部分蕴涵

周熠，陈小平

(中国科学技术大学 计算机科学与技术系,安徽 合肥 230027)

摘要: 经典命题蕴涵关系$\Gamma \models P \to Q$表示在前提集Γ下，如果P真，则Q真。本文提出部分蕴涵关系$\Gamma \models P \succ Q$，其含义为：在前提Γ下，如果P真，则Q部分真。本文区分三种不同的部分蕴涵关系，并在经典命题语义的基础上，用极小部分模型方法分别给出简洁的形式刻划，讨论它们的一些基本性质，并指出在人工智能领域中的作用。

关键词: 命题逻辑；部分蕴涵；极小模型

中图分类号: B81 **文献标识码:** A

1 引言

所谓命题间的“部分蕴涵关系”，指的是诸如x和$x \wedge y$之间的关系。在经典命题逻辑中，$\models x \to x \wedge y$是不成立的。但直觉上，x蕴涵$x \wedge y$的“一部分”。作为对照，z和$x \wedge y$之间却没有这种关系（这里x，y和z均为原子命题）。这种关系在人工智能研究中有重要意义。

在经典命题逻辑中是无法区别上述情况的。后面的分析将表明，这种部分蕴涵关系不能通过对经典蕴涵的限制而获得，所以只有建立新的形式化工具才能加以刻划。部分蕴涵是经典蕴涵的减弱，经典蕴涵是部分蕴涵的一个特例。称P在Γ下部分蕴涵Q，记为$\Gamma \models P \succ Q$，如果在任何满足Γ的情况下，只要P成立，则Q就部分地成立。换句话说，P一定对Q有帮助。根据程度上的不同，我们把部分蕴涵关系分成三种：有帮助；有帮助且无负面影响；有帮助无负面影响且无冗余。

*Lm4c*及其相关工作[1]为上述目标提供了新的思路。*Lm4c*用“归约蕴涵”和极小模型方法给出了意图后承的一种简洁的形式语义。本文沿用*Lm4c*中的主要思想，在经典命题语义的基础上，刻划三种不同的部分蕴涵关系。

本文第二部分直观地分析部分蕴涵关系的含义；第三部分在经典命题语义基础上给出三种不同的部分蕴涵关系的形式定义并研究它们之间的基本联系；第四部分进一步分析三种部分蕴涵关系的性质；最后讨论部分蕴涵关系在人工智能理论研究中的重要意义以及相关工作。

2 直观分析

首先说明，“部分”和“部分蕴涵”是两个不同的概念。【例1】当前提Γ为$\{y \to x\}$时，我们可以说，y蕴涵x，所以y也部分蕴涵x。但是，y是不是x的一部分？直觉的来看，y算不上x的一部分。本文只讨论部分蕴涵关系，不讨论部分。从例1也可以看出，部分蕴涵关系是和前提集相关的。

其次，部分蕴涵不完全等同于部分加蕴涵。【例2】Γ为空，这时显然x是$x \wedge y$的部分。$x \wedge \neg y$蕴涵x，那$x \wedge \neg y$是不是部分蕴涵$x \wedge y$呢？我们可以说这是一种意义上的部分蕴涵，因为$x \wedge \neg y$达成了x，但是$x \wedge \neg y$同时也达成了$\neg y$，这与目标是矛盾的，这一点与直观意义上的部分蕴涵还有一点差别，我们把这两种情况看做不同程度上的部分蕴涵关系。

再看另外一个例子。【例3】前提集Γ为空，$x\wedge y$是不是部分蕴涵x？显然$x\wedge y$达成了x，同时也达成了y，相对于目标x而言，y是多余的部分。部分蕴涵允不允许冗余的出现？例2例3表明，部分蕴涵关系是有程度区别的。本文将区别三种不同的部分蕴涵关系。

由于部分蕴涵关系程度上有差异，需要进一步地用更加准确的概念加以分析，为此我们借助有帮助、无负面影响、无冗余三个概念。在前提Γ下P对Q有帮助是指：在Γ为真的任何情况下，P都完成了Q的一部分。有帮助是一种最弱的部分蕴涵关系，例2中的$x\wedge\neg y$就对$x\wedge y$有帮助，但同时还有负面影响。有帮助且无负面影响就是一种较强的部分蕴涵关系。例3中的$x\wedge y$对于x来说就是有帮助无负面影响，同时也带来冗余。有帮助无负面影响且无冗余是一种严格意义上的部分蕴涵关系。从弱到强，部分蕴涵关系依次为有帮助，有帮助无负面影响，有帮助无负面影响且无冗余。

首先考虑有帮助的直觉含义。原子之间的关系通过前提给出。文字集是原子和原子的否定构成的集合。当$P=q_0$是文字时，问题相对简单。只要存在另外一些文字q_1，q_2，……，q_k使得q_0，q_1，……，q_k相容，$\Gamma\not\models(q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_k)\rightarrow Q$且$\Gamma\models(q_0\wedge q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_k)\rightarrow Q$，则$q_0$对Q有帮助。直观上看，P表示使$Q$为真的一项必要（但未必充分）的附加条件。因此可以说P在Γ下对Q是有帮助的。

但是这样推广到一般的形式就不恰当了。【例4】前提Γ为空，$P=x\vee y$，$Q=x$。此时从直觉上来看，P并未完成Q的一部分，至少不是无论在什么情况下，P都完成了Q的一部分（有可能P的结果刚好使得y成立而x不成立）。在此情况下，令$q_1=\neg y$，仍然满足前一段所说的条件，但是P对Q不一定有帮助。所以对于一般的情形，不能按上述方式定义有帮助。其原因是我们可以把文字看成相互独立无关。

再看一种比较特殊的形式，即当$P=p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_r$为相容文字的合取时。我们仍可以按照原子的情形推广，只要存在另外一些文字q_1，q_2，……，q_k使得p_1，p_2，……，p_r，q_1，……，q_k相容，$\Gamma\not\models(q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_k)\rightarrow Q$且$\Gamma\models(p_1\wedge\cdots\wedge p_r\wedge q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_k)\rightarrow Q$。直观的含义仍与原子情形相同。

如果$\Gamma\models(q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_r)\rightarrow Q$且文字集$\pi=\{q_1, q_2, \cdots, q_r\}$相容，则称$\pi$为$Q$在$\Gamma$下的一个完全组，直观的含义是：只要满足这些文字表达的条件，那么Q就成立了。如果对任何$i(1\leq i\leq r)$有$\Gamma\not\models q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_{i-1}\wedge q_{i+1}\wedge\cdots\wedge q_r\rightarrow Q$，则称这样的$\pi$是$Q$在$\Gamma$下的一个极小完全组。按照上面的分析，$\pi$中的每个文字都是对$Q$有帮助的。$Q$在$\Gamma$下的极小完全组一般来说不是唯一的。

如果对于P来说，有$\Gamma\models P\rightarrow q_1$，而$q_1$又是$Q$的某个极小完全组的一个元素，那么$P$就实现了$Q$的一部分，$P$通过$q_1$对$Q$有了帮助。遗憾的是，并不是每个有帮助的例子中都存在这样的q_1。【例5】Γ为空，$P=x\vee y$，$Q=(x\vee y)\wedge z$。P对Q应该是有帮助的，但是并不存在这样的文字满足上述条件。

假设每个原子的指派已经给定（0或1），那么满足前提集且满足P的这样的一组指派就是P在Γ下的一个完全组π。如果π使得Q的某个极小完全组π_1的某一元素q_1成立，那么P就通过π，π_1对Q有帮助。

现在去掉上面的假设。对P在Γ下的一个完全组π，如果存在Q的一个极小完全组π_1使得π和π_1的交集非空，那么在这种情况下P就对Q有帮助（通过π，π_1）；只要对P的每个完全组，都存在Q的极小完全组满足上条件，则P对Q有帮助。

综上，P在前提Γ下对Q有帮助是指，对P在Γ下的每个完全组π，都存在Q在Γ下的极小完全组π_1，使得$\pi\cap\pi_1$非空。这个直观定义等价于对P在Γ下的每个极小完全组π，都存在Q在Γ下的极小完全组π_1，使得$\pi\cap\pi_1$非空。

下面我们在前面分析的基础上刻划无负面影响和无冗余。先考虑负面影响出现的原因。按照有帮助的定义，在P通过P在Γ下的极小完全组π和Q在Γ下的极小完全组π_1对Q有帮

助的情形里，如果出现了文字q，q在π中，而q的否定在π_1中，那么负面影响就出现了。所以有帮助无负面影响不仅要求π和π_1的交集非空，而且要求π和$-\pi_1$的交集为空（$-\pi_1$是指把所有π_1的文字取反得到的相容文字集合）。

当然仅仅从上面的角度说明是不够的。仍然考虑对P在Γ下的每个成立原因（完全组）π，π对Q有帮助无负面影响就是存在Q在Γ下的极小完全组π_1使得$\pi \cap \pi_1$非空，而$\pi \cap -\pi_1$为空。所以称P在前提Γ下对Q有帮助无负面影响是指对P在Γ下的每个完全组π，都存在Q在Γ下的极小完全组π_1，使得$\pi \cap \pi_1$非空并且$\pi \cap -\pi_1$为空。

同样的考虑有帮助无负面影响且无冗余我们可以得到P在前提Γ下对Q有帮助无负面影响无冗余是指对P在Γ下的每个完全组π，都存在Q在Γ下的极小完全组π_1，使得$\pi \subseteq \pi_1$。

3 形式化

本文在命题语言的范畴内讨论问题。公式集 L 是由一组原子集 $Atom=\{x_1, x_2, \cdots\}$和标准的连接词$\neg$，$\wedge$，$\vee$递归组成。对于 $Atom$ 的任何一个子集 A，$L(A)= A\cup\{\neg a \mid a\in A\}$。$\Gamma$为 L 中公式的集合，称为前提；P，Q 等大写字母表示 L 中公式；p，q 等小写字母表示 $L(Atom)$中元素，即文字。$Atom(\Gamma)$表示所有在公式集Γ中出现的原子集合。$Atom(P)$表示在公式 P 中出现的原子的集合。本系统建立在经典命题之上。和经典命题逻辑一样定义连接词$\rightarrow$和$\leftrightarrow$。$\models$表示语义上的推出关系。

定义 1（赋值）称σ是 L 上的一个赋值是指σ是一个 L 到集合$\{1,0\}$的映射σ：$L\rightarrow\{1, 0\}$满足对任意 L 中的公式 P 和 Q：

(1) $\sigma(\neg Q)=1$ iff $\sigma(Q)=0$.

(2) $\sigma(P\vee Q)=1$ iff $\sigma(P)=1$ or $\sigma(Q)=1$.

(3) $\sigma(P\wedge Q)=1$ iff $\sigma(P)=1$ and $\sigma(Q)=1$.

定义 2（指派）一个指派θ是一个从原子集到$\{1, 0\}$的映射θ：$Atom \rightarrow\{1, 0\}$。

前面两个定义是借用经典命题语义的概念。很显然，每一个指派都可以唯一的扩张成一个赋值。所以对每一个指派而言公式在这个指派下的值是唯一确定的。同时，一个指派也唯一的等价于一个相容文字集，对于 $Atom$ 里面的每一个原子 x，x 和$\neg x$ 有且仅有一个在该文字集中。所以我们可以用下面等价的方式来定义指派。

定义 2'（指派）一个指派θ是指一个文字集合，对每一个 $Atom$ 中的原子 x，x 和$\neg x$ 有且仅有一个属于θ。

在本文中，以后指派就采用后一种定义。

定义 3（部分指派）部分指派π是一个文字的集合，使得不存在原子 x 使 $x \in\pi$ 且$\neg x \in\pi$。特别地，π为空集时记为π_0。

部分指派的概念是经典指派的概念的一个扩充，经典指派要求对每个原子都有一个赋值为 0 或者 1，而部分指派只要求对其中的部分原子赋为 0 或 1 就可以了。当然，完全的指派也是一种特殊的部分指派。原子 x 在部分指派π中出现表示 x 在π中被赋值为真；$\neg x$ 在π中出现表示 x 被赋值为假；如果 x 和$\neg x$ 都不在π中出现，则表示 x 未被赋值。为了方便，有时把部分指派如$\{x_1, \neg x_2, x_4, \cdots\cdots\}$表为$\{1,0,*,1,\ldots\ldots\}$，其中*表示对应文字（这里是 x_3）不出现。

定义 4（延拓）称指派θ是部分指派π的延拓是指$\pi\subseteq\theta$。

对于任意一个指派θ，公式 P 在θ下都有确定的值。但是，对于部分指派π，未必都有确定的值，因为对π的不同延拓，P 在不同延拓下的值可能不一样。我们这里只关心这样的π，P 对，使得对任意π的延拓θ，P 在θ下的值完全相同。

定义 5（Γ模型）称部分指派π是公式 P 的Γ模型是指：

（1）存在π的延拓θ，在θ唯一的扩张赋值σ下面，对任意公式 $Q\in\Gamma$，$\sigma(Q)=1$。

（2）对任意满足(1)要求的θ，对于θ的唯一扩张σ有$\sigma(P)=1$。

P的所有Γ模型的集合记为$\Gamma[P]$。*Atom* 是无穷集，那么$\Gamma[P]$为一无穷集。

Γ模型是经典逻辑语义中“成真指派”概念的推广。按照第二部分的直观分析，π是P的Γ模型就是说π是P在Γ下的一个完全组，即成立原因。一个Γ模型包含了Γ的作用，而且可以对某些原子不赋予“真假”，以此表示即使不考虑或不知道这些原子的真假，命题P都成立。例如，当Γ为空时，$x_1\vee x_2$的一个Γ模型是{1,*,*, …}，其中只有x_1被赋值为真，其余原子均未被赋值，这就足以使命题为真了。{1,0,*,…}也是$x_1\vee x_2$的一个Γ模型，但π_0={*,*,*,…}就不是了。

定义 6（极小Γ模型） 称部分指派π是公式P的极小Γ模型是指：

（1）$\pi\in\Gamma[P]$;

（2）不存在 $\pi_1\in\Gamma[P]$使$\pi_1\subset\pi$。

P的所有极小Γ模型的集合记为$\Gamma(P)$，当Γ和P的原子个数有限时。易知该集合为$\Gamma[P]$的有限子集。

直观上，π是P的极小Γ模型就是说π是P在Γ下的一个极小完全组。π中的每个文字x都是P的一部分，可以说是P的一个必要属性－－没有x，仅靠π中其他元素的作用无法使P为真。当Γ为空时，$x_1\vee x_2$的极小Γ模型只有{1,*,*, …}和{*,1,*, …}。

任给部分指派π，令$-\pi$为由π中文字的否定组成的部分指派。

定义 7（弱部分蕴涵） 称公式P在前提Γ下弱部分蕴涵Q，记为$\Gamma\models P\succ_1 Q$是指如果$\Gamma(P)$非空且对任何$\pi\in\Gamma(P)$，存在$\pi_1\in\Gamma(Q)$，使得：$\pi\cap\pi_1$ 非空。

弱部分蕴涵刻划的是P在Γ下对Q有帮助。

定义 8（部分蕴涵） 称公式P在前提Γ下部分蕴涵Q，记为$\Gamma\models P\succ_2 Q$，如果$\Gamma(P)$非空且对任何$\pi\in\Gamma(P)$，存在$\pi_1\in\Gamma(P)$，使得：

（1）$\pi\cap\pi_1$ 非空。

（2）$\pi\cap-\pi_1$为空 。

部分蕴涵刻划的是P在Γ下对Q有帮助且无负面影响。

定义 9（强部分蕴涵） 称公式P在前提Γ下强部分蕴涵Q，记为$\Gamma\models P\succ_3 Q$是指如果$\Gamma(P)$非空且$\pi_0\notin\Gamma(P)$，且对任何$\pi\in\Gamma(P)$，存在$\pi_1\in\Gamma(Q)$，使得：$\pi\subseteq\pi_1$ 。

强部分蕴涵刻划的是P在Γ下对Q有帮助无负面影响且无冗余。

定理 10（三种部分蕴涵的基本关系） 三种部分蕴涵关系依次是由弱到强的，即有：$\Gamma\models P\succ_3 Q\Rightarrow\Gamma\models P\succ_2 Q\Rightarrow\Gamma\models P\succ_1 Q$。

证：先证$\Gamma\models P\succ_3 Q\Rightarrow\Gamma\models P\succ_2 Q$。因为$\pi\subset\pi_1$且$\pi\neq\pi_0$，所以$\pi\cap\pi_1$非空。反设$x\in\pi\cap-\pi_1$，那么$x\in\pi$，所以$x\in\pi_1$，所以$x\in-\pi_1\cap\pi_1$，矛盾，所以$\pi\cap-\pi_1$为空。所以$\Gamma\models P\succ_3 Q\Rightarrow\Gamma\models P\succ_2 Q$。

又$\Gamma\models P\succ_2 Q\Rightarrow\Gamma\models P\succ_1 Q$显然，所以$\Gamma\models P\succ_3 Q\Rightarrow\Gamma\models P\succ_2 Q\Rightarrow\Gamma\models P\succ_1 Q$成立。

4 进一步讨论

本节首先给出一些原子层上的例子 。因为定理10，所以这里对给定的Γ，P，Q只给出其中的一种或两种关系。特别地，当前提集为空时，省略不写。

(p-1) $\models x\succ_3 x\wedge y$;

(p-2) $\models x\succ_3 x\vee y$;

(p-3) $\models x\wedge y\succ_2 x$;

(p-4) $\not\models x\wedge y\succ_3 x$;

(p-5) $\nvDash x \vee y \succ_1 x$;

(p-6) $\nvDash y \succ_1 x$;

(p-7) $\nvDash x \wedge \neg y \succ_1 x \wedge y$;

(p-8) $\nvDash x \wedge \neg y \succ_2 x \wedge y$;

(p-9) $\vDash x \vee y \succ_3 (x \vee y) \wedge z$;

(p-10) $\vDash x \succ_3 x \wedge (\neg x \vee y)$;

(p-11) $\nvDash \neg x \succ_1 x \wedge (\neg x \vee y)$;

(p-12) $\vDash x \succ_3 (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$;

(p-13) $\vDash \neg x \succ_3 (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$;

(p-14) $\{y \rightarrow x\} \vDash y \succ_3 x$;

(p-15) $\{\neg y\} \vDash x \vee y \succ_3 x$;

(p-16) $\{\neg y\} \nvDash x \wedge y \succ_2 x$;

由(p-1)～(p-16)可知，部分蕴涵关系和经典的命题逻辑语义后承是不同的，但也有相似之处。(p-6)和(p-14)，(p-5)和(p-15)表明部分蕴涵关系是和前提集相关的。(p-14)说明例1在本系统中成立的。(p-5)表明例4中的两个公式之间的关系并不是部分蕴涵关系。(p-7)和(p-8)说明弱部分蕴涵和部分蕴涵的区别，例2在本系统中也是成立的。(p-3)和(p-4)说明了部分蕴涵和强部分蕴涵的区别，同时也说明例3在本系统中成立的。例5在(p-9)中得到验证。(p-10)和(p-11)说明了部分蕴涵避免了不必要的“副作用”。 (p-12)和(p-13)表明，一个公式和它的否定可以同时部分蕴涵另一个公式。这是符合直觉的，在某些（但并非所有）情况下，达到一个状态或它的否定都对目标有帮助（比不做强）。(p-3)和(p-16)的对比说明，部分蕴涵关系是非单调的。

定义 11（**平凡性**）如果 $\Gamma \vDash P$ 或者 $\Gamma \vDash \neg P$，那么称 P 在 Γ 下平凡，否则称 P 在 Γ 下非平凡。

定理 12 如果 $\Gamma \vDash P \rightarrow Q$，那么 $\Gamma\ [P] \subseteq \Gamma\ [Q]$。

证：任取 π 是 P 的 Γ 模型，又对任意 π 的延拓 θ，θ 的扩张 σ 满足对任给 $R \in \Gamma$，$\sigma(R)=1$，且 $\sigma(P)=1$，由 $\Gamma \vDash P \rightarrow Q$，可知 $\sigma(Q)=1$。所以 π 也是 Q 的 Γ 模型。

定理 13 若 $\Gamma \vDash P \leftrightarrow Q$，则 $\Gamma\ [P] = \Gamma\ [Q]$ 并且 $\Gamma\ (P) = \Gamma\ (Q)$。

证： 由定理 12，$\Gamma\ [P] = \Gamma\ [Q]$显然成立。对 $\Gamma\ (P) = \Gamma\ (Q)$，只需证明 $\Gamma\ (P) \subseteq \Gamma\ (Q)$ 即可。假设 P 的某个极小 Γ 模型 π 不是 Q 的极小 Γ-模型，由定理 12，π 是 Q 的 Γ 模型。由极小模型定义，存在 π_1 是 Q 的极小 Γ 模型使得 $\pi_1 \subset \pi$。于是由 $\Gamma\ [P] = \Gamma\ [Q]$，$\pi_1$ 和 π 都是 P 的 Γ 模型，所以 π 不是 P 的极小 Γ 模型，矛盾。故必有 $\Gamma\ (P) \subseteq \Gamma\ (Q)$。得证。

推论 14（**等价可替换性**）如果 $\Gamma \vDash P \leftrightarrow Q$，则 P 和 Q 在部分蕴涵关系中起相同作用。

直接由定理 13 可以得出。

定理 15 （**与经典蕴涵的关系**）如果 $\Gamma \vDash P \rightarrow Q$，$P$，$Q$ 在 Γ 非平凡则 $\Gamma \vDash P \succ_2 Q$。

证： 任取 P 的极小 Γ 模型 π。由定理 12，π 也是 Q 的 Γ 模型。如果 π 是 P 的极小 Γ 模型，由非平凡性，易知命题成立；否则，存在文字 $x \in \pi$，$\pi \backslash \{x\}$仍为 P 的 Γ 模型。重复此过程有限次，最终将得到 P 的一个极小 Γ 模型 π_1，它是 π 的子集而且由 P 非平凡性非空。此时命题也成立。得证。

该定理表明了，部分蕴涵关系是经典命题逻辑的扩充。由(p-4)可知，在此情形，$\Gamma \vDash Q \succ_3 P$ 不一定成立。强部分蕴涵并不是经典命题逻辑的扩充，这是因为要求前件对后件无冗余。

定理 16 如果$\Gamma \models P$，则$\Gamma(P)=\{\pi_0\}$。

证： 不难知，$\pi_0 \in \Gamma(P)$。又设存在$\pi \neq \pi_0$，$\pi \in \Gamma(P)$，那么$\pi_0 \in \Gamma(P)$，且$\pi_0 \subset \Pi$，与极小模型定义矛盾。所以原命题成立。

定理 17 如果$\Gamma \models \neg P$，则$\Gamma(P)$为空。

证： 反设此时π是 P 的极小Γ模型。由定义，π也为 P 的Γ模型。所以存在π的延拓θ，θ的唯一扩张σ使得任取 $Q \in \Gamma$，$\sigma(Q)$=11。由经典语义以及$\Gamma \models \neg P$，可知$\sigma(P)$=0，与第二条定义矛盾。故原命题成立。

推论 18（非平凡性）若 P 或 Q 在Γ下平凡，则$\Gamma \not\models Q \succ_1 P$。

由定理 16，17 易推知。

定理 19（强部分蕴涵传递性）如果$\Gamma \models P \succ_3 Q$ 且$\Gamma \models Q \succ_3 R$，则$\Gamma \models P \succ_3 R$。

证： 由推论 15，我们仅讨论非平凡情形。由强部分蕴涵定义，对每一个$\pi \in \Gamma(P)$，存在$\pi_1 \in \Gamma(Q)$使得$\pi \subseteq \pi_1$。又对$\pi_1 \in \Gamma(Q)$，存在$\pi_2 \in \Gamma(R)$，使得$\pi_1 \subseteq \pi_2$，所以$\pi \subseteq \pi_2$。故$\Gamma \models P \succ_3 R$。

由(p-1)，对称的有$\models y \succ_2 x \wedge y$，和(p-3)和(p-6)比较可知传递性对部分蕴涵和弱部分蕴涵均不成立，这是因为有可能 P 对 Q 有帮助的部分恰恰在 Q 对 R 的帮助中是冗余部分。

性质 20（可判定性）部分蕴涵关系判定式是可判定的。

简单地来看，我们可以列举出所有的极小模型。快速的判定算法是下一步工作的一个重点。

性质 21（非单调性）部分蕴涵关系是非单调的。

性质 22（无关可分离性）如果 Atom(Γ)，Atom(P)，Atom(Q)三者的交集都是空集，那么可以把 P，Q 当作原子看待。

当然，这样的一种可分离性还是相对较弱，进一步的可分离性正在考虑中。

5 结论

部分蕴涵在人工智能中有某种基本的作用。当前AI的研究侧重于行为理性，Doyle[2]作了说明。从理论理性的观点看，行为A是合理的当且仅当A是可靠的；从心理学或者说启发式角度看，行为A是合理的当且仅当A是有用的；经济学观点则要求A既有一定的可靠性，又是有用的。我们认为，一个行动是合理的，则这个行动就有一定的用处，而“用处”体现在该行动对于主体某些愿望的关系之中。一般意义上的有用并未强到一定要求行动完全实现愿望。所以完全局限于经典逻辑是不够的。决策论从另一个角度刻划有用，但并不关注行动和命题之间在内容上的联系，同时也有很强的主观性。对于“有用”这样一个核心概念，给出其形式刻划是很有意义的。本文引入部分蕴涵关系为此进行了新的尝试。部分蕴含关系扩充了经典蕴涵关系，给出了有用的另一个标准，虽然这一标准并未完全包括全部类型的有用。

部分蕴涵在人工智能中的应用之一是规划问题。不严格地说，规划是要在一个环境Γ下，对给定目标G，生成一个计划P，使得$\Gamma \models P \rightarrow G$。然而，在很多实际的应用中，由于资源有限性和知识不完备性，主体(Agent)不能够形成一个计划来完整地实现其目标G(比如不存在P，使得$\Gamma \not\models P \rightarrow (x \wedge y)$)，但是可以形成一个计划部分地实现目标（比如$\Gamma \models P \rightarrow x$）。在这样的情况下，主体生成并执行$P$可以获得更多的机会，从而具有更大的自主性和灵活性。部分蕴含为这种规划提供了标准，它并不要求计划P满足$\Gamma \models P \rightarrow G$，而只要求满足$\Gamma \models P \succ G$。

另一项相关的工作是对愿望系列心理状态（motivational attitudes）的刻划。在AI以前研究中，对信念系列的心理状态的刻划非常的多且引人注意。事实上，愿望系列的心理状态有着同样重要的地位[4, 5]，但是收到的关注相对较少[3]。与部分蕴涵密切相关的是隐式愿望问题，是愿望刻划中的核心问题之一。

BDI建模[6, 7]是Agent 理论研究中的一个广受关注的方向。意图后承的刻画一直是BDI理论研究的中心问题之一。文[1]给出了一种意图后承的形式理论*Lm4c*。部分蕴涵和*Lm4c*关系密切，部分蕴涵为意向（可供选择的意图）后承提供了一种逻辑机制。

在本文的基础上还有大量进一步的工作有待完成。其中之一是给出“有用”概念的进一步形式化刻划；另一部分是部分蕴涵在规划、愿望形式化方面的应用。另外还有部分蕴涵的公理化和一阶推广。

参考文献

[1] X．Chen，G．Liu．A logic of intention [J]. Proc. of IJCAI-99(1999).

[2] J.Doyle. Rationality and its role in reasoning, Computational Intelligence, 8(2):376-409, 1992.

[3] J. Doyle, Y, Shoham, and M. P. Wellman, A logic of relative desire, in: Proc. of the 6th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, Pages 16-31, 1991.

[4] M. P. Wellman, J. Doyle. Preference semantics for goals. In proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence, 1991.

[5] Z. Huang, J. Bell, Dynamic goal hierarchies, In Intelligent Agent Systems: Theoretical and Practical Issues, LNAI 1027 page 88-103, Springer, 1997.

[6] P.R.Cohen, H.J.Levesque. Intention is choice with commitment [J]. Artificial Intelligence, 42(1990)．213－261．

[7] A. S. Rao and M. Georgeff, Decision procedures of BDI logics, Journal of logic and computation, 8(3): 293-344, 1998.

Partial Implication

ZHOU Yi, CHEN Xiao-ping

(Department of Computer Science & Technology, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Abstract：In the classical propositional logic, $\Gamma \models P \rightarrow Q$ means that under Γ, if *P* is true, then *Q* is true. In this paper, we extend implication to partial implication, denoted by $\Gamma \models P \succ Q$, it means that under Γ, if *P* is true, then *Q* is partly true. We distinguish three kinds of partial implications, and provide a simple and intuitive semantics based on propositional semantics by using minimal model, and then, discuss some basic properties of partial implication and point out some uses of partial implication in Artificial Intelligence.

Key words： propositional logic, partial implication, minimal model

收稿日期:2003-10-31;

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(60275024)