次协调逻辑系统要么语法等价于某一协调逻辑系统，要么无所谓“次协调”

庄朝晖

（厦门大学计算机科学系软件研究所，福建 厦门 361005，电子邮件：chzhuang@xmu.edu.cn）

摘要：本文首先介绍了次协调逻辑的发展情况及其基本概念，然后介绍了科斯塔创建的C1系统。文章认为，C1 系统里所谓的“┑”并不是经典逻辑意义上的“┑”，所以该系统并不是真正意义的次协调逻辑系统。而且有趣的是，原系统中复合而成的“～”表达了经典逻辑意义上的“┑”。基于此，通过把原系统中的“～”理解为经典逻辑意义上的“┑”，而把原系统中的“┑”理解为另一一元连接词，这时的C1就是一种协调逻辑。使用这种方法，大部分的次协调逻辑对应于某个协调逻辑，剩下的次协调逻辑则是无所谓“次协调”意义的。接着，为了更深入地理解形式系统语法的本质，本文引入语法等价的概念。如果两个形式系统通过符号字母间、公式间的替换后是等价的话，称它们为语法等价的形式系统。本文对语法等价进行了非形式化的探讨。最后，本文对“一致性”和“不一致性”进行一系列的思考：“一致性”不能脱离形式系统而谈、形式系统的“一致性”与形式系统中“┑”的关系密切、对象语言的一致性与元语言的一致性关系密切、哥德尔在第一不完全性定理的证明中之所以能够生成自引用式的哥德尔语句，一个本质性的原因就在于元语言与对象语言之间存在的自引用——数学与逻辑的相互引用。

关键词： 次协调逻辑；形式系统的语法等价；不一致；自引用

中图分类号： B81　　**文献标识码：** A

1 次协调逻辑简介

次协调逻辑英文为 Paraconsistent Logic，中文有时翻译为非协调逻辑［1］，有时亦为亚相容逻辑［2］，或者次协调逻辑［3］，甚至超协调逻辑［4］。中文的翻译，还没有一个比较一致的看法。本文统一以次协调逻辑称之。次协调逻辑在国际上方兴未艾，顶级学术期刊和学术会议上都常有论及。在国内哲学界，社科院的张清宇，武汉大学的桂起权，南京大学张建军等学者对次协调逻辑都有若干研究和著述；在国内计算科学界，北京大学的林作铨，李未对一类次协调逻辑——悖论逻辑也作过研究。

次协调逻辑在国外主要有两个派别，一派是巴西科斯塔（N.C.A. da Costa，1929－）创建的 Cn(1<=n<=ω)，一派是澳大利亚普瑞斯特（Priest）创建的悖论逻辑（Logic of Paradox）。

如果有一种逻辑系统允许 A 和┑A 同时成立，那么这个系统称为不协调（或称不一致，又称不相容）的。由反证法规则可以推导出，在不协调的系统里，所有的公式都是真的。这种公式全真的系统，我们称之为“不足道的系统”，也就是没有研究价值的系统。如此可以看出，“不协调的系统”（通过反证法规则）一定是“不足道的系统”。那么，我们能不能构造一个“不协调但又足道的系统”呢？次协调逻辑系统的目标就是建立这样的“不协调但又足道的系统”，但前提是次协调逻辑系统不能承认反证法。

2 科斯塔的 C1 命题演算系统置疑

［1］系统 C1 的公理是具有以下形式之一的公式：

(A1)$A\to(B\to A)$

(A2)$(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$

(A3)$A\to(B\to A\wedge B)$

(A4)$A\wedge B\to A$

(A5) $A\wedge B\to B$

(A6)$(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$

(A7)$A\to A\vee B$

(A8) $B\to A\vee B$

(A9)$A\vee\neg A$

(A10) $\neg\neg A\to A$

(A11) $\neg(B\wedge\neg B)\to((A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))$

(A12) $(\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg(B\wedge\neg B))\to(\neg((A\wedge B)\wedge\neg(A\wedge B))\wedge\neg((A\to B)\wedge\neg(A\to B)))$

由以上公理模式特别是 A11 可以看出，在 C1 系统里面并不满足关于“┐”的反证律。（［1］）系统 C1 的否定符┐本身虽是一种弱的否定，但由它定义的～却相当于古典命题逻辑中的否定。C1 中的～是这样定义的：～A＝def┐A∧┐(A∧┐A)。关于这个“～”可以得到如下定理成立：（～A→B）→（(～A→～B）→B)，这正是关于“～”的反证律。并且在 C1 中，连接词“～”、“∧”、“∨”、“→”分别具有经典命题演算中非、与、或、蕴涵的一切经典性质。在《次协调逻辑与人工智能》和《哲学逻辑研究》里面都提到这个特性。

但是，现在我们要问：压根到底，“┐”与“～”都只是 C1 系统中的符号,为什么说“┐”是 C1 系统的否定符，为什么不说“～”是 C1 系统的否定符？我们用个简单的符号替换，把“┐”与“～”对换一下，把“～”当作系统中的否定符，那么这时的 C1 系统其实还是协调逻辑，而“┐”只是这个系统里面的某个一元连接词。

由此看来，所谓的次协调逻辑 C1 其实本质上可以对应于某个协调逻辑系统。按照这种方法，我们可以把大部分的次协调逻辑对应为一种协调逻辑。如果该次协调系统可以定义出经典否定符，那么我们就把它定为该系统的否定符，这样该次协调逻辑系统就对应为协调逻辑系统；如果该次协调系统不能定义出经典否定符，那么这个该次协调系统也没必要称为次协调逻辑，因为所谓“不协调”是针对经典否定来讲的。为了研究这种对应性，我们第三部分将引入形式系统语法等价的概念。为了研究“不协调”与经典否定的关系，我们第四部分对“不一致”进行更深入的思考。在此意义上，所谓的次协调逻辑系统要么是对应于协调系统的，要么根本没意义。

其实，1995 年澳大利亚学者斯莱特尔（B.H.Slater）在《Journal of Philosophical Logic》已经发表了“Paraconsistent logics？”一文，对次协调的否定并不等于经典否定提出了置疑。斯莱特尔主要在语义方面，批评普瑞斯特 LP 系统中的否定并不等于经典否定。但可惜的是，斯莱特尔的置疑并没有引起足够的重视。本文则侧重从形式系统的语法方面，对次协调逻辑提出置疑。

3 形式系统的语法等价——一个非形式化的描述

在上面，我们看到次协调逻辑 C1 可以对应于另一个协调逻辑。这种对应关系是怎样产生的呢？从形式系统的语法间，我们是否可以把捉到它们某种更本质的联系？

首先，引入一个定义。如果两个形式系统通过符号字母间、公式间的替换后是等价的话，我们称它们为语法等价的形式系统。

举个简单的例子：在形式系统 Z1 中只有一个公理模式：A∨B，在形式系统 Z2 中也只有一个公理模式：D→A。虽然这两个形式系统表面不一样，但其实我们只要把 Z1 中的 A 对应为 Z2 中的 D，把 Z1 中的∨对应为 Z2 中的→，把 Z1 中的 B 对应为 Z2 中的 A， 我们可以发现 Z1 和 Z2 说的是一个东西，我们就称它们为语法等价的。

上面的次协调逻辑系统 C1 也是语法等价于一个协调逻辑系统（假设为 Z3）。这里面的对应关系稍微复杂一点，C1 的～A＝def┐A∧┐(A∧┐A)，我们是把 C1 上的一个公式对应于 Z3 上的经典否定符修饰的原子公式。

4 对“形式系统的不一致”的思考

我们有必要对“形式系统的不一致”这个概念进行思考，我们也有必要对元语言进行思考。

形式系统的一致性指的是不存在公式 A，使得在这个形式系统内├A 并且├ ┐A；而形式系统的不一致性指的是存在公式 A，使得在这个形式系统内├A 并且├ ┐A。

考察这个定义，我们可以发现，形式系统的一致性与什么叫“├”，与什么叫“┐”有关。而什么叫“├”，与形式系统的字母表，公式集，公理集，推理规则都分不开。另外，什么叫“┐”，它与“┐”在形式系统中的出现，与“┐”和其它符号的关联有关系。举个例子，比如在《数学家的逻辑》［5］中所谓 L 系统的一致性，指的是不存在公式 A，使得在这个形式系统内├A 并且├ ┐A。而这里的“┐”在 L 系统中是有特殊定义的，L 的公理共有三条：

（i）（A→（B→A））

(ii)（（A→（B→C））→（（A→B）→（A→C）））

(iii)（（（┐A）→（┐B））→（B→A））

在第三条公理里规定了“┐”这个符号在 L 中的出现。我们不能脱离这条公理来谈 L 的一致性，我们也不能脱离形式系统 L 来谈 L 的一致性。所谓一致性只能是某个形式系统的一致性，而不能是外在于具体某一形式系统而谈的一致性，不能是泛泛而言的一致性。每个形式系统中定义的“┐”可能本质是不一样的，只能在某一具体的形式系统中，我们才可以知道“┐”有什么作用。知道了具体的形式系统定义和关于“┐”的规则，我们才可以定义什么是该形式系统的一致性。因此，不同形式系统的一致性，往往说的并不是同一个东西。次协调逻辑系统所说的“不一致”与协调逻辑系统所说的“不一致”根本就不是一个概念，不存在可比性。然而，次协调逻辑系统所说的“不一致”是相对协调逻辑系统的“一致性”来说的。在此意义上，我们说次协调逻辑系统是无所谓“次协调”意义的。如果次协调逻辑可以说它是“不一致”的，那么在协调逻辑系统里面，也可以定义另一个“一元连接词↑”，使得 A 与↑A 都成立，那么是否也可以说协调逻辑系统里面关于“↑”也是“不一致”的?

考察这个定义，我们还可以发现，形式系统不一致的定义与语义是无关的。形式系统一般要求具有三个性质：一致性、可靠性、完备性。一致性与可靠性、完备性的一个区别是：可靠性与完备性限定是形式系统的语法与语义之间的对应关系，而一致性只是限定形式系统

的语法部分。

但是，令人惊奇地是，形式系统一致性的证明却往往要用到形式系统的可靠性定理，如《数学家的逻辑》在证明命题演算的和谓词演算的一致性，使用了反证法而且都用到了相应的可靠性定理（见命题 2.17 和命题 4.42）。然而这种证明方式，不免又让人产生另一个问题。一致性的证明依赖于可靠性，而可靠性的证明又依赖于形式系统赋值的定义，而形式系统的赋值说道：A 的解释和┐A 的解释不能一样。而这种赋值方式其实已经规定了 A 和┐A 的语义一致性。这样整个来看，就是用形式系统语义的一致性来证明形式系统语法的一致性。

另外，刚才提到，《数学家的逻辑》在证明命题演算的和谓词演算的一致性，都使用了反证法。而反证法是以一致性为前提的，所以这里已经假定了元语言的一致性。也就是，以元语言的一致性作为前提，才推导出对象语言的一致性。

思考到这里，我们不得不对定义形式系统的元语言有个更认真的思考。一般认为，元语言是半形式化的自然语言。在元语言里面，反证法，一致性，矛盾律，数学归纳法等数学概念已经被广泛的认同。或者可以这么说，我们是在一个承认了反证法，一致性，矛盾律，数学归纳法等数学概念的元语言来定义对象语言的，并推导出对象语言的反证法，一致性，矛盾律等概念。

哥德尔在证明第一不完全性定理的时候，使用了哥德尔编码和对角线的方法，哥德尔语句的直观理解是："这个数论语句在系统中是不可证的。"［6］通过哥德尔编码，哥德尔把公式的证明序列编码成自然数，又把这个自然数嵌入到公式中。可证性本来是元语言层的一个概念，哥德尔居然用这种编码把它拉到了对象语言层。这为何可能？我想，这是因为元语言中已经包含了数学归纳法等具有自然数性质的公理，并且元语言在定义符号时也用到了自然数的性质。而作为对象语言的形式系统只要包含了数论，它就可以描述自然数性质。元语言和对象语言均包含自然数性质，这正是哥德尔第一不完全性定理得以证明的重要基础。

罗素认为逻辑可以作数学的基础，但是定义逻辑系统的元语言又离不开数学，在此意义上，只能先有数学，再有逻辑；反过来，如果是先有数学，那么数学的一致性，不矛盾性又由谁来定义，看来也只能由逻辑。这样来看，逻辑又要在数学之前。这种自引用式的循环，正是哥德尔第一不完全性定理的基础，自引用式的哥德尔语句正是建构在这种更高层次的自引用之上的。

参考文献:

［1］张清宇，郭世铭，李小五著.《哲学逻辑研究》［M］.社会科学文献出版社，1997

［2］张建军著.《逻辑悖论研究引论》［M］.南京大学出版社,2002

［3］桂起权,陈自立,朱福喜著.《次协调逻辑与人工智能》［M］.武汉大学出版社,2002

［4］林作铨，李未.悖论逻辑的表演算［J］.软件学报,1996,7(6):345-353

［5］A.G.Hamilton 著,骆如枫译.数学家的逻辑［M］.商务印书馆,1989.8

［6］侯世达著,郭维德等译.《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异壁之大成》［M］.商务印书馆,1996

Paraconsistent Logic System is syntax-equivalent to some Consistent Logic System or having not the sense of "Paraconsistent"

ZHUANG Chao-hui

(Inst. of Software of Computer Science Dept. of Xiamen Univ., Xiamen 361005, P.R.China)

Abstract：In this article, the development of paraconsistent logic is introduced first. Then C1 system, developed by Costa, is discussed. This article argued that the "┐" symbol of C1 System is not the classical negation symbol, so this system is not the genuine paraconsistent logic. But the "～" symbol defined in C1 System has the characters of classical negation symbol. Based on it, C1 system could be translated into some consistent logic system by exchanging "┐" symbol and "～" symbol. Using this method, most of the paraconsistent logic systems could be translated into some consistent logic system. The rest paraconsistent logic systems, which could not be translated into some consistent logic system, are having not the sense of "paraconsisent". For understanding the essence of formal system further, the concept of syntax-equivalent is put forward. Two formal systems are syntax-equivalent, if these two formal systems are equivalent in the method of substitution of symbols or formulas. Then syntax-equivalent of formal system is discussed in an informal way. Last, what is "consistent" and "inconsistent" are discussed: "consistent" is a property of formal system; "consistent" has an intimate relation with the negation symbol of the formal system; "consistent" of object-language has a relation with "consistent" of meta-language; the self-reference Godel Sentence, in the proof of Godel 1st Incompleteness Theorem, is grounded in the mutual references between meta-language and object-language, namely, the mutual references between mathematics and logic.

Key words： Paraconsistent Logic; Syntax-equivalent of Formal System; Inconsistent; Self-reference

收稿日期: 2003-09-18;

基金项目：无

作者简介: 庄朝晖(1976-)，男,福建南安人，厦门大学助教,工学硕士。