# 部分协整型协整变结构检验

杨宝臣　张世英

（天津大学 管理学院，天津 300072）

**摘要：**提出了变结构协整的定义及分类。将变结构协整分为 3 种类型：参数变化型协整，部分变化型协整和机理变化型协整。对于第二种类型提出了基于 CHOW 检验统计量的变结构协整检验和建模方法。

**关键词：**协整；变结构；部分协整；Chow 检验

**中图分类号：**F224.0　　**文献标识码：**A

## 1　引言

变结构问题是经济系统建模中经常遇到的问题，当重大的经济政策和制度发生变化，重大的政治变革发生，重大的技术革命和技术创新发生时，均可能导致经济结构的变化，从而使经济模型的结构发生变化。在经济系统的协整建模中，由于上述变化，可能发生协整参数的变化，或者是协整关系的变化，协整条件下变结构的检验方法以及在发生变结构的情况下怎样建立误差校正模型成为重要的问题。

对于回归变量为非随机变量和随机干扰项为平稳或非平稳条件下的变结构研究情况，Andrews（1993）提出了基于广义矩估计的 Wald 检验，似然比 LR 检验和拉格朗日乘子 LM 检验,其检验统计量分别为$\sup_{\pi\in\Pi} W_T(\pi),\sup_{\pi\in\Pi} LM_T(\pi),\sup_{\pi\in\Pi} LR_T(\pi),\ \Pi=(0,1)$,它实际上是将 Quandt（1960）的检验方法推广到平稳序列的情况。Andrews 和 Ploberger（1994）提出了检验变结构的最优检验理论。Hansen（1996）研究了回归变量为非平稳情况下的变结构检验问题，在 Andrews and Ploberger（1994）基础上，提出了检验统计量$\sup F_n$，$aveF_n$，$\exp F_n$，并且证明了统计量的渐近性质。Diebold，F.X. 和 C.Chen（1996）研究了单个平稳时间序列的变结构检验方法，其检验统计量为$\sup_{\pi\in\Pi} W_T(\pi)$，$\sup_{\pi\in\Pi} LM_T(\pi)$和$\sup_{\pi\in\Pi} LR_T(\pi)$。Kim，J.Y.和 S.H.Park（1996）也研究了非平稳时间序列的变结构问题，采用的检验统计量为$\sup F_n$，$aveF_n$，$\exp F_n$三种形式。事实上，这些都是 Andrews 方法的推广应用。对于平稳时间序列和非平稳时间序列的变结构检验，所采用的检验方法主要是 Chow 型统计量，主要为 Wald 检验，似然比检验和拉格朗日乘子检验等。

在协整变结构检验方面，Campos，J.,N.R.Ericsson 和 D.F.Hendry（1996）研究了变结构情况下协整检验的问题，利用递归 Monte Carlo 模拟技术考察了当外生变量发生结构变化的时候对协整关系的影响，结果表明此时基于 ECM 的协整检验比 EG 两步法的 DF 检验的势要高。Andrews, D.W.K., I.Lee,W.Ploberger（1996）对多个变结构点的最优检验理论进行了研究,而且认为他们的模型包含了协整变结构的情况，但其假设条件为残差项为独立正态分布的，采用的检验统计量为 Wald、LR、LM 统计量。事实上，它只是协整的残差项为 I（0）的假设的一种特殊情况罢了。Gregory,A.W. 和 Hansen, B.E.（1996）研究了状态漂移情况下的协整问题，采用基于残差的协整检验方法，检验统计量为$\inf Z_\alpha(\tau)$，$\inf Z_t(\tau)$。Siklos，P.L.和 C.W.J.Granger（1997）则通过利率平价的实证研究,说明了协整关系可能在不同的时间段内处于开（关）状态。

杨宝臣、张世英（2002）对变结构协整的概念、类型等给出了明确的定义，并且对参数变化型协整检验（见下文第 1 部分）进行了深入的研究。

本文首先给出变结构协整的概念、分类，然后研究了定义 2 中部分型协整情况下协整变结构检验，提出了变结构点的估计与检验方法。

**2 变结构协整的概念与分类**

在时间序列的协整关系的研究和应用中，同样存在着模型结构的稳定性问题， 协整参数是否发生变化，以及协整关系发生变化的显著性检验， 变结构参数的显著性检验， 变结构点的估计等问题。

下面针对协整关系变化的几种情况，给出变结构协整的不同定义形式：

**定义 1**：设 m 维时间序列 $X_t=(x_{1t},x_{2t},...,x_{mt})'$ ，$t\in\Im$，$\Im$ 为时序集合， 若存在子集 $T_1\subset\Im$, $T_2\subset\Im$, $T_1\cap T_2=\Phi$, $T_1\cup T_2=\Im$, $\alpha_1\in R^m$, $\alpha_2\in R^m,\alpha_1\neq\alpha_2$，$\Phi$ 为空集,使得以下关系成立：

$$Z_t=\alpha_1'X_{t_1}\sim I(0), t_1\in T_1;\quad Z_t=\alpha_2'X_{t_2}\sim I(0), t_2\in T_2,$$

则称时间序列 $X_t$ 是参数变结构协整的。特别地， 若 $T_1=\Phi$, 或 $T_2=\Phi$, $\Phi$ 为空集,

则称时间序列是完全协整的（Fully Cointegration）。

可见，上述定义是指在某一时点上协整参数发生了突变，但序列间的协整关系依然存在， 只是序列分量间的均衡参数发生了变化，这是一种突变型的结构变化，这种情况往往发生在经济结构或政策发生制度性变化的情况下。

进一步，我们考虑另一种情况。

**定义 2**：设 m 维时间序列 $X_t=(x_{1t},x_{2t},...,x_{mt})'$ ，$t\in\Im$，$\Im$ 为时序集合， 若存在子集 $T_1\subset\Im$, $T_2\subset\Im$, $T_1\cap T_2=\Phi$, $T_1\cup T_2=\Im$, $\alpha_1\in R^m$, $\alpha_2\in R^m,\alpha_1\neq\alpha_2$，$\Phi$ 为空集, 使得以下关系成立：

$$Z_t=\alpha_1'X_{t_1}\sim I(0), t_1\in T_1;\quad Z_t=\alpha_2'X_{t_2}\sim I(1), t_2\in T_2,$$

或 $Z_t=\alpha_1'X_{t_1}\sim I(1), t_1\in T_1;\quad Z_t=\alpha_2'X_{t_2}\sim I(0), t_2\in T_2$

则称时间序列 $X_t$ 是部分协整的（Partially Cointegration）。特别地， 若 $T_2=\Phi$, 或 $T_1=\Phi$, $\Phi$ 为空集, 则称时间序列 $X_t$ 是完全协整的。

部分协整的情况是指时间序列在某一时点以后或以前存在协整关系， 而另外的时序集合里协整关系不复存在。这可能是由于协整变量发生了趋势变化或者是分布状态发生变化使得固有的协整关系发生了变化。

**定义 3**：设 m 维时间序列 $X_t=(x_{1t},x_{2t},...,x_{mt})'$ ，$Y_t$ 为 s 维时间序列 $Y_t=(y_{1t},y_{2t},...,y_{st})$，$t\in\Im$，$\Im$ 为时序集合， 若存在子集 $T_1\subset\Im$, $T_2\subset\Im$, $T_1\cap T_2=\Phi$, $T_1\cup T_2=\Im$, $\Phi$ 为空集, $\alpha_1\in R^m$, $\alpha_2\in R^m$,

$\alpha_1\neq\alpha_2$ $\varphi\in R^s$ 使得以下关系成立：

$$Z_t=\alpha_1'X_{t_1}\sim I(0), t_1\in T_1;\quad Z_t=\alpha_2'X_{t_2}+\varphi'Y_t\sim I(0), t_2\in T_2,$$

则称时间序列 $X_t$ 是机理变化型协整的。

机理变化型协整关系表明已有的协整关系，可能由于新的变量进入了系统而使得原来系统的均衡状态遭到破坏，而形成另一种新的均衡关系。

杨宝臣、张世英（2002）研究了参数变化型协整关系的建模方法。本文讨论部分协整型协整变

结构检验问题。

## 3 部分协整型协整变结构检验

### 3.1 部分协整型变结构协整模型与假定

设非平稳时间序列 $x_{1t} \sim I(1)$ 为标量时间序列，序列 $x_{2t} \sim I(1)$ 为 m-1 维向量时间序列，这些时间序列间存在以下关系：

$$\begin{aligned} x_{1t} &= \alpha' x_{2t} + u_t; \\ x_{2t} &= x_{2,t-1} + v_t; \end{aligned} \tag{1a}$$

或

$$\begin{aligned} x_{1t} &= \mu + \alpha' x_{2t} + u_t; \\ x_{2t} &= x_{2,t-1} + v_t; \end{aligned} \tag{1b}$$

令 $X_t = (x_{1t}, x'_{2t})'$, 为 m 维向量时间序列，$\alpha$ 为 m-1 维参数向量， $u_t$和$v_t$ 表示随机干扰，若 $u_t$ 是平稳时间序列, 而 $v_t$ 是独立同分布的，即 $u_t \sim I(0),\ v_t \sim IID(0, \sigma_v^2)$，则向量时间序列 $X_t$ 各分量间存在协整关系。

如果经济系统中存在制度的变化或者其他结构性的调整，则会引起经济变量间均衡关系的变化，从而造成模型协整关系的改变。我们主要研究如何检验与估计协整关系的持续性，即上节中我们给出的部分协整关系的检验与估计：随机干扰项 $u_t$ 是否由平稳序列变成非平稳序列。

零假设 $H_0: u_t = r_0 + z_t$； t=1，2，…，T， $r_0$ 是常数； （2a）

$z_t \sim I(0),$ 并且满足假设 1 中条件。

**假设 1** 假设过程 $\{z_t\}$ 满足：

1) $E(z_t) = 0;$

2) $E(|z|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ )， $\gamma > 2$；

3) 长期方差 $\sigma_z^2 = \sum_{j=1}^{\infty} E(z_{j+1} z_1)$ 存在；

4) 对于每个 $\tau \in (0,1), \lim_{T\to\infty} \mathrm{var}(T^{-1/2} \sum_{t=1}^{[\tau T]} z_t) = \tau \sigma_z^2$ ，且 $\lim_{T\to\infty} \mathrm{var}(T^{-1/2} \sum_{t=[\tau T]+1}^{T} z_t) = (1-\tau)\sigma_z^2$ .

上式中[ ]表示取整,下同。

以上假设条件称为 Phillips 条件，见 Phillips（1988），Phillips and Perron（1988）。

与 $H_0$ 假设相对应的备择假设为

$$\begin{aligned} H_1: u_t &= r_0 + z_{t,0}, \quad t = 1,2,\ldots,[\tau T] \\ u_t &= r_t + z_{t,1}, \quad t = [\tau T]+1,\ldots,T \end{aligned} \tag{2b}$$

其中 $r_0$ 是常数， $z_{t,0} \sim I(0),\ z_{t,1} \sim I(0),\ r_t = r_{t-1} + v_t,\ t = [\tau T]+1,\ldots,T\ ,\ v_t \sim IID(0, \sigma_v^2)$

另外，我们也可以考虑含有趋势项的过程：

$H'_0: u_t = r_0 + \gamma t + z_t$， t=1，2，…，T； （3a）

$z_t$ 是平稳时间序列，满足假设 1.

$H'_0$ 的备择假设为

$$H_1': u_t = r_0 + \gamma t + z_{t,0},\quad t = 1,2,...,[\tau T],$$
$$u_t = r_t + \gamma t + z_{t,1},\quad r_t = r_{t-1} + v_t, t = [\tau T]+1,...,T; \tag{3b}$$

事实上，（3b）等价于

$$u_t = \gamma + u_{t-1} + w_t,\quad w_t = v_t + z_{t,1} \tag{4}$$

即带有常数项漂移的单位根过程。

以上假设即零假设 $H_0$或$H_0'$，认为协整关系不发生变化，而备择假设 $H_1$或$H_1'$ 认为当 $t < [\tau T]$ 时协整关系存在，而当 $t > [\tau T]$ 时协整关系不复存在。

### 3.2 变结构的检验与估计

下面讨论如何检验由（2a），（2b）或（3a），（3b）所描述的模型结构变化。本文给出了检验统计量，并且给出了其渐近性质；然后讨论在未知变结构点的条件下如何估计变点 $\tau$ 。

#### 3.2.1 结构变化的检验

在这里，先讨论 $H_0$ 与备择假设 $H_1$，然后讨论 $H'_0$ 与备择假设 $H'_1$。

令 $\tilde{z}_t$， $t = 1,2,...,T$ 为 $u_t$ 关于常数项 $r_0$ 回归的残差，定义其部分和序列为

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} \tilde{z}_i,\quad t = 1,2,...,T \tag{5}$$

定义 $\tilde{z}_t$ 的长期方差为

$$\sigma_0^2 = \lim_{T\to\infty} T^{-1} E(S_T^2) \tag{6}$$

假设变结构发生在 $t = [\tau T]$， $\tau \in (0,1)$ ，定义部分和序列

$$S_{0,t}(\tau) = \sum_{i=1}^{t} \tilde{z}_t,\quad t = 1,2,...,[\tau T];$$
$$S_{1,t}(\tau) = \sum_{i=[\tau T+1]}^{t} \tilde{z}_t,\quad t = [\tau T]+1,...,T; \tag{7}$$

（一） $\sigma_0^2$ 为常数的情况

在长期方差 $\sigma_0^2$ 为常数的假定下，可以利用该统计量进行变结构的检验。

构造如下统计量：

$$F_T(\tau) = \frac{[(1-\tau)T]^{-2} \sum_{t=[\tau T]+1}^{T} S_{1,t}^2(\tau)}{[\tau T]^{-2} \sum_{t=1}^{[\tau T]} S_{0,t}^2(\tau)} \tag{8}$$

在实际的结构变化点未知的条件下，可以采用三种不同的方法来检验结构是否发生变化。

1) maxChow 检验（Andrews（1993））

$$F_T(\hat{\tau}) = \max_{\tau\in\Im} F_T(\tau),\quad \Im = (0,1) \tag{9}$$

2) Mean Chow 检验（Hansen（1992））

$$EF_T(\hat{\tau}) = \int_{\tau\in\Im} F_T(\tau) d\tau,\quad \Im = (0,1) \tag{10}$$

3)　exponential Chow 检验（Andrews and Ploberger（1992））

$$\exp(F_T(\hat{\tau})) = \log\{\int_{\tau\in\Im} \exp F_T(\tau) d\tau\}，\ \Im = (0,1) \tag{11}$$

可以证明 $F_T(\tau)$ 有如下的渐近性质：

**定理 1** 假设 1 成立， 则在零假设 $H_0$（2a）下有

（1）　$$F_T(\tau) \Rightarrow \frac{(1-\tau)^{-2}\int_\tau^1 V(r-\tau)dr}{\tau^{-2}\int_0^\tau V(r)dr} \equiv F_\infty(\tau)$$

（2）　$$F_T(\hat{\tau}) = \max_{\tau\in\Im} F_T(\tau) \Rightarrow \max_{\tau\in\Im} F_\infty(\tau)，\ \Im = (0,1)$$

（3）　$$EF_T(\hat{\tau}) = \int_{\tau\in\Im} F_T(\tau)d\tau \Rightarrow \int_{\tau\in\Im} F_\infty(\tau)d\tau，\ \Im = (0,1)$$

（4）　$$\exp(F_T(\hat{\tau})) = \log\{\int_{\tau\in\Im} \exp F_T(\tau)d\tau\} \Rightarrow \log\{\int_{\tau\in\Im} \exp F_\infty(\tau)d\tau，\ \Im = (0,1)$$

其中 $V(r) = W(r) - rW(1),$ W（r）是标准维纳过程。$\Rightarrow$ 表示依概率收敛，下同。

**证明：**

考虑第一个零假设 $H_0$，$\sigma^2 = \sigma_0^2$ 为常数，不发生变化。

先证定理中（1），由 Phillips and Perron（1988）满足假设 1 的回归残差的部分和序列收敛于 $V(r) = W(r) - rW(1).$ 则根据函数中心极限定理和连续映射定理（Chan and Wei（1988）)，在零假设 $H_0$ 下，有

$$\begin{aligned} &[\tau T]^{-2}\sum_{t=1}^{[\tau T]} S_{0,t}^2(\tau) \Rightarrow \sigma_0^2\tau^{-2}\int_0^\tau V(r)dr; \\ &[(1-\tau)T]^{-2}\sum_{t=[\tau T]+1}^{T} S_{1,t}^2(\tau) \Rightarrow \sigma_0^2(1-\tau)^{-2}\int_\tau^1 V(r-\tau)dr; \end{aligned} \tag{12}$$

因此在零假设 $H_0$ 下，得到

$$F_T(\tau) \Rightarrow \frac{(1-\tau)^{-2}\int_\tau^1 V(r-\tau)dr}{\tau^{-2}\int_0^\tau V(r)dr} \equiv F_\infty(\tau) \tag{13}$$

定理中（2）（3）（4），由连续映射定理和函数的连续性，即得。　　　　　　　证毕。

下面考虑带有趋势项的情况，即考察零假设 $H_0'(3a)$ 和备择假设 $H_1'(3b)$。

令 $\tilde{z}_t$，$t = 1,2,...,T$ 为 $u_t$ 关于常数项 $r_0$ 和趋势项 t 的回归的残差，假设变结构发生在 $t = [\tau T]$，定义其部分和序列分别为

$$\begin{aligned} &S_{\gamma_0,t}(\tau) = \sum_{i=1}^{t} \tilde{z}_t,\quad t = 1,2,...,[\tau T]; \\ &S_{\gamma_1,t}(\tau) = \sum_{i=[\tau T]+1}^{t} \tilde{z}_t,\quad t = [\tau T]+1,...,T; \end{aligned} \tag{14}$$

构造统计量

$$F_{\gamma T}(\tau)=\frac{[(1-\tau)T]^{-2}\sum_{t=[\tau T]+1}^{T}S_{\gamma_1,t}^{2}(\tau)}{[\tau T]^{-2}\sum_{t=1}^{[\tau T]}S_{\gamma_0,t}^{2}(\tau)} \tag{15}$$

**定理 2** 假设 1 成立， 则在零假设 H'$_0$（3a）下有

（1） $F_T(\tau)\Rightarrow\dfrac{(1-\tau)^{-2}\int_{\tau}^{1}V_2(r-\tau)dr}{\tau^{-2}\int_0^{\tau}V_2(r)dr}\equiv F_{\infty}(\tau)$

（2） $F_{\gamma T}(\hat{\tau})=\max\limits_{\tau\in\Im}F_{\gamma T}(\tau)\Rightarrow\max\limits_{\tau\in\Im}F_{\infty}(\tau)$，$\Im=(0,1)$

（3） $EF_{\gamma T}(\hat{\tau})=\int_{\tau\in\Im}F_{\gamma T}(\tau)d\tau\Rightarrow\int_{\tau\in\Im}F_{\infty}(\tau)d\tau$，$\Im=(0,1)$

（4） $\exp(F_{\gamma T}(\hat{\tau}))=\log\{\int_{\tau\in\Im}\exp F_{\gamma T}(\tau)d\tau\}\Rightarrow\log\{\int_{\tau\in\Im}\exp F_{\infty}(\tau)d\tau\}$，$\Im=(0,1)$

其中，$V_2(r)=W(r)+(2r-3r^2)W(1)+(-6r+6r^2)\int_0^1W(s)ds.$ W（r）是标准维纳过程。

**证明：**

这里只证明零假设 H'$_0$ 下残差项方差 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 不变的情况。

先证明（1），由 Schmidt and Phillips （1989）可知残差部分和序列收敛于

$V_2(r)=W(r)+(2r-3r^2)W(1)+(-6r+6r^2)\int_0^1W(s)ds.$

由函数中心极限定理和连续映射定理（Chan and Wei （1988）），得到，在零假设 $H_0'$下，

$$\begin{aligned}&[\tau T]^{-2}\sum_{t=1}^{[\tau T]}S_{\gamma_0,t}^{2}(\tau)\Rightarrow\sigma_0^2\tau^{-2}\int_0^{\tau}V_2(r)dr;\\&[(1-\tau)T]^{-2}\sum_{t=[\tau T]+1}^{T}S_{\gamma_1,t}^{2}(\tau)\Rightarrow\sigma_0^2(1-\tau)^{-2}\int_{\tau}^{1}V_2(r-\tau)dr;\end{aligned} \tag{16}$$

因此

$$F_{\gamma T}(\tau)\Rightarrow\frac{(1-\tau)^{-2}\int_{\tau}^{1}V_2(r-\tau)dr}{\tau^{-2}\int_0^{\tau}V_2(r)dr}\equiv F_{\infty}(\tau) \tag{17}$$

定理中（2），（3），（4）由连续映射定理和函数的连续性即得。 证毕.

**（二）$\sigma_0^2$ 发生变化的情况**

如果假设 $\sigma_0^2$ 在 $t=[\tau T]$ 时存在漂移，有

$$\begin{aligned}&\sigma_0^2(\tau)=\lim_{T\to\infty}(\tau T)^{-1}E(S_{0,\tau T}^{2}(\tau));\\&\sigma_1^2(\tau)=\lim_{T\to\infty}((1-\tau)T)^{-1}E(S_{1,T}^{2}(\tau));\end{aligned} \tag{18}$$

$\sigma_0^2(\tau)$ 是指发生结构变化之前的长期方差，$\sigma_1^2(\tau)$ 是指发生结构变化之后的长期方差。

由 Andrews and Monahan（1992），Hansen（1992），可以得到在备择假设 H$_1$ 下 $\sigma_0^2(\tau)$，$\sigma_1^2(\tau)$

的一致估计 $s_0^2(\tau)$和$s_1^2(\tau)$， 其定义为 $s_0^2(\tau)=(\tau T)^{-1}\sum_{t=1}^{[\tau T]}\widetilde{z}_t^{\,2}+2(\tau T)^{-1}\sum_{j=1}^{l}w_l(j)\sum_{t=j+1}^{[\tau T]}\widetilde{z}_t\widetilde{z}_{t-j}$，

$$s_1^2(\tau)=((1-\tau)T)^{-1}\sum_{t=[\tau T]+1}^{T}\widetilde{z}_t^{\,2}+2((1-\tau)T)^{-1}\sum_{j=1}^{l}w_l(j)\sum_{t=j+1}^{T}\widetilde{z}_t\widetilde{z}_{t-j}$$

其中 $w_l(j)=1-j(l+1)^{-1}$, $l$ 的取值应随样本量的增大而增大。

此时，构造统计量：

$$F_T^*(\tau)=\frac{[(1-\tau)T]^{-2}\sum_{t=[\tau T]+1}^{T}S_{1,t}^2(\tau)/s_1^2(\tau)}{[\tau T]^{-2}\sum_{t=1}^{[\tau T]}S_{0,t}^2(\tau)/s_0^2(\tau)} \tag{19}$$

$S_{0,t}^2(\tau),S_{1,t}^2(\tau)$ 的定义同（7）。

**定理 3** 在零假设 $H_0$（2a）下

(1) $F_T^*(\tau)\Rightarrow\dfrac{(1-\tau)^{-2}\int_\tau^1 V(r-\tau)dr}{\tau^{-2}\int_0^\tau V(r)dr}\equiv F_\infty^*(\tau)$

（2） $F_T^*(\hat{\tau})=\max\limits_{\tau\in\Im}F_T^*(\tau)\Rightarrow\max\limits_{\tau\in\Im}F_\infty^*(\tau)$， $\Im=(0,1)$

（3） $EF_T^*(\hat{\tau})=\int_{\tau\in\Im}F_T^*(\tau)d\tau\Rightarrow\int_{\tau\in\Im}F_\infty^*(\tau)d\tau$， $\Im=(0,1)$

（4） $\exp(F_T^*(\hat{\tau}))=\log\{\int_{\tau\in\Im}\exp F_T^*(\tau)d\tau\}\Rightarrow\log\{\int_{\tau\in\Im}\exp F_\infty^*(\tau)d\tau$， $\Im=(0,1)$

证明：

由（12），在零假设 $H_0$ 下

$$\begin{aligned}&[\tau T]^{-2}\sum_{t=1}^{[\tau T]}S_{0,t}^2(\tau)\Rightarrow\sigma_0^2\tau^{-2}\int_0^\tau V(r)dr;\\&[(1-\tau)T]^{-2}\sum_{t=\tau T+1}^{T}S_{1,t}^2(\tau)\Rightarrow\sigma_1^2(1-\tau)^{-2}\int_\tau^1 V(r-\tau)dr;\end{aligned} \tag{20}$$

因此，在零假设 $H_0$ 下，得到

$$F_T^*(\tau)\Rightarrow\frac{(1-\tau)^{-2}\int_\tau^1 V(r-\tau)dr}{\tau^{-2}\int_0^\tau V(r)dr}\equiv F_\infty^*(\tau) \tag{21}$$

这里 $\sigma_0^2$和$\sigma_1^2$ 分别为其一致估计 $s_0^2(\tau)$和$s_1^2(\tau)$ 代替，取极限时二者相削。 证毕。

考虑带有趋势项的情况，即考察零假设 $H_0'$和备择假设$H_1'$。

令 $\widetilde{z}_t$， $t=1,2,...,T$ 为 $u_t$ 关于常数项 $r_0$ 和趋势项 t 的回归的残差，假设变结构点为 $t=[\tau T]$，定义其部分和序列分别为

$$S_{\gamma_0,t}(\tau)=\sum_{i=1}^{t}\tilde{z}_t,\quad t=1,2,...,[\tau T];$$

$$S_{\gamma_1,t}(\tau)=\sum_{i=[\tau T]+1}^{t}\tilde{z}_t,\quad t=[\tau T]+1,...,T;$$

$$F_{\gamma T}^{*}(\tau)=\frac{[(1-\tau)T]^{-2}\sum_{t=[\tau T]+1}^{T}S_{\gamma_1,t}^{2}(\tau)/s_1^2(\tau)}{[\tau T]^{-2}\sum_{t=1}^{[\tau T]}S_{\gamma_0,t}^{2}(\tau)/s_0^2(\tau)} \tag{22}$$

**定理 4**　假设 1 成立， 则在零假设 H'$_0$ 下有

（1）　$F_{\gamma T}^{*}(\tau)\Rightarrow\frac{(1-\tau)^{-2}\int_{\tau}^{1}V_2(r-\tau)dr}{\tau^{-2}\int_0^{\tau}V_2(r)dr}\equiv F_{\infty}^{*}(\tau)$

（2）　$F_{\gamma T}^{*}(\hat{\tau})=\max_{\tau\in\Im}F_{\gamma T}^{*}(\tau)\Rightarrow\max_{\tau\in\Im}F_{\infty}^{*}(\tau)$， $\Im=(0,1)$

（3）　$EF_{\gamma T}^{*}(\hat{\tau})=\int_{\tau\in\Im}F_{\gamma T}^{*}(\tau)d\tau\Rightarrow\int_{\tau\in\Im}F_{\infty}^{*}(\tau)d\tau$， $\Im=(0,1)$

（4）　$\exp(\ F_{\gamma T}^{*}(\hat{\tau}))\ =\ \log\{\ \int_{\tau\in\Im}\exp\ \ F_{\gamma T}^{*}(\tau)d\tau\}\ \Rightarrow\ \log\{\ \int_{\tau\in\Im}\exp\ \ F_{\infty}^{*}(\tau)d\tau\}$， $\Im=(0,1)$

证明与定理 2 类似，不再重复。

### 3.2.2　变结构点的估计

假设实际的结构变点 $t=[\tau T]$ 是未知的.下面讨论如何估计结构变化点。

设 $\hat{u}_t(\tau)$ 表示协整回归（1a）或（b）的静态回归的残差，其变结构点为 $t=[\tau T]$，即

$$\begin{aligned}&\hat{u}_t(\tau)=x_{1t}-\hat{\alpha}_0x_{2t},\quad t=1,2,...,[\tau T];\\&\hat{u}_t(\tau)=x_{1t}-\hat{\alpha}_1x_{2t},\quad t=[\tau T]+1,...,T;\end{aligned} \tag{23}$$

$$\hat{\tau}=\arg\min_{\tau\in\Im}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2(\tau) \tag{24}$$

### 3.2.3　建模步骤

检验过程是基于 $t=1,2,...,[\tau T]$ 时系统是协整的这一假设的前提下的，因此在实际的应用中应首先检验其协整关系是否存在，然后再进行协整变结构的检验与估计。

变结构协整建模的步骤可以按如下进行：

1）对（1a）或（1b）进行协整关系存在性检验， 如果 $t=1,2,...,[\tau T]$ 时协整关系存在， 则进行下一步；

2）用统计量（9），（10），（11）检验零假设（2a）与备择假设（2b）；或检验零假设（3a）与备择假设（3b）；

3）若 H$_0$ 或 H'$_0$ 被拒绝， 则估计变结构点 $\hat{\tau}$，对存在协整关系部分建立 ECM 模型。

## 4　结论

本文研究了变结构协整问题。协整的变结构问题可以归结为机理变化型协整、部分协整型、参数漂移型协整几种情况。对于部分协整型变结构协整，可以采用 Chow 检验型检验统计量

$\max F(\tau), meanF(\tau), \exp F(\tau)$ 等。在未知变结构点的条件下，对变结构点的估计方法类似于穷举的方法，也可以考虑用统计方法来估计变结构点，如最优分段方法等。关于协整变结构的建模问题，一般是先进行协整的存在性检验，然后在此基础上检验变结构的存在性及估计变结构点。如果是部分协整型变结构协整，只能对协整关系存在的部分序列建立误差校正模型进行分析和预测。

参考文献

**[1]** Andrews, D.W.K, and Ploberger, W. Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative [J]. Econometrica, 1994, 62:1383-1414.

**[2]** Andrews, D.W.K. Tests for parameter instability and structural change with unknown change point [J]. Econometrica, 1993, 61:821-856.

**[3]** Andrews, D.W.K., W.Ploberger. Optimal tests when the nuisance parameter is present only under the alternative [M]. Department of Economics, Yale University, 1992.

**[4]** Andrews, D.W.K., J.C.Monahan. An improved heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimator [J]. Econometrica, 1992, 60:953-966.

**[5]** Andrews, D.W.K., Lee I., and Ploberger, W. Optimal changepoint tests for normal linear regression [J]. Journal of Econometrics, 1996,70:9-38.

**[6]** Campos, J., and Erricsson, N.R., and Hendry, D.F. Cointegration tests in the presence of structural breaks [J]. Journal of Econometrics, 1996, 70:187-220.

**[7]** Chan, N. H. C. Z. Wei. Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes [J]. Annals of Statistics, 1988,16（1）: 367-401.

**[8]** Diebold, F.X., and Chen, C. Testing structural stability with endogenous breakpoints: A size comparison of analytic and bootstrap procedures [J]. Journal of Econometrics, 1996, 70:221-241.

**[9]** Engle, R.F. and Granger, C.W.J. Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing [J]. Econometrica, 1987, 55:251-76.

**[10]** Gregory, A.W., and Hansen, B.E. Residual-based tests for cointegration in models with regime shifts [J]. Journal of Econometrics, 1996,70:99-126.

**[11]** Hansen, B. E. Testing for parameter instability in linear models [J]. Journal of Policy Modeling, 1992, 14: 517-533.

**[12]** Hansen, B.E. Tests for Parameter Instability in Regressions with I（1） processes [J]. Journal of Business and Economics Statistics, 1992, 10, 321-335.

**[13]** Hansen, B.E. Testing for structural change in conditional models and the bootstrap [Z]. Boston College, 1996.

**[14]** Kim, J., and Park, S. Detection of change in the persistence of a linear time series [Z]. State University of New York-Albany, 1996.

**[15]** Phillips, P.C.B. Multiple regression with integrated processes [J]. Contemporary Mathematics, 1988, 80, 1988:79-105.

**[16]** Phillips, PCB, Perron, P. Testing for a unit root in time series regression [J]. Biometrika, 1988,75: 335-346.

**[17]** Quandt, R.E. Tests of the hypothesis that a linear regression obeys two separate regimes [J]. JASA, 1960, 55: 324-330.

**[18]** Schmidt, P., P.C.B. Phillips. LM test for a unit root in the presence of deterministic trends [J]. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 1992, 54: 257-287.

**[19]** Siklos, P., C.W.J. Granger. Regime-sensitive cointegration with an illustration from interest rate parity [J]. Macroeconomic Dynamics, 1997,1:640-57.

**[20]** 杨宝臣，张世英．变结构协整建模方法研究[J]．系统工程学报, 2002, 17（1）:26-31.

## Testing of Partially Co-integration

Yang Bao-chen, Zhang Shi-ying

（School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China）

**Abstract:** In this paper, we proposed the concepts and types of co-integration with structural changes, and divided the co-integration with structural changes into three types: co-integration with coefficients shift, partially co-integration, and co-integration with mechanism change, respectively. We developed the Chow-type test statistics.

**Key words:** co-integration; structure changes; partially co-integration; Chow test

收稿日期：2003-11