma$，$M_\Gamma \models_X \neg a$ 。

证 令 $\Gamma = \{a\}$，可以得到关于 $\{a\}$ 的典范模型。再由推论 2.2，引理 2.4 可得。■

根据定理 3.1，所有集选框架的类是刻画 M 的框架类，因此 M 是框架类完全的。

Γ-典范模型方法是有穷方法。如果 Γ 有穷，得到的典范模型有穷。上面不仅证明了 M 的完全性，还证明了 M 有有穷模型性，因此 M 是可判定的。

参考文献

［1］周北海，毛翊. 一个关于常识推理的基础逻辑 [J],《哲学研究》2003 年增刊，1-10。

［2］Mao, Y. A Formalism for Nonmonotonic Reasoning Encoded Generics [D]. Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, 2003.

［3］PATRICK BLACKBURM, MAARTEN DE RIJKE, YDE VENEMA, Modal Logic [M]. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0521527147

Completeness of the basic logical system M for default reasoning

ZHOU Bei-hai[1], MAO Yi[2]

(1. Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen Univ., Guangzhou, 510275, China; Department of Philosophy, Peking Univ., Beijing 100871, China; 2. Department of Philosophy, University of Texas at Austin, TX 78712, U.S.A.)$

Abstract： In this paper, we proved the completeness of system M with respect to the class of Γ-canonical frames, on which Γ-canonical models are built. Given any finite set of formulas, Γ, a Γ-canonical frame is finite. The decidability of system M can thus be derived from the finite model property.

Key words： basic logic for default reasoning, set selection semantics, canonical frame, canonical model.

收稿日期: 2004-5-13

基金项目：教育部人文社会科学研究“十五”规划第一批研究资助项目（01JB720003）。

作者简介：周北海(1955－)，**男**(**汉族**)，**浙江乐清人，北京大学教授，博士生导师，中山大学逻辑与认知研究所兼职研究人员；毛翊**（1970－），**女**（**汉族**）**浙江奉化人，美国德州大学博士**。

北京书生公司书生研究中心为本项研究举办过研讨会，特此致谢。